



貴陽學院

# 本科毕业论文

题目： 矩阵的特征值与特征向量的应用

院系： \_\_\_\_\_

专业： \_\_\_\_\_

姓名： \_\_\_\_\_

学号： \_\_\_\_\_

指导教师： \_\_\_\_\_

教师职称： \_\_\_\_\_

填写日期： 2021年 5月 日



# 贵阳学院

## 本科毕业论文诚信承诺书

1.本人承诺：所呈交的毕业论文《矩阵的特征值与特征向量的应用》，是在认真学习理解学院《毕业论文撰写规范》后，保质保量独立完成的，没有弄虚作假，没有抄袭别人的内容；

2.毕业论文所使用的相关资料、数据、观点等均真实可靠，文中所有引用的他人观点、材料、数据、图表均已注释说明来源；

3.毕业论文中无抄袭、剽窃或不正当引用他人学术观点、思想和学术成果，伪造篡改数据的情况；

4.本人已被告知并清楚：学院对毕业论文中的抄袭、剽窃、弄虚作假等违法学术规范的行为将严肃处理，并可能导致毕业论文成绩不合格，无法正常毕业、取消学士学位资格或注销并追回已发放的毕业证书、学士学位证书等严重后果。

5.若在教育厅、学院等组织的毕业论文检查、评比中，被发现有抄袭、剽窃、弄虚作假等违反学术规范的行为，本人愿意接受学院按有关规定给予的处理，并承担相应责任。

学生（签字）：

年 月 日

## 摘要

矩阵的特征值与特征向量在工程计算、几何、生物、天体物理和微积分方程数值求解等需要进行大规模数值计算才能解决的问题中起着极其重要的作用。但在教学过程中矩阵课程比较困难和枯燥，为了提高学生的学习效果和主动性，本文对矩阵的特征值与特征向量的相关知识进行了介绍，并基于现实中的应用对矩阵的特征值与特征向量的应用进行了初步研究。

**关键词：**矩阵；特征值；特征向量

## **Abstract**

The eigenvalues and eigenvectors of the matrix play an extremely important role in the problems of engineering calculation, geometry, biology, astrophysics and calculus equations. However, the matrix course is relatively difficult and boring in the teaching process. In order to improve the learning effect and initiative of students, this paper introduces the relevant knowledge of the eigenvalues and feature vectors of the matrix, and conducts a preliminary study based on the real application.

**Key words:** matrix; eigenvalue; eigenvector

# 目 录

1 绪论 .....	6
1.1 研究背景 .....	1
1.2 研究目的和意义 .....	1
1.3 国内外研究现状 .....	1
1.4 研究方法 .....	2
1.5 主要研究内容 .....	3
2 矩阵特征值和特征向量的基本知识及解法 .....	3
2.1 特征值和特征向量的基本概念及相关性质 .....	3
2.1.1 特征值和特征向量的基本概念 .....	3
2.1.2 矩阵特征值和特征向量的相关性质 .....	4
2.2 抽象矩阵的定义及性质 .....	4
2.3.1 矩阵的逆 .....	4
2.3.2 矩阵的合同关系 .....	5
2.4 特征值和特征向量的解法 .....	5
2.4.1 性质法 .....	5
2.4.2 QR 分解法 .....	5
2.4.3 互逆变化法 .....	6
3 应用及教学研究 .....	6
3.1 矩阵的特征值与特征向量在排名预测中的应用 .....	6
3.2 矩阵的特征值与特征向量在区域发展与污染管理中的应用 .....	9
3.3 矩阵的特征值与特征向量在企业生产调度中的应用 .....	11
4 矩阵的特征值与特征向量的应用教学研究 .....	12
结论 .....	13
参考文献 .....	14

# 1 绪论

## 1.1 研究背景

数学原理在我们日常生活之中随处可见，有些很容易被察觉，有些则比较困难，矩阵理论正是其中比较难的一员。为了研究矩阵理论在生活中的应用，我们首先需要对矩阵特征值和矩阵特征向量进行研究。通过对特征值与特征向量的分析、理论研究以及对其实际应用的深入研究，不但使得我们可以大幅度地提升我们对高等代数中矩阵相关理论内容的基本掌握和应用水平，还使得我们可以充分运用矩阵相关的理论和实践来帮助我们研究和解决各种实际的问题。它不仅在传统数学研究方面一直是主要的探究问题对象，而且在反问题等实际的研究和运用都非常可能被我们看作是对矩阵的特征值和矩阵特征向量的基础性问题，有着非常广泛的分析研究和实际应用。

## 1.2 研究目的和意义

矩阵的特征值与特征向量在工程计算、几何、生物、天体物理和微积分方程数值求解等需要进行大规模数值计算才能解决的问题中起着极其重要的作用。矩阵的特征向量也对应着某种物理意义，例如，实对称矩阵的拟特征值刚好与曲面的主法曲率成比例具有几何意义和理论应用价值。特征值的一般求解方法是初等变换法，特征方程法，幂法，本文将介绍特征值的三种解法，分别是性质法、QR分解法、互逆变换法，解法将被运用在特征值与特征向量的应用上。

## 1.3 国内外研究现状

贺加来（2018）<sup>①</sup>，覃姜色（2020）和赵新暖（2020）<sup>②</sup>通过研究特征值和特征向量的概念，认为矩阵特征值和特征向量的计算在线性代数中占据重要地位，从研究利用互逆变换器求解对称矩阵的特征值和特征向量问题入手，研究了矩阵特征值与其特征向量关系的理论与应用，并逐步探讨特征值与特征向量之间的关系，以由此得到一系列性质、定理和推论，以及互逆变化法在求特征值与特征向量中的一些应用。刘红梅（2019）<sup>③</sup>，张亚（2018）<sup>④</sup>和邓亮章（2019）<sup>⑤</sup>在分析矩阵的基本定义、性质以及寻找特征向量和特征向量的基础上，对矩阵的特征、抽象矩阵和反矩阵问题进行了分析和概括，并基于特征的概念和特征以及特征向量分析了矩阵的缺陷，以及特征值和特征值在若干领域的应用。结合基

---

### 注释:

- ① 贺加来. 矩阵A的特征值与特征向量的关系理论研究及应用[J]. 巢湖学院学报, 2018.
- ② 覃姜色, 赵新暖. 互逆变化法在求特征值与特征向量中的应用[J]. 科技创新与应用, 2020.
- ③ 刘红梅. 基于矩阵特征值与特征向量的应用研究[J]. 许昌学院学报, 2019, 38(02):6-9.
- ④ 张亚. 矩阵的特征值与特征向量及其应用[J]. 科技经济导刊, 2018, v. 26; No. 637(11):85-90.
- ⑤ 邓亮章. 矩阵特征值反问题的若干进展[J]. 计算机产品与流通, 2019, 000 (010):P. 176-176.

于主成分分析的方法，扩大了矩阵特征值和特征向量的应用范围，并在此基础上对矩阵特征的反问题进行了初步研究，其结果具有一定的理论和应用价值，有利于运用数学思维解决实际问题。朱凤娟（2020）<sup>⑥</sup>冯福存（2020）和常莉红（2020）<sup>⑦</sup>综述了幂等矩阵的简单性质，讨论了此类矩阵与实际对称矩阵的关系。论证了度等矩阵特征的值范围及其等价条件，矩阵的匹配及其伴随值特征和特征向量矩阵，以及决策矩阵的对角线化，判定矩阵的合同关系和判定实二次型的正定性等问题进行系统地分析与归纳，为幂等矩阵的性质及其推广起到了重要作用。李林阳（2019）<sup>⑧</sup>对特征值与特征向量在多元统计分析方法中的应用进行了研究，多元统计分析是研究多个随机变量之间相互关系和规律的统计学分支，在统计学中具有重要的地位。他认为特征值和特征向量是矩阵论中研究的重要问题之一，具有良好的应用性质，在其他领域也有广泛的应用。最后总结了特征值和特征向量在主成分分析等多元统计分析方法中的应用。

周琴（2019）<sup>⑨</sup>和王小春（2019）<sup>⑩</sup>研究了线性代数中向量本身和向量本身的思想。据研究，矩阵的值本身和向量本身是矩阵理论中的重要元素。实际问题是在实际应用中可以解决很多问题。同时，通过对圆形游戏的评分和预测分析，利用MATLAB软件实现了仪表计数器的具体应用和计数器的快速解析，-并通过具体应用工程技术和科学研究领域的具体特点和因素。通过介绍应用实例，学生可以更直观地了解自己的价值观和向量的实质。从数字互联的非司法线性方法开始，实现自我价值和向量，结合样本刺激学生学习，在分析过程中加深对自我价值概念和向量的理解。

国外近些年对矩阵特征值和特征向量应用的研究多集中在矩阵特征值反问题的应用研究方面。Bai讨论了哈密顿系统、反哈密顿系统和广义哈密顿系统的特征值逆问题，得出通解的显式表示和通解的可解条件。Qian和Tan基于矩阵的谱分解理论，对特征值反问题求取简单参数解，再利用简单参数解对特征值配置和最佳逼近问题进行求解。Gigola, Lebtahi和Thome研究了厄米特矩阵的特征值反问题，得到了厄米特矩阵的特征值反问题的一般解，并对自反矩阵的特征值和最优逼近问题进行了研究。

## 1.4 研究方法

矩阵不仅是线性代数的一个分支，同时也在许多相关学科领域承担相当重要的工具作

---

### 注释:

⑥ 朱凤娟. 特征值与特征向量在线性代数中的应用[J]. 大连民族大学学报, 2020(3):240-242.

⑦ 冯福存, 常莉红. 幂等矩阵的性质及其推广[J]. 大学数学, 2020(1):90-94.

⑧ 李林阳. 特征值与特征向量在多元统计分析方法中的应用[J]. 数码世界, 2019, No. 163(05):62-62.

⑨ 周琴. 矩阵特征值和特征向量在实际中的应用及其实现[J]. 高师理科学刊, 2019(7):8-10.

⑩ 王小春. 特征值与特征向量的教学研究[J]. 高师理科学刊, 2019, 039(012):66-69.

用。在线性代数的研究过程中，矩阵理论也属于是极有魅力的一部分。在现实世界之很多问题都可以用矩阵来解决。在矩阵理论研究领域的某些方面的研究中，常常可以将性质不完全相同的，甚至是表面上完全不同问题转化成完全相同的矩阵问题来处理，因而这就使得矩阵理论成为线性代数领域内一个极富价值且应用广泛的研究对象。

在判断矩阵关系上，前人主要利用特征值研究矩阵合同关系，采用的是特征方程法去求矩阵的特征值，然后根据特征值判定两个矩阵是否合同；而本文将研究矩阵的合同关系，并分别采用QR分解法、互逆变化法去求矩阵特征值，然后根据特征值判定两个抽象矩阵是否合同，对两种方法分别进行细致分析，为研究提供多元化的思考方式。前人针对反问题的研究多数是在已知矩阵A的特征值与特征向量的条件下，利用定义法或者对角化法求矩阵A；同时针对矩阵合同关系与矩阵是否相似的研究，给出详细的概念；研究特征值与特征向量在日常生活中的相关应用，包括在经济发展和污染管控中的应用和在元宇宙概念领域的应用。利用所学知识进行细致分析，对这些问题可以起到深化的作用。

## 1.5 主要研究内容

本文对矩阵的特征值与特征向量相关基础进行了简单介绍，并对特征值与特征向量的具体应用进行了重点研究。论文共分为六个部分，具体内容如下：

第1章简要介绍了研究背景和目的、研究方法和主要内容，并介绍了目前国内的研究现状。

第2章主要介绍了特征向量的特征值、定义和性质，包括矩阵的特征向量和特征向量，逆矩阵和矩阵契约关系。

第3章简要介绍了不同的特征和矢量特征的确定方法。

第4章介绍了在现实生活中运用特征值和特征向量的基础研究。

第5章主要研究应用研究在实际教学活动中对学生产生的影响。

## 2 矩阵特征值和特征向量的基本知识及解法

### 2.1 特征值和特征向量的基本概念及相关性质

#### 2.1.1 特征值和特征向量的基本概念

当矩阵A是 $n \times n$ 方阵时可以计算矩阵A的特征值，特征值可以为实数，也可以是复数。在 $n$ 阶矩不为0的 $n$ 阶矩阵A的情况下，如果存在 $A\alpha = \lambda\alpha$ 且 $\alpha \neq 0$ ， $\lambda$ 是矩阵A的特征值， $n$ 维非零列向量 $\alpha$ 是矩阵A的特征向量。另一角度看，矩阵A存在特征值 $\lambda$ 及对应特征向量 $\alpha$ ，则 $\alpha$ 必定是非零向量，且对任意非零常数 $k$ ， $k \neq 0$ ，存在 $k\alpha$ ，此时 $k\alpha$ 也为特征值 $\lambda$ 的特征向量；若 $\alpha_1$ ， $\alpha_2$ 都是矩阵A的特征值 $\lambda$ 所对应的特征向量，且存在 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$ ，则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 也是

特征值 $\lambda$ 的特征向量；若 $\lambda_1, \lambda_2$ 是矩阵A的两个不同特征值， $\alpha_1, \alpha_2$ 分别是 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 必不是A的特征向量。

若n阶矩阵A的特征值为 $\lambda$ ，其对应的特征向量为非零向量 $\alpha$ ，则 $k\lambda, \alpha\lambda + b, \lambda \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$ ， $f(\lambda)$ 是 $kA, \alpha A + bI, AA', A^{-1}, A^{-1}A, f(A)$ 的特征值；非零向量 $\alpha$ 是 $kA, \alpha A + bI, AA', A^{-1}A, f(A)$ 对应于 $k\lambda, \alpha\lambda + b, \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$ 特征值的特征向量。

### 2.1.2 矩阵特征值和特征向量的相关性质

性质1：若特征值 $\lambda_i$ 存在对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2$ ，则特征值 $\lambda_i$ 非零时，特征值 $\lambda_i$ 存在特征向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 。

性质2：矩阵主对角线元素之和等于特征值的和，矩阵行列式的值等于特征值的乘积。

性质3：n阶矩阵A和其转置矩阵 $A^T$ 必然有相同的特征值。

性质4：n阶矩阵A的特征值均不为0，则矩阵A可逆。

性质5：若矩阵A存在特征值 $\lambda$ ，则必有 $A^k$ 的特征值 $\lambda^k$ 存在，此时k为任意正整数。

## 2.2 抽象矩阵的定义及性质

抽象矩阵一般是矩阵中的一些特殊的矩阵，通常只给出矩阵具有哪些性质而不给出矩阵的具体元。抽象矩阵的性质如下：

性质1：若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 都是矩阵M属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的线性组合 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2$ 仍然是 $\lambda$ 的特征向量。

性质2： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是M的不同特征值，其相应特征向量为： $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关。

性质3：若 $M = (m_{ij})_{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$ ，且 $|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| = |M|$ 。性质4：M可逆矩阵的特征值全不为零。

性质5：M为n阶实对称矩阵， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是M的不同特征值，则 $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，M正定； $\lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，M负定。

性质6：M为n阶方阵， $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )是M的不同特征值，则M可逆的充要条件是 $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。

性质7： $\lambda$ 不为方阵M的特征值的充要条件是 $|\lambda E - M| \neq 0$ 。

性质8：设n阶方阵M的n个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为相应特征向量，记 $P = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$

### 2.3 矩阵的逆及合同关系

#### 2.3.1 矩阵的逆

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/335303323331011240>