2025届广州市普通高中毕业班摸底考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathbf{N}^{*}\middle|x^{2}-4x\leq 0\right\}$，$B=\left\{x\in \mathbf{Z}\middle|\left|x-1\right|\leq 2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathrm{R}$ 且 $ab\neq 0)$ 是方程 $x^{2}-bx+5a=0$ 的一个根，则 $\bar{z}=$（　　）

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $-1-2\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\left|\vec{b}\right|=1$，若 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=m$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$，且 $\alpha-\beta$ 为第一象限角，则 $\cos\alpha-\cos\beta=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $3m$　　D. $\frac{m}{3}$

5. 已知点 A，B 是椭圆 $\frac{x^{2}}{16}+\frac{y^{2}}{12}=1$ 上不关于长轴对称的两点，且 A，B 两点到点 $M(m,0)$ 的距离相等，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　B. $(-1,1)$　　C. $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　　D. $(-2,2)$

6. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=f(3-x)$，且在 $[0,1)$ 上单调递减，若方程 $f(x)=-1$ 在 $[0,1)$ 上有实数根，则方程 $f(x)=1$ 在 $[-1,11]$ 上的所有实根之和为（　　）

A. 30　　　　B. 28　　　　C. 26　　　　D. 24

7. 在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，$AA_1=2AB=6$，O 为棱 AA_1 的中点，以 O 为球心，6 为半

径的球面与该正六棱柱各面的交线总长为（　　）

A. $(3+\sqrt{3})\pi$　　B. $(6+\sqrt{3})\pi$　　C. $(3+2\sqrt{3})\pi$　　D. $(6+2\sqrt{3})\pi$

8. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(\frac{x}{y})=yf(x)-xf(y)$，且当$x>1$时，$f(x)>0$，则（　　）

A. $f(x^2)\geq 2f(x)$　　B. $f(x^3)f(x)\geq f^2(x^2)$

C. $f(x^2)\leq 2f(x)$　　D. $f(x^3)f(x)\leq f^2(x^2)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的部分分，有选错的得 0 分．

9. 中欧班列是推进"一带一路"沿线国家道路联通、贸易畅通的重要举措．在中欧班列带动下，某外贸企业出口额逐年提升，以下为该企业近 6 个月的出口额情况统计，若已求得y 关于x 的线性回归方程为$y=28x+\hat{b}$，则（　　）

月份编号x	1	2	3	4	5	6
出口额y /万元	16	25	43	77	102	159

A. y 与x 成正相关　　B. 样本数据y 的第 40 百分位数为 34

C. 当$x=3$时，残差的绝对值最小　　D. 用模型$y=e^{nx+m}$描述y 与x 的关系更合适

10. 已知函数$f(x)=\sin x$，若$0<\alpha<\beta<\theta<4\pi$，且$f(x)$在$x=\alpha$，$\beta$，$\theta$处的切线均经过坐标原点，则（　　）

A. $\alpha\beta=\tan\alpha\tan\beta$　　B. $\alpha\tan\theta=\theta\tan\alpha$

C. $\alpha+\theta>2\tan\beta$　　D. $\tan\alpha\tan\theta<\beta^2$

11. 已知圆$M:x^2-2ax+y^2=0(a>-\frac{1}{2})$，过点$P(-1,0)$向圆$M$ 引斜率为$k(k>0)$的切线l，切点为Q，记Q 的轨迹为曲线C，则（　　）

A. C 的渐近线为$x=1$

B. 点$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$在$C$上

C. C在第二象限的纵坐标最大的点对应的横坐标为$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

D. 当点(x_0, y_0)在C上时，$y_0 \le \sqrt{\dfrac{1+x_0}{1-x_0}}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 + 3a_2 + 9a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_n = \dfrac{n+1}{3}$，设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则满足$S_n < k$的实数$k$的最小值为__________.

13. 已知函数$f(x) = 6\sin x + \sin 3x$的图象$y = f(x)$与直线$y = m$在$[0, 2\pi]$上有 4 个交点，则实数m的取值范围为__________.

14. 网络安全是国家安全的重要组成部分，在信息课上，某同学利用计算机模拟网络病毒的传播．已知在12×12的平面方阵中，若某方格相邻方格中有 2 个及 2 个以上被病毒感染，则病毒扩散至该方格，若使所有方格均被感染，则至少需要在__________个方格内投放病毒源；拓展到三维空间内，已知在$12 \times 12 \times 12$的立体方阵中，若某方块相邻方块中有 3 个及 3 个以上被病毒感染，则病毒扩散至该方块，若使所有方块均被感染，则至少需要在_____个方块内投放病毒源.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知在锐角$\triangle ABC$中，$\sin A = 2\sin 2C - \sin(B-C)$，$D$为$BC$边上一点，且$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$.

（1）证明：AD平分$\angle BAC$；

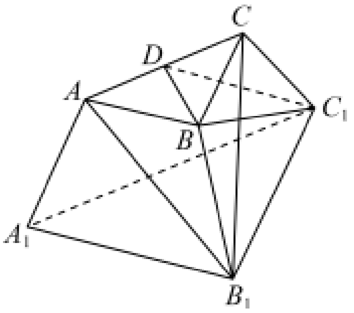
（2）已知$\cos\angle BAC = \dfrac{7}{25}$，求$\dfrac{AD}{BC}$.

16. 已知函数$f(x) = \dfrac{e^x - a}{x} - a\ln x$.

（1）若$f(x)$在$x = 1$处取得极小值，求实数a的取值范围；

（2）讨论$f(x)$的零点个数.

17. 如图，在三棱台$ABC - A_1B_1C_1$中，$\triangle AB_1C$为正三角形，$AB = BC = 2$，$AB \perp BC$，点D为AC的中点，平面$ABC \perp$平面AB_1C.



（1）若$C_1D \perp B_1C$，证明：平面$BC_1D \perp$平面BCC_1B_1；

（2）若$AA_1 = CC_1 = 4$，记平面ABB_1A_1与平面BC_1D的交线为l，求二面角A_1-l-C_1的余弦值.

18. 在平面直角坐标系xOy中，点T到点$F(2,0)$的距离与到直线$x = 1$的距离之比为$\sqrt{2}$，记T的轨迹为曲线E，直线l_1交E右支于A，B两点，直线l_2交E右支于C，D两点，$l_1 // l_2$.

（1）求E的标准方程；

（2）证明：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$；

（3）若直线l_1过点$(2,0)$，直线l_2过点$(8,0)$，记AB，CD的中点分别为P，Q，过点Q作E两条渐近线的垂线，垂足分别为M，N，求四边形$PMQN$面积的取值范围.

19. 已知有穷数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = n(n \in \mathbf{N}^*)$，将数列$\{a_n\}$中各项重新排列构成新数列$\{b_n\}$，则称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的“重排数列”；若数列$\{b_n\}$各项均满足$b_n \neq a_n$，则称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的“完全重排数列”，记项数为$n$的数列$\{a_n\}$的“完全重排数列”的个数为$D_n$.

（1）计算D_2，D_3，D_4；

（2）写出D_{n+1}和D_n，$D_{n-1}(n \geq 2)$之间的递推关系，并证明：数列$\{D_n - nD_{n-1}\}(n \geq 2)$是等比数列；

（3）若从数列$\{a_n\}$及其所有“重排数列”中随机选取一个数列$\{c_n\}$，记数列$\{c_n\}$是$\{a_n\}$的“完全重排数列”的概率为P_n，证明：当n无穷大时，P_n趋近于$\frac{1}{\mathrm{e}}$.（参考公式：$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$）

2025届广州市普通高中毕业班摸底考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.　回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid x^2-4x\le 0\right\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-1|\le 2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

【答案】C

【解析】

【分析】分别求出两个集合后根据交集定义求解.

【详解】$A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid x^2-4x\le 0\right\}=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid 0\le x\le 4\right\}=\{1,2,3,4\}$；

$B=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-1|\le 2\right\}=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid -2\le x-1\le 2\right\}=\left\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\le x\le 3\right\}=\{-1,0,1,2,3\}$；

$A\cap B=\{1,2,3\}$.

故选：C.

2. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R}$ 且 $ab\ne 0)$ 是方程 $x^2-bx+5a=0$ 的一个根，则 $\bar{z}=$（　　）

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $-1-2\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】将复数 z 代入方程，利用待定系数法，即可求解.

【详解】由题意可知，$(a+b\mathrm{i})^2-b(a+b\mathrm{i})+5a=0$，$ab\ne 0$

即 $\left(a^2-b^2-ab+5a\right)+\left(2ab-b^2\right)\mathrm{i}=0$，

则 $\begin{cases} a^2-b^2-ab+5a=0 \\ 2ab-b^2=0 \end{cases}$，解得 $a=1$，$b=2$，

即 $z=1+2i$，所以 $\bar{z}=1-2\mathrm{i}$.

故选：B

3. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$|\vec{b}|=1$，若 $|\vec{a}-2\vec{b}|=2|\vec{a}+\vec{b}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{}$　　B. $\frac{\pi}{}$　　C. $\frac{2\pi}{}$　　D. $\frac{5\pi}{}$

6 3 3 6

【答案】C

【解析】

【分析】由$|\vec{a}-2\vec{b}|=2|\vec{a}+\vec{b}|$，两边同时平方，利用向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的模和向量数量积的运算，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

【详解】向量$\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$|\vec{a}|=2$，设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，又$|\vec{b}|=1$，

由$|\vec{a}-2\vec{b}|=2|\vec{a}+\vec{b}|$，有$\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4\left(\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\right)$，

即$3\vec{a}^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则有$12+24\cos\theta=0$，得$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，

则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

故选：C.

4. 已知$\sin\alpha+\sin\beta=m$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$，且$\alpha-\beta$为第一象限角，则$\cos\alpha-\cos\beta=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $3m$　　D. $\frac{m}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】首先利用和差化积公式化简，再利用二倍角的正切公式，建立方程，即可求解.

【详解】$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=m$，

设$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=x$，

则$-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{x}{m}$，因为$\alpha-\beta$为第一象限角，所以$\frac{\alpha-\beta}{2}$是第一或第三象限角，

所以$\frac{x}{m}<0$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\frac{-2x}{m}}{1-\frac{x^2}{m^2}}=\frac{3}{4}$$，设$\frac{x}{m}=t<0$，

整理为$3t^2-8t-3=0$，得$t=3$（舍）或$t=-\frac{1}{3}$，

则$\frac{x}{m}=-\frac{1}{3}$，$x=-\frac{m}{3}$，所以$\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{m}{3}$.

故选：B

5. 已知点A，B是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$上不关于长轴对称的两点，且A，$B$两点到点$M(m,0)$的距离相等，