

# 宣城市 2022—2023 学年度第一学期期末调研测试

## 高二数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单选题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = -\frac{1}{4}$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}$ , 则  $a_3 =$  ( )

- A. -3                      B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】由递推关系依次求  $a_2, a_3$  即可.

【详解】因为当  $n \geq 2$  时,  $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ,

所以  $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1}$ , 又  $a_1 = -\frac{1}{4}$ ,

所以  $a_2 = 5$ , 又  $a_3 = 1 - \frac{1}{a_2}$ ,

所以  $a_3 = \frac{4}{5}$ ,

故选: C.

2. 已知直线  $l: x + 2y - 1 = 0$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta =$  ( )

- A.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$                       D.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】由直线方程求得  $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ ，可判断出  $\theta$  为钝角，再利用同角三角函数的基本关系可求得  $\cos \theta$  的值.

【详解】由题意可知，直线  $l$  的斜率为  $k = -\frac{1}{2}$ ，即  $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ ， $\therefore \theta$  为钝角，则  $\cos \theta < 0$ ，

$$\text{由同角三角函数的基本关系可得} \begin{cases} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{2} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}, \text{解得} \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选：A.

【点睛】本题考查直线的倾斜角，考查直线倾斜角与斜率的关系，考查三角函数值的求法，是基础题.

3. 数学与建筑的结合造就建筑艺术品，如吉林大学的校门是一抛物线形水泥建筑物，如图.若将该大学的校门轮廓（忽略水泥建筑的厚度）近似看成抛物线  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) 的一部分，且点  $A(2, -2)$  在该抛物线上，则该抛物线的焦点坐标是 ( )



- A.  $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$       B.  $(0, -1)$       C.  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$       D.  $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据点 A 的坐标求得  $a$ ，由此求得抛物线的焦点坐标.

【详解】依题意  $A(2, -2)$  在抛物线  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) 上，

$$\text{所以 } -2 = a \times 2^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2},$$

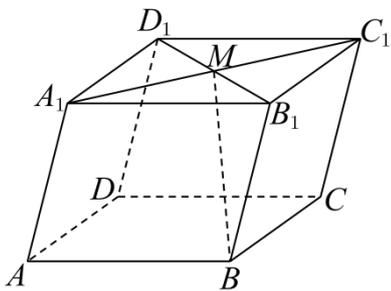
$$\text{所以 } y = -\frac{1}{2}x^2, x^2 = -2y,$$

故  $2p = 2, \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$ ，且抛物线开口向下，

所以抛物线的焦点坐标为  $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ .

故选：A

4. 如图所示, 在平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  为  $A_1C_1$  与  $B_1D_1$  交点, 若  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ , 则  $\overrightarrow{BM} =$  ( )



- A.  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$                       B.  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$   
 C.  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$                       D.  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据空间向量基本定理结合空间向量线性运算求解.

【详解】由题意可得:  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1B_1})$   
 $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ .

故选: D.

5. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项都是正数, 其公比为 4, 且  $a_1a_2a_3a_4a_5 = 4^{10}$ , 则  $a_4a_6 =$  ( )
- A.  $4^4$                       B.  $4^6$                       C.  $4^8$                       D.  $4^{10}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据等比数列的性质求解即可.

【详解】解: 根据等比数列性质, 有  $a_1a_5 = a_2a_4 = a_3^2$ ,

因为  $a_1a_2a_3a_4a_5 = 4^{10}$ , 所以  $a_1a_2a_3a_4a_5 = a_3^5 = 4^{10}$ , 解得  $a_3 = 16$ ,

因为等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q = 4$ ,

所以,  $a_4a_6 = a_5^2 = (a_3q^2)^2 = (16 \times 4^2)^2 = 4^8$ .

故选: C

6. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯(约公元前 262~公元前 190 年)的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果, 他证明过这样一个命题: 平面内与两定点距离的比为常数  $k$  ( $k > 0, k \neq 1$ ) 的点的轨迹是圆, 后

人将这个圆称为阿波罗尼斯圆. 在平面直角坐标系中, 设  $A(-3, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , 动点  $M$  满足  $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ ,

则动点  $M$  的轨迹方程为

A.  $(x-5)^2 + y^2 = 16$

B.  $x^2 + (y-5)^2 = 9$

C.  $(x+5)^2 + y^2 = 16$

D.  $x^2 + (y+5)^2 = 9$

【答案】A

【解析】

【分析】首先设  $M(x, y)$ , 代入两点间的距离求  $|MA|$  和  $|MB|$ , 最后整理方程.

【详解】解析: 设  $M(x, y)$ , 由  $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ , 得  $\frac{(x+3)^2 + y^2}{(x-3)^2 + y^2} = 4$ ,

可得:  $(x+3)^2 + y^2 = 4(x-3)^2 + 4y^2$ ,

即  $x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$

整理得  $(x-5)^2 + y^2 = 16$ , 故动点  $M$  的轨迹方程为  $(x-5)^2 + y^2 = 16$ . 选 A.

【点睛】本题考查了轨迹方程的求解方法, 其中属于直接法, 一般轨迹方程的求解有 1. 直接法, 2. 代入法, 3. 定义法, 4. 参数法.

7. 已知正四面体  $ABCD$  的棱长为  $a$ , 点  $E, F$  分别是  $BC, AD$  的中点, 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$  的值为 ( )

A.  $a^2$

B.  $\frac{1}{2}a^2$

C.  $\frac{1}{4}a^2$

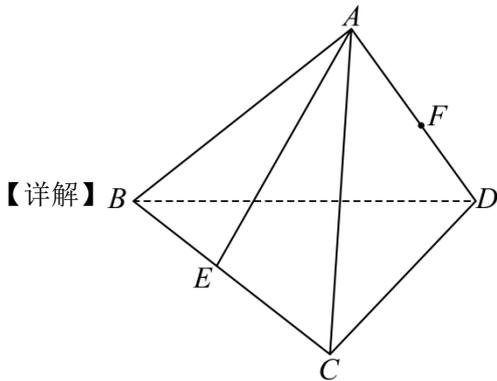
D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量的线性运算得出  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ,  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ , 根据正四面体的性质得出

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = a$ , 且  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  三向量两两夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 即可通过向量数量积的运算率得出答案.



∵ 四面体  $ABCD$  是正四面体,

∴  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = a$ , 且  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  三向量两两夹角  $\frac{\pi}{3}$ ,

∵ 点  $E$ ,  $F$  分别是  $BC$ ,  $AD$  的中点,

∴  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ,  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ,

则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}\left(a^2 \cos \frac{\pi}{3} + a^2 \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}a^2$ ,

故选: C.

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  经过点  $F_2$  且与该双曲线的右支交

于  $A, B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $7a$ , 则该双曲线离心率的取值范围是 ( )

- A.  $\left[1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$       B.  $\left(\frac{\sqrt{11}}{2}, \sqrt{7}\right)$       C.  $\left[\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{7}\right]$       D.  $\left[\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right]$

【答案】A

【解析】

【分析】根据双曲线定义及焦点三角形周长、焦点弦的性质有  $4a + \frac{4b^2}{a} \leq 7a$ , 即可求离心率范围.

【详解】根据双曲线定义知:  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4a + 2|AB|$ , 而  $|AB| \geq \frac{2b^2}{a}$ ,

所以  $4a + 2|AB| \geq 4a + \frac{4b^2}{a}$ , 而  $\triangle AF_1B$  的周长为  $7a$ ,

所以  $4a + \frac{4b^2}{a} \leq 7a$ , 即  $4b^2 \leq 3a^2$ , 所以  $4(c^2 - a^2) \leq 3a^2$ , 解得  $e \leq \frac{\sqrt{7}}{2}$ ,

双曲线离心率的取值范围是  $\left(1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ .

故选: A

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 < 0$ ,  $S_7 = S_{12}$ , 则 ( )

A. 数列  $\{a_n\}$  是递减数列

B.  $a_{10} = 0$

C.  $S_n < 0$  时,  $n$  的最大值是 18

D.  $S_2 < S_{16}$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据等差数列的性质和前  $n$  项求和公式可得  $a_1 = -9d$ 、 $d > 0$ , 结合通项公式和前  $n$  项求和公式计算, 依次判断选项即可.

【详解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\text{由 } S_7 = S_{12}, \text{ 得 } 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d,$$

解得  $a_1 = -9d$ , 因为  $a_1 < 0$ , 所以  $d > 0$ .

A: 由  $d > 0$ , 可得  $a_{n+1} - a_n = d > 0$

所以等差数列  $\{a_n\}$  为递增数列, 故 A 错误;

B:  $a_{10} = a_1 + 9d = -9d + 9d = 0$ , 故 B 正确;

$$\text{C: } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -9nd + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d = \frac{d}{2}(n^2 - 19n),$$

由  $S_n < 0$  可得  $n^2 - 19n < 0$ , 所以  $0 < n < 19$ , 又  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

所以  $n$  的最大值是 18, 故 C 正确;

$$\text{D: } S_2 = 2a_1 + d = 2 \times (-9d) + d = -17d, \quad S_{16} = 16a_1 + \frac{16 \times 15}{2}d = 16 \times (-9d) + \frac{16 \times 15}{2}d = -24d,$$

由  $d > 0$ , 得  $S_2 > S_{16}$ , 故 D 错误.

故选: BC.

10. 圆  $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ , 直线  $l: 3x+4y+19=0$ , 点  $M$  在圆  $C$  上, 点  $N$  在直线  $l$  上, 则下列结

论正确的是 ( )

- A. 圆  $C$  关于直线  $3x-2y=0$  对称
- B.  $|MN|$  的最大值是 9
- C. 从  $N$  点向圆  $C$  引切线, 切线长的最小值是 3
- D. 直线  $y=k(x-1)+1$  被圆  $C$  截得的弦长取值范围为  $[2\sqrt{3}, 8]$

【答案】 CD

【解析】

【分析】 根据  $C(-2,3)$  不在直线  $l$  上判断 A; 根据  $|MN| \in [1, +\infty)$  判断 B; 根据  $CN \perp l$  时, 切线长最小求解判断 C; 根据直线  $y=k(x-1)+1$  过定点  $(1,1)$ , 再结合弦长公式判断 D.

【详解】 解: 对于 A 选项,  $\because$  圆  $C:(x+2)^2+(y-3)^2=16$ ,  $\therefore$  圆心  $C(-2,3)$ , 半径  $r=4$ ,

$\because 3 \times (-2) - 2 \times 3 \neq 0$ ,  $\therefore$  圆  $C$  不关于直线  $3x-2y=0$  对称, 故 A 选项错误;

对于 B 选项, 由圆心  $C$  到直线  $l: 3x+4y+19=0$  的距离为:  $d = \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 3 + 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 > 4$ ,

$\therefore |MN|$  的最小值是  $d-r=1$ , 故  $|MN| \in [1, +\infty)$ , 故 B 选项错误;

对于 C 选项, 从  $N$  点向圆  $C$  引切线, 当  $CN \perp l$  时, 切线长最小, 最小值是  $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ , 故 C 正确;

对于 D 选项, 直线  $y=k(x-1)+1$  过定点  $(1,1)$ , 该定点在圆  $C$  内,

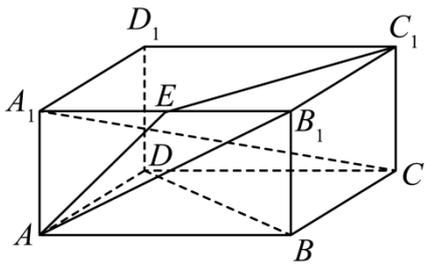
所以直线  $y=k(x-1)+1$  被圆  $C$  截得的弦长最长时, 所截弦长为过点  $(1,1)$  和圆心的圆  $C$  的直径, 即弦长的最大值为 8,

最短的弦长为垂直与该直径的弦长,  $(1,1)$  和圆心  $C(-2,3)$  的距离为  $\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$ , 最短弦长为  $2\sqrt{4^2 - 13} = 2\sqrt{3}$ ,

故直线  $y=k(x-1)+1$  被圆  $C$  截得的弦长取值范围为  $[2\sqrt{3}, 8]$ , D 正确.

故选: CD.

11. 如图, 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=BC=2$ ,  $AA_1=1$ ,  $E$  为棱  $A_1B_1$  的中点, 则 ( )



A.  $AB_1 \parallel$  面  $BC_1D$

B.  $A_1C \perp BD$

C. 平面  $AC_1E$  截该长方体所得截面面积为  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

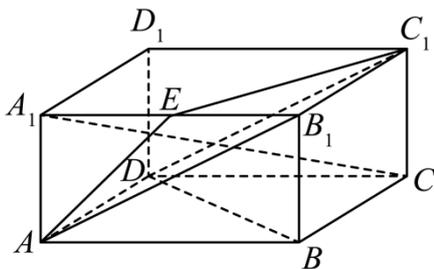
D. 三棱锥  $A-B_1C_1E$  的体积为  $\frac{1}{3}$

【答案】 ABD

【解析】

【分析】对于 A：根据长方体的性质得出  $AB_1 \parallel DC_1$ ，即可证明；对于 B：根据底面  $ABCD$  是正方形，得出  $BD \perp AC$ ，根据三垂线定理结合长方体性质即可证明；对于 C：根据长方体对称性易知平面  $AC_1E$  截该长方体所得截面面积为  $2S_{\triangle AEC_1}$ ，根据已知得出  $AE$ ， $EC_1$ ， $AC_1$ ，即可根据余弦定理得出  $\cos \angle AEC_1$ ，即可根据同角三角函数公式得出  $\sin \angle AEC_1$ ，即可根据三角形面积公式得出答案验证；对于 D：根据已知直接利用三棱锥的体积公式得出答案；

【详解】对于选项 A：连接  $C_1D$ ，



$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$  为长方体， $\therefore AD \parallel B_1C_1$ ， $AD=B_1C_1$ ， $\therefore$  四边形  $ADC_1B_1$  是平行四边形，

$\therefore AB_1 \parallel DC_1$ ，

$\because AB_1 \not\subset$  平面  $BC_1D$ ， $DC_1 \subset$  平面  $BC_1D$ ，

$\therefore AB_1 \parallel$  面  $BC_1D$ ，故选项 A 正确；

对于选项 B：

$\because AB=BC=2$ ，

$\therefore BD \perp AC$ ，

$\because A_1A \perp$  平面  $ABCD$ ,

$\therefore A_1C$  在平面  $ABCD$  上的投影为  $AC$ ,

$\therefore A_1C \perp BD$ , 故选项 B 正确;

对于选项 C:

根据长方体对称性易知平面  $AC_1E$  截该长方体所得截面面积为  $2S_{\triangle AEC_1}$ ,

$\because AB = BC = 2, AA_1 = 1$ ,

$\therefore AE = \sqrt{2}, EC_1 = \sqrt{5}, AC_1 = 3$ ,

$$\therefore \cos \angle AEC_1 = \frac{2+5-9}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

由  $\therefore \cos^2 \angle AEC_1 + \sin^2 \angle AEC_1 = 1, \sin \angle AEC_1 > 0$  可得  $\sin \angle AEC_1 = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,

则  $2S_{\triangle AEC_1} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3$ , 故 C 错误;

对于选项 D:

三棱锥  $A-B_1C_1E$  的底面积  $S_{\triangle B_1C_1E} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ , 高为  $h = 1$ ,

则三棱锥  $A-B_1C_1E$  的体积为  $V_{A-B_1C_1E} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ , 故 D 正确;

故选: ABD.

12. 已知  $O$  为坐标原点,  $F_1, F_2$  分别是渐近线方程为  $x \pm 2y = 0$  的双曲线  $E$  的左、右焦点,  $M$  为双曲线  $E$

上任意一点,  $MN$  平分  $\angle F_1MF_2$ , 且  $\overrightarrow{F_1N} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, |ON| = 4$ , 则 ( )

A. 双曲线  $E$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

B. 双曲线  $E$  的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. 点  $M$  到两条渐近线的距离之积为  $\frac{16}{5}$

D. 若直线  $MF_1$  与双曲线  $E$  的另一支交于点  $P, Q$  为  $MP$  的中点, 则  $k_{OQ} \times k_{PM} = \frac{1}{4}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】不妨设  $M$  为双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右支上一点，延长  $MF_2$ ， $F_1N$  交于点  $G$ ，进而得  $|MF_1| = |MG|$ ， $|NF_1| = |NG|$ ，再结合双曲线的定义，中位线定理得  $a = 4$ ， $b = 2$ ，进而判断 AB；设

$M(x_1, y_1)$ ，则  $\frac{x_1^2 - 4y_1^2}{16} = 1$ ，再直接计算点  $M$  到两条渐近线的距离之积判断 C；设  $P(x_2, y_2)$ ， $Q(x, y)$ ，

根据点差法求解判断 D.

【详解】解：不妨设  $M$  为双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右支上一点，

延长  $MF_2$ ， $F_1N$  交于点  $G$ ，如图，

因为  $MN$  平分  $\angle F_1MF_2$ ，且  $\overrightarrow{F_1N} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ ，即  $\overrightarrow{F_1N} \perp \overrightarrow{MN}$ ，

所以，在  $\text{Rt}\triangle MF_1N$  与  $\text{Rt}\triangle MGN$  中，
$$\begin{cases} \angle F_1MN = \angle NMG \\ MN = MN \\ \angle F_1NM = \angle GNM = 90^\circ \end{cases},$$

所以， $\text{Rt}\triangle MF_1N \cong \text{Rt}\triangle MGN$ ，故  $|MF_1| = |MG|$ ， $|NF_1| = |NG|$

根据双曲线的定义得， $|MF_1| - |MF_2| = |MG| - |MF_2| = |GF_2| = 2a$ ，

在  $\triangle F_1GF_2$  中， $ON$  为其中位线， $|ON| = 4$

所以， $|ON| = \frac{1}{2}|GF_2| = a = 4$ ，

因为双曲线  $E$  的渐近线方程为  $x \pm 2y = 0$ ，

所以  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ ，得  $b = 2$ ， $c^2 = b^2 + a^2 = 20$ ， $c = 2\sqrt{5}$

所以双曲线  $E$  的标准方程为  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ ，离心率为  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，

所以 A 不正确，B 正确；

设  $M(x_1, y_1)$ ，则  $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{4} = 1$ ，即  $\frac{x_1^2 - 4y_1^2}{16} = 1$

所以，点  $M$  到两条渐近线的距离之积为  $\frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{1+4}} \cdot \frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{x_1^2 - 4y_1^2}{5} = \frac{16}{5}$ ，所以 C 正确；

设  $P(x_2, y_2)$ ， $Q(x, y)$ ，因为  $P$ ， $M$  在双曲线  $E$  上，

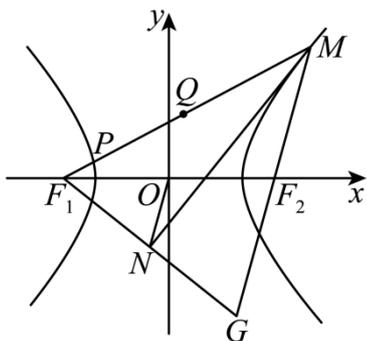
所以  $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{4} = 1$  ①， $\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1$  ②，

①-②并整理得,  $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{4(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$ , 即  $\frac{2x}{2y} = \frac{4(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$ ,

因为  $k_{MP} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ,  $k_{OQ} = \frac{y}{x}$

所以  $k_{ON} \cdot k_{MP} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$ , 所以 D 正确.

故选: BCD.



**【点睛】**关键点点睛: 本题解题的关键在于延长  $MF_2$ ,  $F_1N$  交于点  $G$ , 进而结合几何关系得到  $N$  为  $F_1G$  的中点, 进而求得双曲线的解析式.

### 三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 若直线  $ax + y = 0$  与直线  $4x + ay + a - 2 = 0$  平行, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** -2

**【解析】**

**【分析】** 根据两条直线平行列方程, 由此求得  $a$  的值.

**【详解】** 解: 将直线  $ax + y = 0$  变形为  $a^2x + ay = 0$ ,

因为直线  $ax + y = 0$  与直线  $4x + ay + a - 2 = 0$  平行,

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 = 4 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -2.$$

故答案为: -2

14. 数列  $\left\{ \frac{2}{a_n + 1} \right\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 1$ ,  $a_4 = -\frac{1}{2}$ , 那么  $a_{2022} =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $-\frac{1010}{1011}$

**【解析】**

**【分析】** 根据等差数列的通项公式, 进而写出数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 可得答案.

【详解】解：令  $b_n = \frac{2}{a_n + 1}$ ，因为  $a_1 = 1$ ， $a_4 = -\frac{1}{2}$ ，

所以  $b_1 = 1$ ， $b_4 = 4$ ，则  $\{b_n\}$  的公差为  $\frac{4-1}{4-1} = 1$ ，

所以  $b_n = n$ ，故  $a_n = \frac{2}{n} - 1$ ，

所以  $a_{2022} = \frac{2}{2022} - 1 = \frac{1}{1011} - 1 = -\frac{1010}{1011}$ 。

故答案为：  $-\frac{1010}{1011}$ 。

15. 若圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - a = 0$  恰有两条公切线，则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

【答案】  $(-9, 11)$

【解析】

【分析】由题知圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - a = 0$  相交，进而根据位置关系求解即可。

【详解】解：由题知圆  $x^2 + y^2 = 1$  的圆心为  $(0, 0)$ ，半径为  $r = 1$ ，

圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - a = 0$  的圆心为  $(3, 4)$ ，半径为  $R = \sqrt{25 + a} > 0$ ，

因为圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - a = 0$  恰有两条公切线，

所以圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - a = 0$  相交，

所以  $|\sqrt{25 + a} - 1| = |R - r| < \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 < R + r = \sqrt{25 + a} + 1$ ，

所以，  $\begin{cases} |\sqrt{25 + a} - 1| < 5 \\ 5 < \sqrt{25 + a} + 1 \end{cases}$ ，解得  $-9 < a < 11$ 。

所以，实数  $a$  的取值范围为  $(-9, 11)$

故答案为：  $(-9, 11)$

16. 在四棱锥  $A-BCDE$  中， $AB \perp$  平面  $BCDE$ ， $BC \perp CD$ ， $BE \perp DE$ ， $\angle CBE = 120^\circ$ ，且  $AB = BC = BE = 2$ ，则该四棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/328030113043006023>