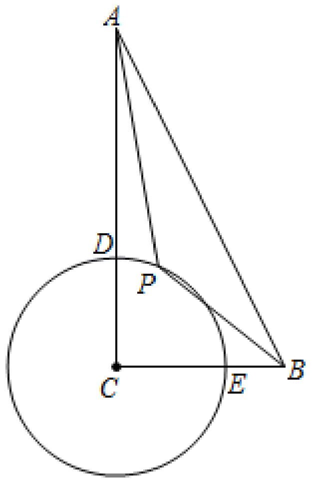
金典数学中考二轮复习

2.9 “阿氏圆”模型解决几何最值问题

课前热身

【经典剖析1】 如图，在RtΔABC中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=9$，$BC=4$，以点C为圆心，3为半径做$\odot C$，分别交AC，BC于D，E两点，点P是$\odot C$上一个动点，则$\frac{1}{3}PA+PB$的最小值为 __$\sqrt{17}$__.



【分析】在AC上截取$CQ=1$，连接CP，PQ，BQ，证明$\Delta ACP\backsim\Delta PCQ$，可得$PQ=\frac{1}{3}AP$，当$B$、$Q$、$P$三点共线时，$\frac{1}{3}PA+PB$的值最小，求出$BQ$即为所求.

【解答】解：在AC上截取$CQ=1$，连接CP，PQ，BQ，

$\because AC=9$，$CP=3$，

$\therefore \frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}$，

$\because CP=3$，$CQ=1$，

$\therefore \frac{CQ}{CP}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \Delta ACP\backsim\Delta PCQ$，

$\therefore PQ=\frac{1}{3}AP$，

$\therefore \frac{1}{3}PA+PB=PQ+PB\geqslant BQ$，

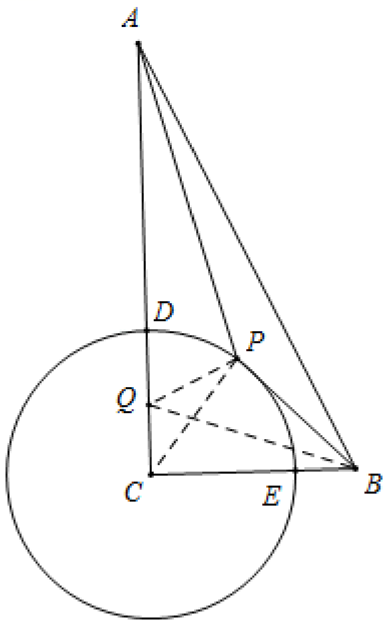
$\therefore$ 当 B、Q、P 三点共线时，$\frac{1}{3}PA+PB$ 的值最小，

在 RtΔBCQ 中，$BC=4$，$CQ=1$，

$\therefore QB=\sqrt{17}$，

$\therefore \frac{1}{3}PA+PB$ 的最小值 $\sqrt{17}$，

故答案为：$\sqrt{17}$.



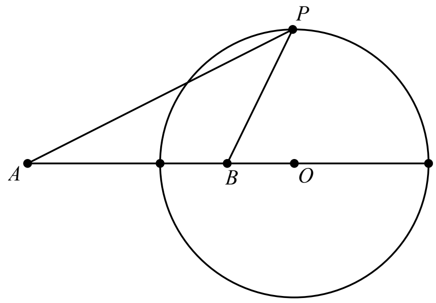
【点评】本题考查胡不归求最短距离，熟练掌握胡不归求最短距离的方法，利用三角形相似将 $\frac{1}{3}PA$ 转化为 PQ 是解题的关键.

知识梳理

在前面的"胡不归"问题中，我们见识了"kPA+PB"最值问题，其中 P 点轨迹是直线，而当 P 点轨迹变为圆时，即通常我们所说的"阿氏圆"问题．

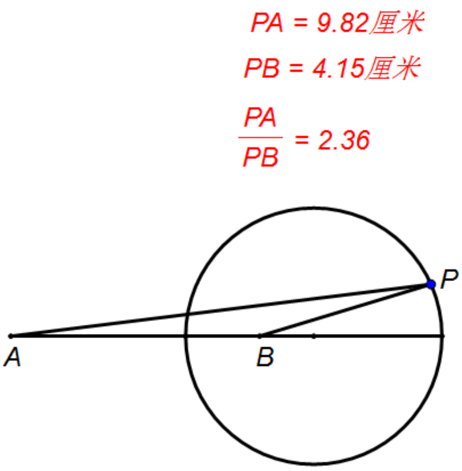
【模型来源】

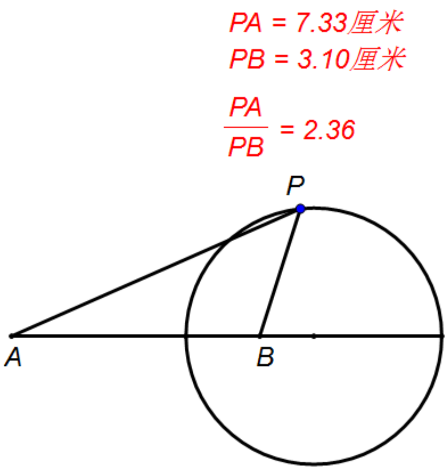
"阿氏圆"又称为"阿波罗尼斯圆"，如下图，已知 A、B 两点，点 P 满足 PA：PB=k（k≠1），则满足条件的所有的点 P 的轨迹构成的图形为圆．这个轨迹最早由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称"阿氏圆"．



在平面上，到线段两端距离相等的点，在线段的垂直平分线上，即对于平面内的定点 A、B，若平面内有一动点 P 满足 PA:PB＝1，则 P 点轨迹为一条直线（即线段 AB 的垂直平分线），如果这个比例不为 1，P 点的轨迹又会是什么呢？两千多年前的阿波罗尼斯在其著作《平面轨迹》一书中，便已经回答了这个问题。接下来，让我们站在巨人的肩膀上，一起探究 PA：PB＝k（k≠1）时 P 点的轨迹。

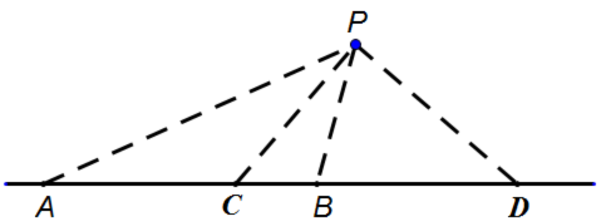
对于平面内的定点 A、B，若在平面内有一动点 P 且 P 满足 PA：PB＝k（k≠1)，则动点 P 的轨迹就是一个圆，这个圆被称为阿波罗尼斯圆，简称“阿氏圆”，如图所示：





借助画板工具我们发现，动点 P 在运动过程中，PA、PB 的长度都在变化，但是 PA：PB 的比值始终保持不变，接下来我们在深入研究一下！

若 $\dfrac{PA}{PB}=k(k\neq1)$，设$k>1$，如图所示：



由图可以发现在 AB 上存在点 C 使得 $\dfrac{CA}{CB}=k$，在 AB 延长线上存在点 D 使得 $\dfrac{DA}{DB}=k$，也就是说，当点 P 与点 C、D 重合时，符合条件；

当点 P 不与点 C、D 重合时，对于任意一点 P，连接 PA、PB、PC，可得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AC}{BC}=k$，所以 PC 为△PAB 一条内角平分线，再连接 PD，可得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AD}{BD}=k$，所以 PD 为△PAB 一条外角平分线，所以 PC⊥PD，即∠CPD＝90º，所以点 P 的轨迹是以 CD 为直径的一个圆.

当我们遇到平面内一动点到两定点之比为定值且不为 1 的情况时，可以在过两定点的直线上按定比确定内分点和外分点，并以之为直径做圆从而确定动点的轨迹.

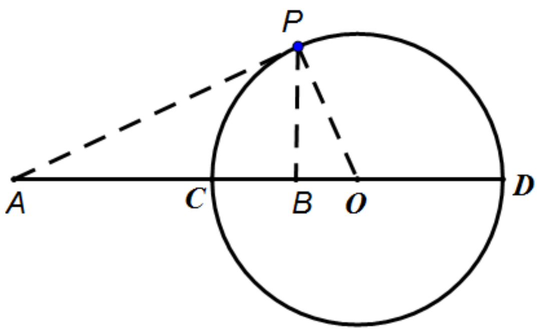
如何具体证明 P 点的轨迹就是一个完整的圆呢？

分别取线段 AB 的内外分点 C、D，再取 CD 中点 O，可得 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=k$，设 $BC=a,BD=b,OC=r$，则 $AC=ka,AD=kb$，由线段位置关系可得 AC＋BC＋BD＝AD，则 $ka+a+b=kb$，解得$a=\frac{k-1}{k+1}\cdot b$，$\therefore r=\frac{a+b}{2}=\frac{k}{k+1}\cdot b$.

又$\because OB\cdot OA=(b-r)(kb-r)=kb^2-r(k+1)b+r^2=r^2$，即 $\frac{OA}{r}=\frac{r}{OB}(r\neq OB)$，

整理得$\frac{OA-r}{r-OB}=\frac{OA}{r}=\frac{r}{OB}$，即 $\frac{AC}{BC}=\frac{OA}{r}=\frac{r}{OB}=k$，

当点 P 在一个以 O 为圆心，r 为半径的圆上运动时，如图所示：



易证：△BOP∽△POA，$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{OA}{r}=\frac{r}{OB}$，∴对于圆上任意一点 P 都有 $\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=k$.

对于任意一个圆，任意一个 k 的值，我们可以在任意一条直径所在直线上，在同侧适当的位置选取 A、B 点，则需 $\frac{OA}{r}=\frac{r}{OB}=k$，就可以构造出上述的 A 字型相似（详见本专辑的相似模型）.

方法提炼

如图 1 所示，⊙O 的半径为 R，点 A、B 都在⊙O 外 ，P 为⊙O 上一动点，已知 R=$\frac{2}{5}$OB，连接 PA、PB，则当“PA+$\frac{2}{5}$PB”的值最小时，P 点的位置如何确定？

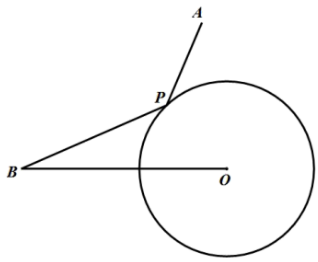


图1

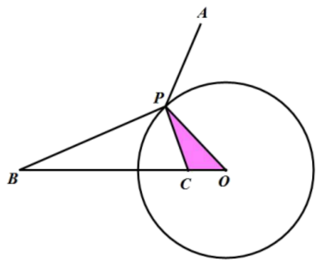
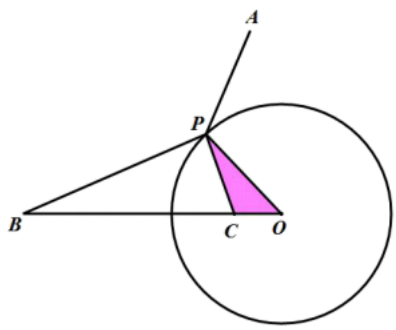


图2

解决办法：如图 2，在线段 OB 上截取 OC 使 OC=$\frac{2}{5}$R，则可说明△BPO 与△PCO 相似，则有$\frac{2}{5}$PB=PC。故本题求“PA+$\frac{2}{5}$PB”的最小值可以转化为“PA+PC”的最小值，其中与 A 与 C 为定点，P 为动点，故当 A、P、C 三点共线时，“PA+PC”值最小。

【技巧总结】

计算 $PA+k\bullet PB$ 的最小值时，利用两边成比例且夹角相等构造母子型相似三角形

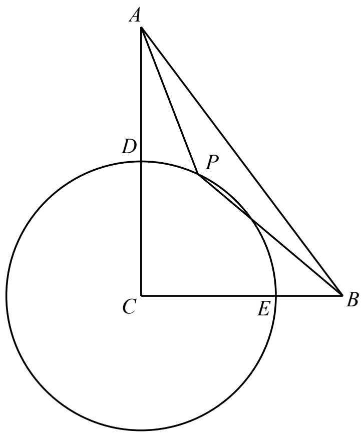


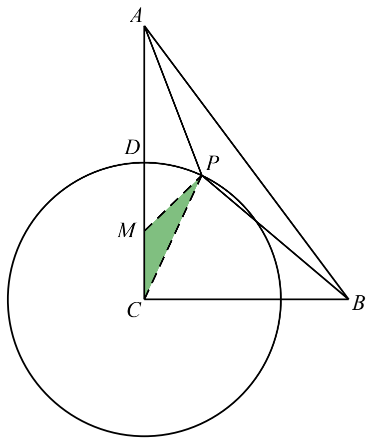
问题：在圆上找一点 P 使得 $PA+k\bullet PB$ 的值最小，解决步骤具体如下：

1. 如图，将系数不为 1 的线段两端点与圆心相连即 OP，OB
2. 计算出这两条线段的长度比 $\frac{OP}{OB}=k$
3. 在 OB 上取一点 C，使得 $\frac{OC}{OP}=k$，即构造△POM∽△BOP，则 $\frac{PC}{PB}=k$，$PC=k\bullet PB$
4. 则 $PA+k\bullet PB$=$PA+PC\geq AC$，当 A、P、C 三点共线时可得最小值

典例精析

【例题1】 如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=4，BC=3，以点 C 为圆心，2 为半径作圆 C，分别交 AC、BC 于 D、E 两点，点 P 是圆 C 上一个动点，则 $\frac{1}{2}PA+PB$ 的最小值为__________.





【分析】这个问题最大的难点在于转化 $\frac{1}{2}PA$，此处 P 点轨迹是圆，注意到圆 C 半径为 2，CA=4，

连接 CP，构造包含线段 AP 的△CPA，在 CA 边上取点 M 使得 **CM=2，**

连接 PM，可得△CPA∽△CMP，故 PA：PM=2:1，即 PM=$\frac{1}{2}PA$.

问题转化为 PM+PB≥BM 最小值，故当 B，P，M 三点共线时得最小值，直接连 BM 即可得 $\sqrt{13}$.

【例题2】　如图 1，在 RT△ABC 中，∠ACB=90°，CB=4，CA=6，圆 C 的半径为 2，点 P 为圆上一动点，连接 AP,BP，求① $AP+\frac{1}{2}BP$，② $2AP+BP$，③ $\frac{1}{3}AP+BP$，④ $AP+3BP$ 的最小值.

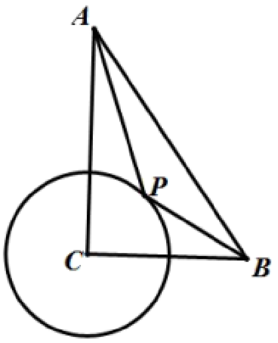


图1

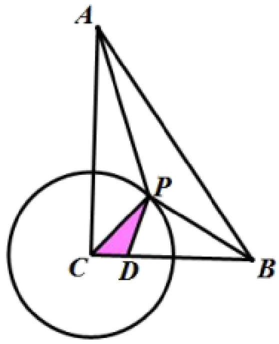
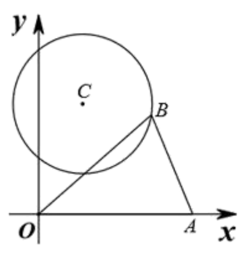


图2

[答案]：①=$\sqrt{37}$，②=2$\sqrt{37}$，③=$\frac{2\sqrt{37}}{3}$，④=$2\sqrt{37}$.

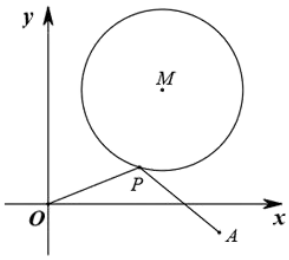
解答：如图 2，连接 *CP*，因为 *CP*=2，*AC*=6，*BC*=4，简单推算得 $\frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}$，$\frac{CP}{CB}=\frac{1}{2}$，而题目中是求"$AP+\frac{1}{2}BP$"其中的"$k=\frac{1}{2}$"，故舍弃在 *AC* 上取点，应用"$\frac{CP}{CB}=\frac{1}{2}$"，所以在 *CB* 上取一点 *D*，使 *CD*=1，则有 $\frac{CD}{CP}=\frac{CP}{CB}=\frac{PD}{BP}=\frac{1}{2}$，无论 *P* 如何移动，，△*PCD* 与△*BCP* 始终相似，故 $PD=\frac{1}{2}BP$ 始终成立，所以 $AP+\frac{1}{2}BP=AP+PD$，其中 *A*、*D* 为定点，故 *A*、*P*、*D* 三点共线时最小，$AP+\frac{1}{2}BP=AP+PD=AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{37}$（**思考：若求 $BP+\frac{1}{3}PA$ 呢？**）

【例题3】　如图，点 C 坐标为(2,5)，点 A 的坐标为(7,0)，⊙C 的半径为 $\sqrt{10}$，点 B 在⊙C 上一动点，$OB+\frac{\sqrt{5}}{5}AB$ 的最小值为________.



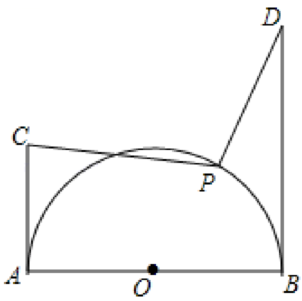
[答案]：5.

【例题4】　如图，在平面直角坐标系 xoy 中，A(6,-1)，M(4,4)，以 M 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径画圆，O 为原点，P 是⊙M 上一动点，则 PO+2PA 的最小值为________.

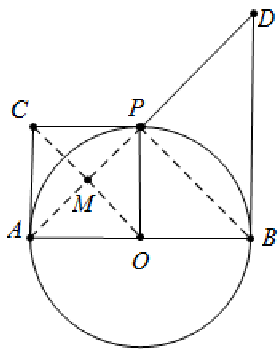


[答案]：10.

【例题5】　如图，半圆的半径为 1，AB 为直径，AC、BD 为切线，$AC=1$，$BD=2$，P 为$\overset{\frown}{AB}$上一动点，求$\frac{\sqrt{2}}{2}PC+PD$ 的最小值.



【解答】解：如图当 A、P、D 共线时，$\frac{\sqrt{2}}{2}PC+PD$ 最小．理由：



连接 PB、CO，AD 与 CO 交于点 M，

$\because AB=BD=4$，BD 是切线，$\therefore\angle ABD=90°$，$\angle BAD=\angle D=45°$，

$\because AB$ 是直径，$\therefore\angle APB=90°$，

$\therefore\angle PAB=\angle PBA=45°$，$\therefore PA=PB$，$PO\perp AB$，

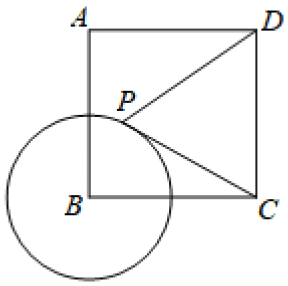
$\because AC=PO=2$，$AC\parallel PO$，$\therefore$四边形 $AOPC$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OP$，$\angle AOP=90°$，$\therefore$四边形 $AOPC$ 是正方形，

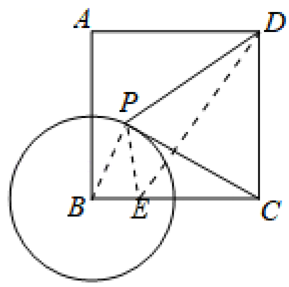
$\therefore PM=\frac{\sqrt{2}}{2}PC$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}PC+PD=PM+PD=DM$，

$\because DM\perp CO$，$\therefore$此时$\frac{\sqrt{2}}{2}PC+DP$ 最小$=AD-AM=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【例题6】 如图，四边形 $ABCD$ 为边长为 4 的正方形，⊙B 的半径为 2，P 是⊙B 上一动点，则 $PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为__5__；$\sqrt{2}PD+4PC$ 的最小值为__$10\sqrt{2}$__．



【解答】解：①如图，连接 PB、在 BC 上取一点 E，使得 $BE=1$．



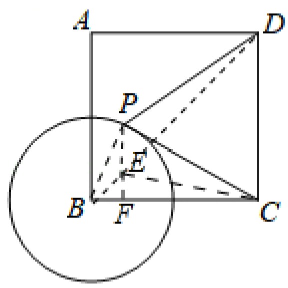
$\because PB^2=4$，$BE\cdot BC=4$，$\therefore PB^2=BE\cdot BC$，$\therefore \frac{PB}{BC}=\frac{BE}{PB}$，$\because \angle PBE=\angle CBE$，

$\therefore \triangle PBE\backsim\triangle CBE$，$\therefore \frac{PE}{PC}=\frac{PB}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore PD+\frac{1}{2}PC=PD+PE$，

$\because PE+PD\le DE$，在 Rt$\triangle DCE$ 中，$DE=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为 5．

②连接 DB，PB，在 BD 上取一点 E，使得 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，连接 EC，作 $EF\perp BC$ 于 F．



$\because PB^2=4$，$BE\cdot BD=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4\sqrt{2}=4$，$\therefore BP^2=BE\cdot BD$，

$\therefore \frac{BP}{BD}=\frac{BE}{BP}$，$\because \angle PBE=\angle PBD$，$\therefore \triangle PBE\backsim\triangle DBP$，

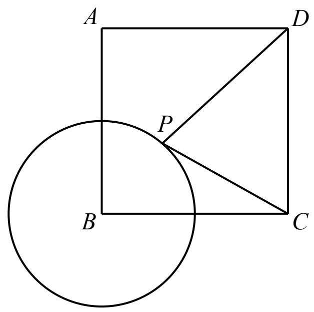
$\therefore \frac{PE}{PD}=\frac{PB}{BD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore PE=\frac{\sqrt{2}}{4}PD$，

$\therefore \sqrt{2}PD+4PC=4$（$\frac{\sqrt{2}}{4}PD+PC$）$=4$（$PE+PC$），

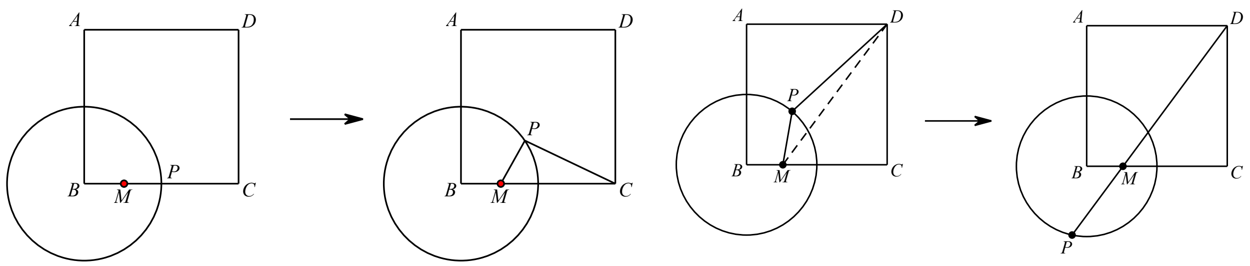
$\because PE+PC\ge EC$，在 Rt$\triangle EFC$ 中，$EF=\frac{1}{2}$，$FC=\frac{7}{2}$，$\therefore EC=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sqrt{2}PD+4PC$ 的最小值为 $10\sqrt{2}$．故答案为 5，$10\sqrt{2}$．

【例题7】 如图，已知正方 ABCD 的边长为 6，圆 B 的半径为 3，点 P 是圆 B 上的一个动点，则 $PD-\frac{1}{2}PC$ 的最大值为_______.



【分析】当 P 点运动到 BC 边上时，此时 PC=3，根据题意要求构造 $\frac{1}{2}PC$，在 BC 上取 M 使得此时 PM=$\frac{3}{2}$，则在点 P 运动的任意时刻，均有 PM=$\frac{1}{2}PC$，从而将问题转化为求 PD-PM 的最大值．连接 PD，对于△PDM，PD-PM＜DM，故当 D、M、P 共线时，PD-PM=DM 为最大值 $\frac{15}{2}$．



【例题8】 （1）如图 1，已知正方形 *ABCD* 的边长为 9，圆 *B* 的半径为 6，点 *P* 是圆 *B* 上的一个动点，那么 $PD+\frac{2}{3}PC$的最小值为__$\sqrt{106}$__，$PD-\frac{2}{3}PC$的最大值为__$\sqrt{106}$__．

（2）如图 2，已知菱形 *ABCD* 的边长为 4，$\angle B=60°$，圆 *B* 的半径为 2，点 *P* 是圆 *B* 上的一个动点，那么 $PD+\frac{1}{2}PC$的最小值为__$\sqrt{37}$__，$PD-\frac{1}{2}PC$的最大值为__$\sqrt{37}$__．

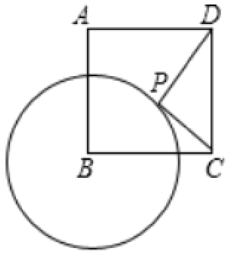


图 1

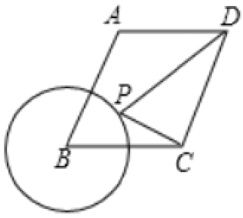


图 2

【解答】解：（1）如图 3 中，在 *BC* 上取一点 *G*，使得 *BG*＝4．

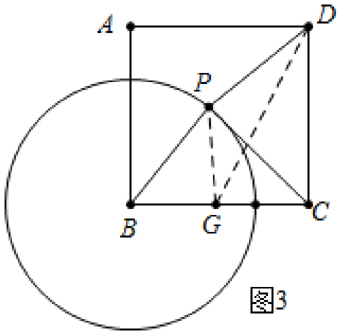


图3

$\because \frac{PB}{BG}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，$\frac{BC}{PB}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{PB}{BG}=\frac{BC}{PB}$，$\because \angle PBG=\angle PBC$，

$\therefore \triangle PBG\backsim\triangle CBP$，

$\therefore \frac{PG}{PC}=\frac{BG}{PB}=\frac{2}{3}$，$\therefore PG=\frac{2}{3}PC$，

$\therefore PD+\frac{2}{3}PC=DP+PG$，

$\because DP+PG\geq DG$，$\therefore$当 *D*、*G*、*P* 共线时，$PD+\frac{2}{3}PC$ 的值最小，最小值为 $DG=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$．

$\because PD-\frac{2}{3}PC=PD-PG\leq DG$，当点 *P* 在 *DG* 的延长线上时，$PD-\frac{1}{2}PC$ 的值最大，最大值为 $DG=\sqrt{106}$．

故答案为$\sqrt{106}$，$\sqrt{106}$

（2）如图 4 中，在 *BC* 上取一点 *G*，使得 *BG*＝1，作 $DF\perp BC$ 于 *F*．

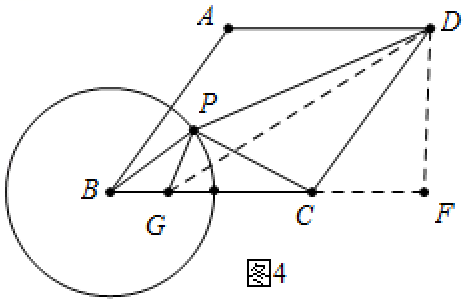


图4

$\because \frac{PB}{BG}=\frac{2}{1}=2$，$\frac{BC}{PB}=\frac{4}{2}=2$，

$\therefore \frac{PB}{BG}=\frac{BC}{PB}$，$\because \angle PBG=\angle PBC$，

$\therefore \triangle PBG\backsim\triangle CBP$，

$\therefore \frac{PG}{PC}=\frac{BG}{PB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore PG=\frac{1}{2}PC$，

$\therefore PD+\frac{1}{2}PC=DP+PG$，$\because DP+PG\geq DG$，$\therefore$当 *D*、*G*、*P* 共线时，$PD+\frac{1}{2}PC$ 的值最小，最小值为 *DG*，

在 Rt△*CDF* 中，$\angle DCF=60°$，$CD=4$，$\therefore DF=CD\bullet\sin60°=2\sqrt{3}$，$CF=2$，

在 Rt△*GDF* 中，$DG=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(5)^2}=\sqrt{37}$$\because PD-\frac{1}{2}PC=PD-PG\leq DG$，

当点 *P* 在 *DG* 的延长线上时，$PD-\frac{1}{2}PC$ 的值最大（如图 2 中），最大值为 $DG=\sqrt{37}$．

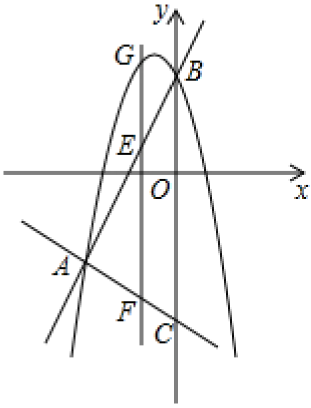
故答案为$\sqrt{37}$，$\sqrt{37}$．

【例题9】 如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与直线 AB 交于 A（﹣4，﹣4），B（0，4）两点，直线 AC：$y=-\frac{1}{2}x-6$ 交 y 轴于点 C．点 E 是直线 AB 上的动点，过点 E 作 EF⊥x 轴交 AC 于点 F，交抛物线于点 G．

（1）求抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的表达式；

（2）连接 GB，EO，当四边形 GEOB 是平行四边形时，求点 G 的坐标；

（3）①在 y 轴上存在一点 H，连接 EH，HF，当点 E 运动到什么位置时，以 A，E，F，H 为顶点的四边形是矩形？求出此时点 E，H 的坐标；②在①的前提下，以点 E 为圆心，EH 长为半径作圆，点 M 为⊙E 上一动点，求 $\frac{1}{2}$AM+CM 它的最小值．



【解答】解：（1）∵点 A（﹣4，﹣4），B（0，4）在抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 上，

∴$\begin{cases}-16-4b+c=-4\\ c=4\end{cases}$，∴$\begin{cases}b=-2\\ c=4\end{cases}$，∴抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+4$；

（2）设直线 AB 的解析式为 y=kx+n 过点 A，B，

∴$\begin{cases}n=4\\ -4k+n=-4\end{cases}$，∴$\begin{cases}k=2\\ n=4\end{cases}$，∴直线 AB 的解析式为 y=2x+4，

设 E（m，2m+4），∴G（m，$-m^2-2m+4$），

∵四边形 GEOB 是平行四边形，∴EG=OB=4，

∴$-m^2-2m+4-2m-4=4$，∴m=﹣2，∴G（﹣2，4）；

（3）①如图 1，

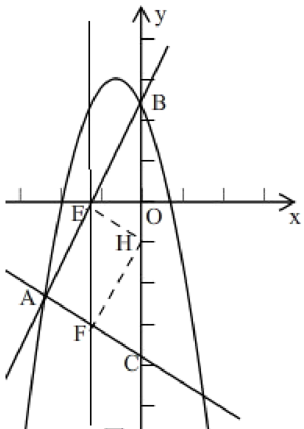


图1

由（2）知，直线 AB 的解析式为 y=2x+4，∴设 E（a，2a+4），

∵直线 AC：$y=-\frac{1}{2}x-6$，∴F（a，$-\frac{1}{2}a-6$），设 H（0，p），

∵以点 A，E，F，H 为顶点的四边形是矩形，

∵直线 AB 的解析式为 y=2x+4，直线 AC：$y=-\frac{1}{2}x-6$，

∴AB⊥AC，∴EF 为对角线，

∴$\frac{1}{2}$（﹣4+0）=$\frac{1}{2}$（a+a），$\frac{1}{2}$（﹣4+p）=$\frac{1}{2}$（2a+4﹣$\frac{1}{2}$a﹣6），

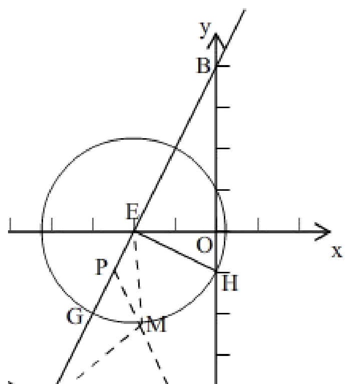
∴a=﹣2，P=﹣1，∴E（﹣2，0）．H（0，﹣1）；

②如图 2，

由①知，E（﹣2，0），H（0，﹣1），A（﹣4，﹣4），

∴EH=$\sqrt{5}$，AE=2$\sqrt{5}$，设 AE 交⊙E 于 G，取 EG 的中点 P，∴PE=$\frac{\sqrt{5}}{2}$，

连接 PC 交⊙E 于 M，连接 EM，∴EM=EH=$\sqrt{5}$，



$\therefore \dfrac{PE}{ME}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，$\because \dfrac{ME}{AE}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{PE}{ME}=\dfrac{ME}{AE}=\dfrac{1}{2}$，

∵∠PEM=∠MEA，∴△PEM∽△MEA，$\therefore \dfrac{PE}{ME}=\dfrac{ME}{AE}=\dfrac{1}{2}$，

∴PM=$\dfrac{1}{2}$AM，∴$\dfrac{1}{2}$AM+CM 的最小值=PC，设点 P（p，2p+4），

∵E（﹣2，0），∴PE^2=（p+2）^{2}+（2p+4）^{2}=5（p+2）^{2}，

∵PE=$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，∴5（p+2）^{2}=$\dfrac{5}{4}$，

∴p=$-\dfrac{5}{2}$或 p=﹣$\dfrac{3}{2}$（由于 E（﹣2，0），所以舍去），∴P（$-\dfrac{5}{2}$，﹣1），

∵C（0，﹣6），∴PC=$\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(-1+6)^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$，即：$\dfrac{1}{2}$AM+CM=$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$．

【例题10】 如图1，抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A（4，0），与 y 轴交于点 B，在 x 轴上有一动点 E（m，0）（$0<m<4$），过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N，交抛物线于点 P，过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M.

（1）求 a 的值和直线 AB 的函数表达式；

（2）设△PMN 的周长为 C_1，△AEN 的周长为 C_2，若 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{6}{5}$，求 m 的值；

（3）如图2，在（2）条件下，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE'，旋转角为 α（0°＜α＜90°），连接 $E'A$、$E'B$，求 $E'A+\frac{2}{3}E'B$ 的最小值.

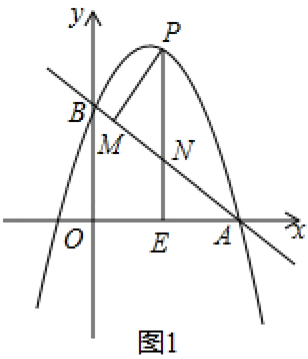


图1

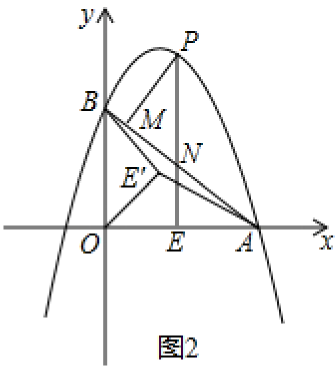


图2

【解答】解：（1）令 $y=0$，则 $ax^2+(a+3)x+3=0$，

∴ $(x+1)(ax+3)=0$，∴ $x=-1$ 或 $-\frac{3}{a}$，

∵抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A（4，0），

∴ $-\frac{3}{a}=4$，∴ $a=-\frac{3}{4}$. ∵ A（4，0），B（0，3），

设直线 AB 解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}b=3\\4k+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\b=3\end{cases}$，

∴直线 AB 解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

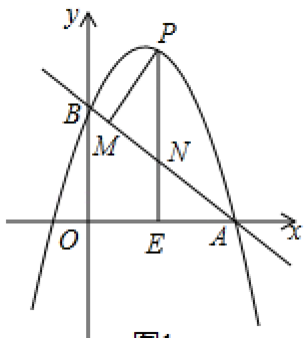


图1

（2）如图1中，∵ $PM\perp AB$，$PE\perp OA$，

∴∠PMN＝∠AEN，∵∠PNM＝∠ANE，∴△PNM∽△ANE，∴ $\frac{PN}{AN}=\frac{6}{5}$，

∵ $NE\parallel OB$，∴ $\frac{AN}{AB}=\frac{AE}{OA}$，∴ $AN=\frac{5}{4}(4-m)$，

∵抛物线解析式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$，

∴ $PN=-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3-\left(-\frac{3}{4}m+3\right)=-\frac{3}{4}m^2+3m$，

∴ $\dfrac{-\frac{3}{4}m^2+3m}{\frac{5}{4}(4-m)}=\frac{6}{5}$，解得 $m=2$.

（3）如图 2 中，在 y 轴上 取一点 M'使得 $OM'=\frac{4}{3}$，连接 AM'，在 AM'上取一点 E'使得 $OE'=OE$．

$\because OE'=2$，$OM'\cdot OB=\frac{4}{3}\times3=4$，

$\therefore OE'^2=OM'\cdot OB$，

$\therefore\frac{OE'}{OM'}=\frac{OB}{OE'}$，$\because\angle BOE'=\angle M'OE'$，

$\therefore\triangle M'OE'\backsim\triangle E'OB$，

$\therefore\frac{M'E'}{BE'}=\frac{OE'}{OB}=\frac{2}{3}$，

$\therefore M'E'=\frac{2}{3}BE'$，

$\therefore AE'+\frac{2}{3}BE'=AE'+E'M'=AM'$，此时 $AE'+\frac{2}{3}BE'$最小

（两点间线段最短，A、M'、E'共线时），

最小值$=AM'=\sqrt{4^2+(\frac{4}{3})^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

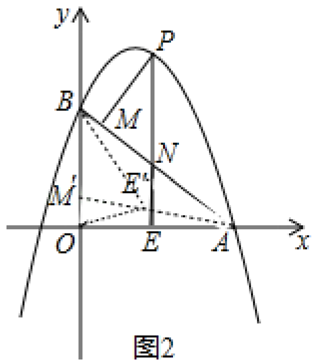
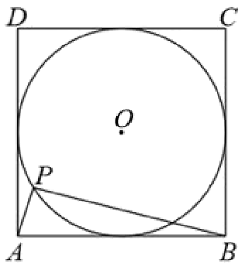


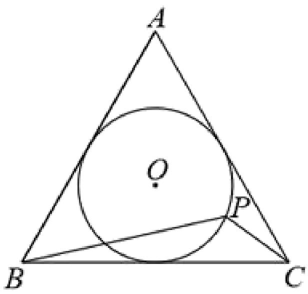
图2

【例题11】 如图，边长为4的正方形，内切圆记为⊙O，P是⊙O上一动点，则$\sqrt{2}$ PA+PB的最小值为________.



[答案]：$2\sqrt{5}$.

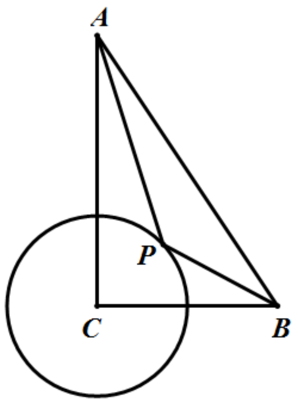
【例题12】 如图，等边△ABC 的边长为 6，内切圆记为⊙O，P 是⊙O 上一动点，则 2PB+PC 的最小值为________.



[答案]：$\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

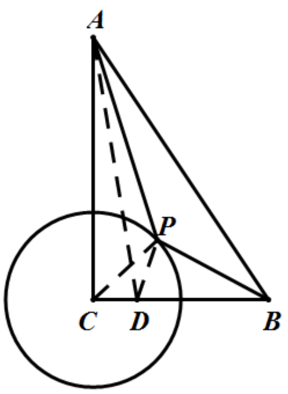
【例题13】 如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90º，CB＝4，CA＝6，圆 C 的半径为 2，P 为圆 C 上一动点，连

接 AP、BP，则$AP+\frac{1}{2}BP$的最小值是__________________.



【解答】$\sqrt{37}$

【解析】连接 CP，在 CB 上取一点 D，使得 CD＝1，连接 AD，如图所示：



易得$\frac{CD}{CP}=\frac{CP}{PB}=\frac{1}{2}$，

∵∠PCD＝∠BCP，∴△PCD ∽△BCP，

$\therefore \frac{PD}{BP}=\frac{1}{2}$，$\therefore PD=\frac{1}{2}BP, \therefore AP+\frac{1}{2}BP=AP+PD$，

当点 A、P、D 在同一条直线上时，$AP+\frac{1}{2}BP$的值最小，

在 Rt△ACD 中，∵CD＝1，CA＝6，$\therefore AD=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$，

$\therefore AP+\frac{1}{2}BP$的最小值为$\sqrt{37}$.

【例题14】 如图，$\odot O$的半径为$\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{10}$，MO＝2，∠POM＝90º，Q 为$\odot O$上一动点，则