纲索（柔索）形状和张力

纲索（柔索）是指只能承受张力的绝对柔软的线，即仅受抗拉性能，无抗压、抗弯、抗扭、抗剪等性能。

纲索研究的二类问题：一是已知作用在纲索上的力，求纲索的形状；二是已知纲索的形状，求作用在纲索上的力；

纲索研究的三类条件：

（1）已知纲索上的载荷分布规律，求纲索的形状和张力；

（2）已知纲索的形状，求纲索上的载荷和张力的分布与大小；

（3）已知纲索的形状以及载荷的分布规律，确定纲索是否处于平衡状态。

第一节 纲索（柔索）的平衡微分方程式

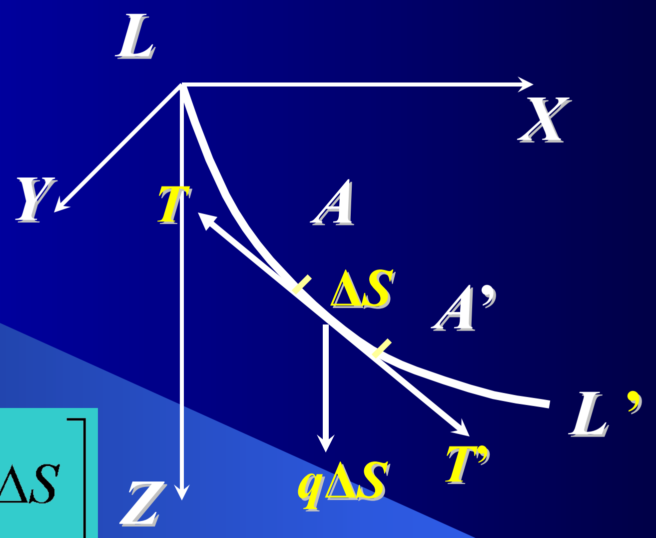
纲索所受的力有：纲索水动力、水中自重、装配在纲索上浮子浮力和沉子沉力及其水动力、与海底摩擦力，两端张力。

在纲索的分析研究中，常采用力学中的刚化原理，即当纲索在外力作用下处于平衡状态时，纲索具有一定的形状，故可将它看成刚体来进行分析。如当处于加速运动时，就要应用动力学方法来处理。

1. 直角坐标系下的纲索平衡方程式

设张力T与X、Y、Z轴的夹角分别为α、β、γ，则

T T'在X、Y和Z方向上的分别为



$$T=\begin{bmatrix}-T\cos\alpha\\-T\cos\beta\\-T\cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$T'=\begin{bmatrix}T\cos\alpha+\dfrac{\mathrm{d}(T\cos\alpha)}{\mathrm{d}s}\Delta S\\T\cos\beta+\dfrac{\mathrm{d}(T\cos\beta)}{\mathrm{d}s}\Delta S\\T\cos\gamma+\dfrac{\mathrm{d}(T\cos\gamma)}{\mathrm{d}s}\Delta S\end{bmatrix}$$

纲索平衡方程式

$\Delta S \to 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\alpha)}{\mathrm{d}s} + q_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\beta)}{\mathrm{d}s} + q_y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\gamma)}{\mathrm{d}s} + q_z = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}) + q_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}) + q_y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}) + q_z = 0 \end{cases}$$

矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{q} = 0$$

补充方程式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 或 $(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})^2 + (\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s})^2 = 1$

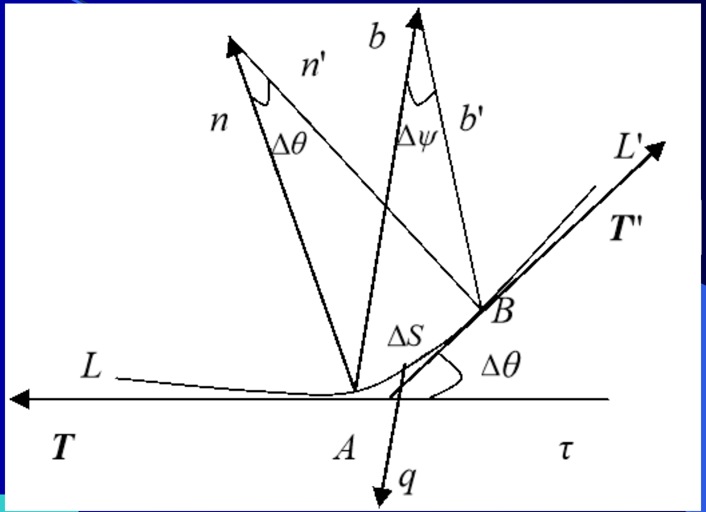
可以解出柔索上任一点的张力T和形状，当然还包括平面问题

2. 自然坐标系下的纲索平衡方程式

$$T'\cos\Delta\theta - T + q_\tau \Delta S = 0$$

$$T'\sin\Delta\theta + q_n \Delta S = 0$$

$$T'\sin\Delta\psi + q_b \Delta S = 0$$



$$T' = T + \Delta T$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + q_\tau = 0 \\ \dfrac{T}{\rho_1} + q_n = 0 \\ \dfrac{T}{\rho_2} + q_b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\rho_1 = \frac{ds}{d\theta},\quad \rho_2 = \frac{ds}{d\psi}} \begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + q_\tau = 0 \\ T\dfrac{d\theta}{ds} + q_n = 0 \\ T\dfrac{d\psi}{ds} + q_b = 0 \end{cases}$$

第二节　作用在纲索的水动力

纲索自重、浮子浮力、沉子沉力——与运动无关；
纲索或其他渔具构件的水动力——与运动相关

作用于单位长度纲索上的水动力：

（1）X方向水阻力：

$$R_x = C_x \frac{\rho V^2}{2} d$$

（2）Y方向水动力：

$$R_y = C_y \frac{\rho V^2}{2} d$$

（3）Z方向水动力：

$$R_z = C_z \frac{\rho V^2}{2} d$$

$$\begin{cases} C_x = C_x(\mathrm{Re},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \\ C_y = C_y(\mathrm{Re},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \\ C_z = C_z(\mathrm{Re},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \end{cases}$$

三个方向的阻力系数分别与雷诺数、冲角有关。但在自动模型区，系数仅与冲角有关。

也可用自然坐标表示。

作用于单位长度纲索上的外负荷：

（1）法向水动力：$R_n = C_n \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 d$

（2）切向水动力：$R_\tau = C_\tau \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 d$

（3）侧向水动力：$R_b = C_b \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 d$

上式中C_τ一般在0.02～ 0.04之间，$C_n = C_{n90}\sin^2\alpha$

而C_{n90}在1.1～ 1.4之间，$C_b = 2\pi f \sin\alpha\cos\alpha\tan\theta$

θ为捻回角，$f = 0.4 - 0.3\cos^2\alpha$

设在纲索上某点处的切线与X、Y、Z轴的夹角分别为α、β 和γ，则可以推得上述外力的方向余弦分别为：

$$
\begin{array}{llll}
R_n(\sin\alpha & -\cos\alpha\cos\beta/\sin\alpha & -\cos\alpha\cos\gamma/\sin\alpha) \\
R_\tau(\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma &) \\
R_b(0 & \cos\gamma/\sin\alpha & -\cos\beta/\sin\alpha)
\end{array}
$$

则作用于单位长度纲索上的水阻力及纲索自重在XYZ方向上的投影为：

$$
\begin{aligned}
R_x &= R_\tau\cos\alpha + R_n\cdot\sin\alpha \\
R_y &= R_\tau\cos\beta - R_n\cdot\cos\alpha\cos\beta/\sin\alpha + R_b\cos\gamma/\sin\alpha \\
R_z &= R_\tau\cos\gamma - R_n\cos\alpha\cos\gamma/\sin\alpha - R_b\cos\beta/\sin\alpha + W
\end{aligned}
$$

式中　W——单位长度纲索在水中的重量

第三节　纲索形状和张力计算的空间问题

主要解决纲索的平衡微分方程式

当作用在纲索上的力仅为纲索水动力和自重：

$$\begin{cases} q_x = R_x \\ q_y = R_y \\ q_z = R_z + p \end{cases}$$

式中p为纲索在水中单位长度的自重

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\alpha)}{\mathrm{d}s} + R_x = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\cos\alpha - T\sin\alpha\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + R_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\beta)}{\mathrm{d}s} + R_y = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\cos\beta - T\sin\beta\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} + R_y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\gamma)}{\mathrm{d}s} + R_z = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\cos\gamma - T\sin\gamma\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} + R_z + p = 0 \end{cases}$$

上式 $\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$

经过推导，纲索形状和张力微分方程组为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos\beta \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \cos\gamma \\
\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -\left[R_x\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} + R_y\cos\beta + (R_z+p)\cos\gamma\right] \\
\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \left\{R_y - \cos\beta\left[R_x\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} + R_y\cos\beta + (R_z+p)\cos\gamma\right]\right\}\dfrac{1}{T\sin\beta} \\
\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = \left\{R_z + p - \cos\gamma\left[R_x\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} + R_y\cos\beta + (R_z+p)\cos\gamma\right]\right\}\dfrac{1}{T\sin\gamma}
\end{cases}
$$

开始

输入参数值(包括阻力系数和纲索初始值)

计算初始点的初始值（自然坐标和直角坐标的水动力）

差分取微段 $i=0, Num=s/\Delta s$

用常微分方程数值解法求解上述方程

$$\gamma = \arccos\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\alpha}$$

$i \geq Num?$

No

$i=i+1$

差分格式计算

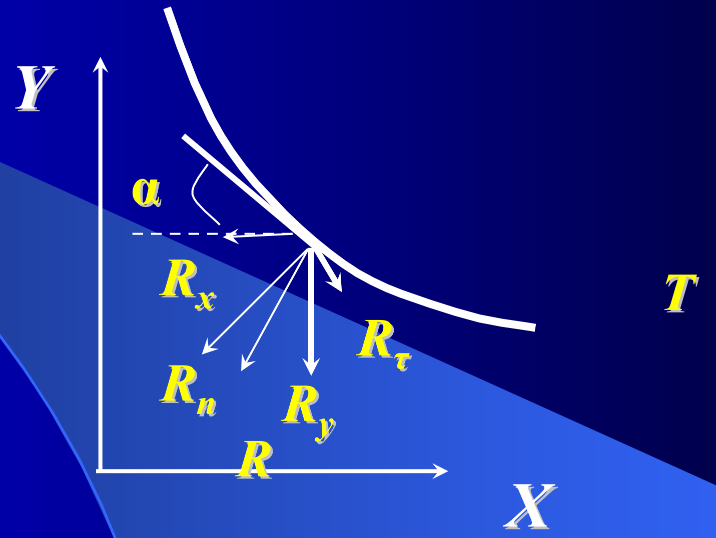
Yes

结束

第四节　纲索形状和张力计算的平面问题

主要解决纲索的平衡微分方程式在平面时的解析解问题

$$\begin{cases} C_\tau = C_x \cos\alpha - C_y \sin\alpha \\ C_n = C_x \sin\alpha + C_y \cos\alpha \end{cases}$$



一、水动摩擦阻力为常量

$$R_\tau = C_\tau \frac{\rho V^2}{2} d$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\alpha)}{\mathrm{d}S} + C_\tau \cdot K\cos\alpha + C_n \cdot K\sin^3\alpha = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\sin\alpha)}{\mathrm{d}S} + C_\tau \cdot K\sin\alpha - C_n \cdot K\sin^2\alpha\cos\alpha + p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S} + K_\tau + p\sin\alpha = 0 \\ T\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} - K_n\sin^2\alpha + p\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow T = T_B - K_\tau s - ph$$

$$T = C\cdot\exp\left[r\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+b}{\tan\frac{\alpha}{2}-b}\right)^m\cdot\left(\frac{\cos\alpha+a+n}{\cos\alpha+a-n}\right)^{\frac{a}{n}}$$

$$m = \frac{K_\tau(b^2+1)}{4b\cdot K_n\cdot n}$$

$$r = \frac{K_\tau(0.5p - K_n - nK_n)}{K_n\cdot n\cdot u\cdot p}$$

$$S = \int_{\alpha_B}^{\alpha}\frac{T(\alpha)}{K_n\sin^2\alpha - p\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$h = \frac{T_B - T - K_\tau s}{p}$$

式中 T　　T_B　　S

H　　α　　α_B

C

$$a = \frac{P}{2K_n} \qquad K_n = C_n \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 d \qquad b = \sqrt{\frac{n-1}{a}} \qquad n = \sqrt{1+a^2} \qquad u = \sqrt{\frac{n+1}{a}}$$

$$K_\tau = C_\tau \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 d$$

1、理论计算：已知长度s，速度v，阻力系数，上端点的受力大小和方向，求下端点的力大小和方向及纲索的水深。

2、设计计算：已知水深（鱼群位置）h，下端点受力和速度，同样求出长度和上端点受力。

求解方法

- 应用初步条件，解决初值
- 求出积分常数C
- 以角度为变量，利用积分式进行数值积分计算，求出s，并以它或h为参考值，应用收敛方法判别计算
- 编程计算（FORTRAN）

二、水动摩擦阻力是冲角函数

$$R_{\tau} = C_{\tau} \frac{\rho V^2}{2} d \cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(T\cos\alpha)}{\mathrm{d}S} + C_\tau \cdot K\cos^3\alpha + C_n \cdot K\sin^3\alpha = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(T\sin\alpha)}{\mathrm{d}S} + C_\tau \cdot K\sin\alpha\cos^2\alpha - C_n \cdot K\sin^2\alpha\cos\alpha + p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S} + K_\tau\cos^2\alpha + p\sin\alpha = 0 \\ T\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} - K_n\sin^2\alpha + p\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

其他参数假设同上

$$T = A\cdot\exp\left\{\frac{K_\tau}{K_n}\left[\alpha - r\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}\cdot\left(\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+b}{\tan\frac{\alpha}{2}-b}\right)^m\cdot\left(\frac{\cos\alpha+a+n}{\cos\alpha+a-n}\right)^{\frac{a}{n}}$$

$$m = \frac{aK_\tau\left(1-b^2\right)^2\left(u^2-1\right)}{8b\cdot K_n\cdot n}$$

$$r = \frac{a\left(1+u^2\right)^2\left(1+b^2\right)}{4\cdot n\cdot u}$$

$$S=\int_{\alpha_B}^{\alpha}\frac{A\cdot\exp\left\{\frac{K_\tau}{K_n}\left[\alpha-r\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}\cdot\left(\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+b}{\tan\frac{\alpha}{2}-b}\right)^{m}\cdot\left(\frac{\cos\alpha+a+n}{\cos\alpha+a-n}\right)^{\frac{a}{n}}}{K_n\sin^2\alpha-p\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

- 应用初步条件，解决初值
- 求出积分常数A
- 以角度为变量，利用积分式进行数值积分计算，求出s，并以它或h为参考值，应用收敛方法判别计算
- 编程计算（FORTRAN）

三、水动摩擦阻力是零

$$R_\tau = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S} + p\sin\alpha = 0 \\ T\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} - K_n\sin^2\alpha + p\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{p}{K_n}\int \frac{\mathrm{d}(\cos\alpha)}{\left(1+\dfrac{p^2}{4K_n^2}\right) - \left(\cos\alpha + \dfrac{p}{2K_n}\right)^2}$$

按照积分形式 $\int \frac{d(\cos\alpha)}{\left(1+\frac{p^2}{4K_n^2}\right)-\left(\cos\alpha+\frac{p}{2K_n}\right)^2}$，分母中应区分为大于零、小于零的情况

$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}} < \left(\cos\alpha+\frac{p}{2K_n}\right)$$

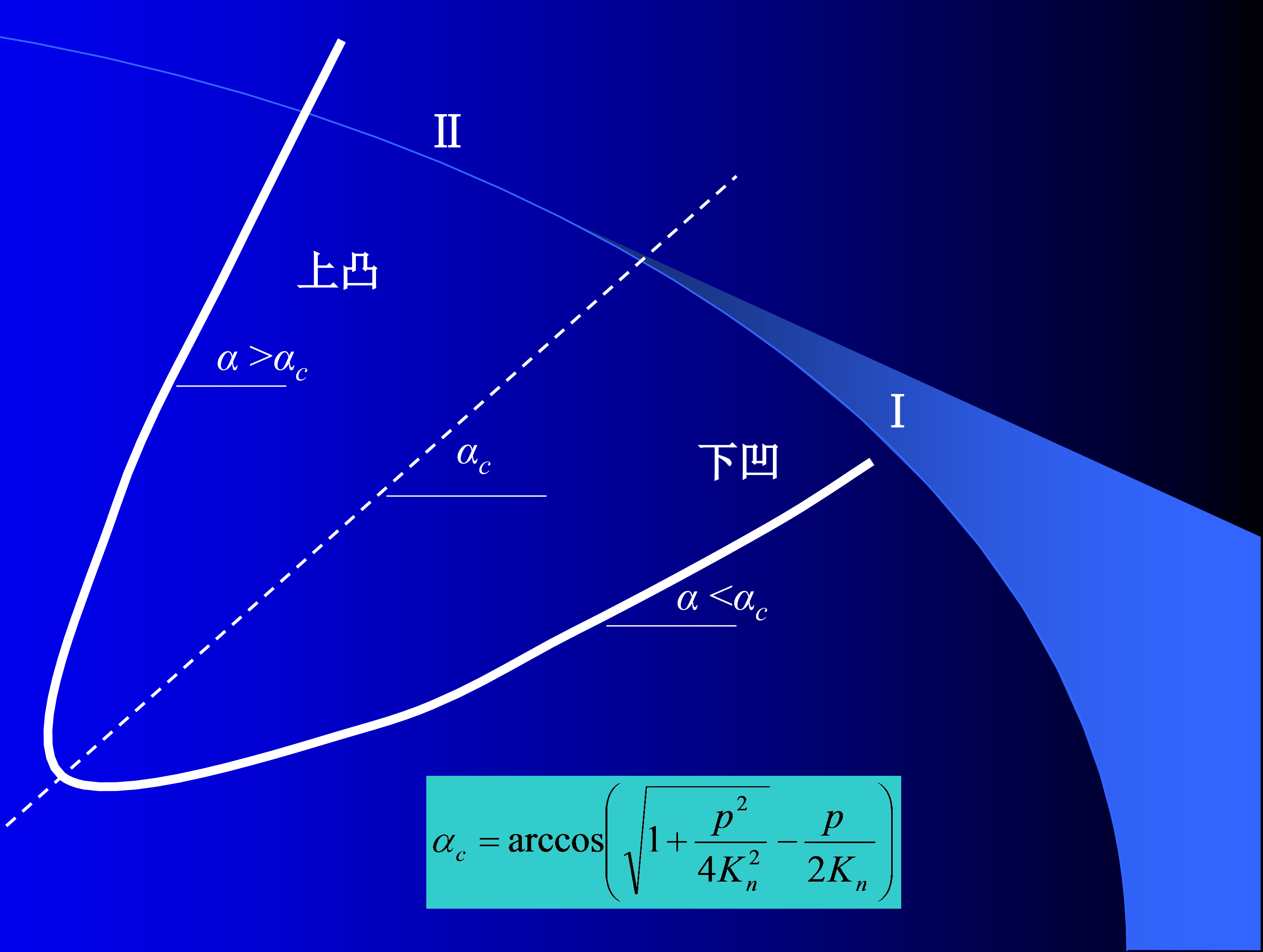
$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}} > \left(\cos\alpha+\frac{p}{2K_n}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}}-\frac{p}{2K_n} < \cos\alpha$$

$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}}-\frac{p}{2K_n} > \cos\alpha$$

设：临界角 α_c

$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}}-\frac{p}{2K_n} = \cos\alpha_c$$

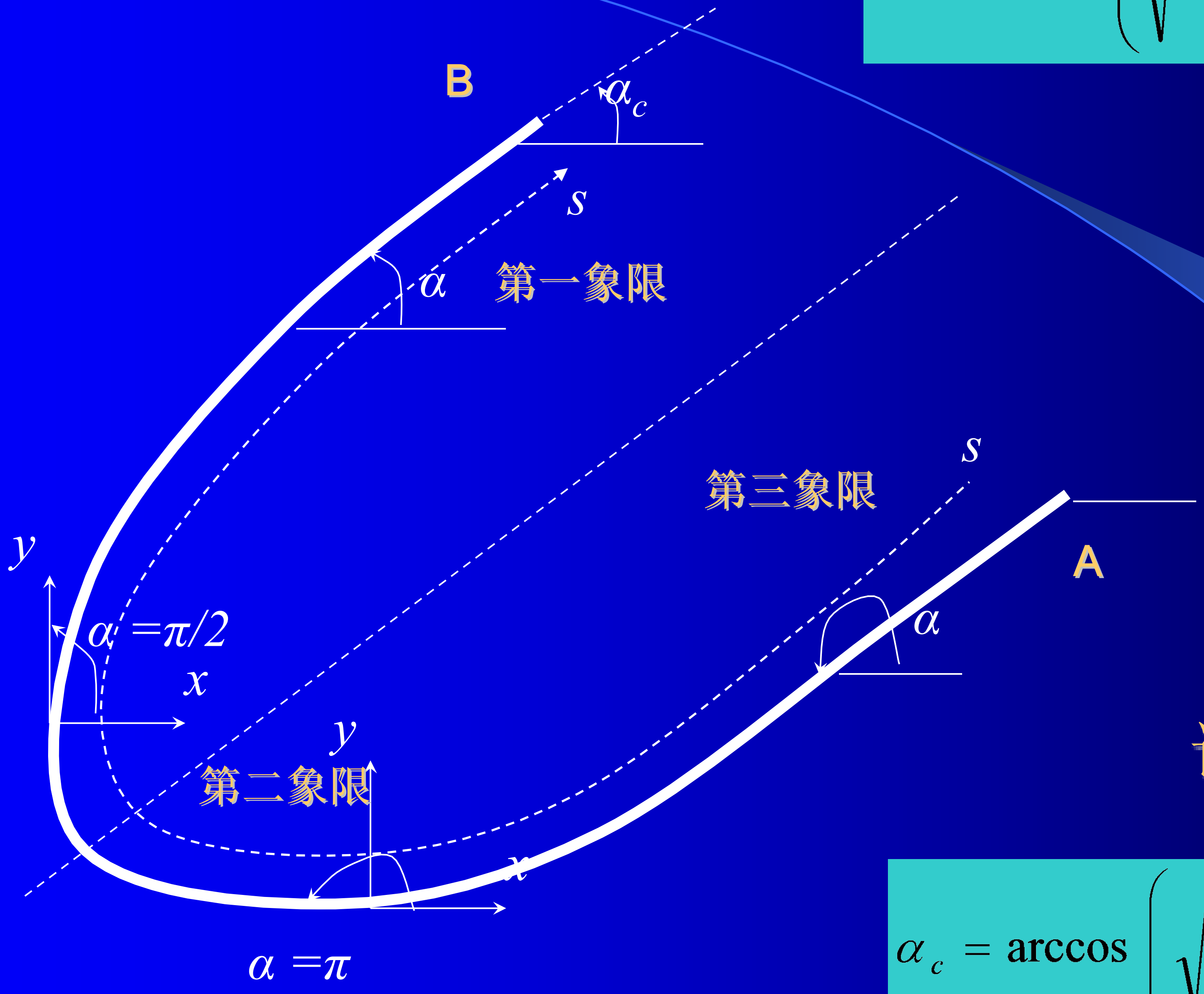


$$\alpha_c = \arccos\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}} - \frac{p}{2K_n}\right)$$

第五节　平面纲索形状和张力的三种情况

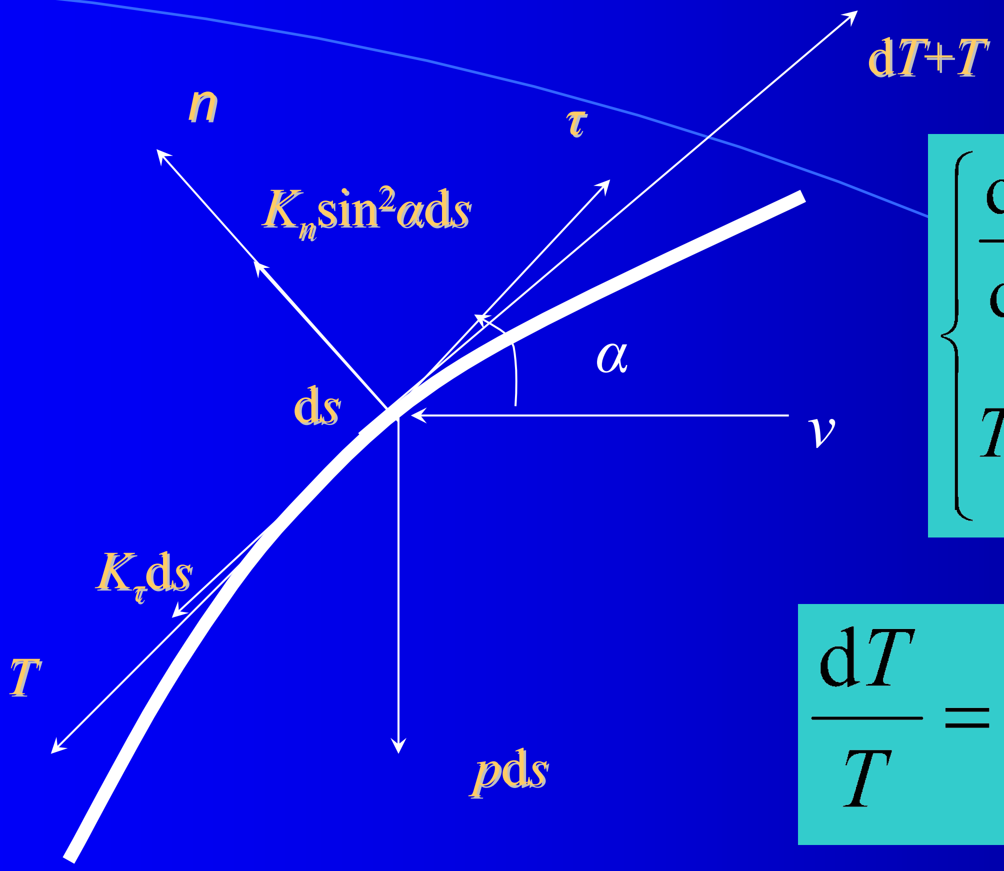
- 三种情况：$\alpha \le \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi, \alpha > \pi$
- 第一象限、第二象限和第三象限。
- 它们的条件分别为：自重较小（纲索的材料重度和水的接近）、作用在纲索上的水动力较大，即纲索与水的相对运动速度较大；渔具或渔船在用锚、桩或碇石等系泊或拖带时；船用钢丝索曳纲拖带渔具时，自重较大。
- 当然纲索的形状即可能一部分在第二象限、另一部分在第三象限。

$$\alpha_c = \arccos\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{4K_n^2}}-\frac{p}{2K_n}\right)$$



设 $w=\dfrac{p}{K_n}$

$$\alpha_c = \arccos\left(\sqrt{1+\left(\frac{w}{2}\right)^2}-\frac{w}{2}\right)$$



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S} - K_\tau - p\sin\alpha = 0 \\ T\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} + K_n\sin^2\alpha - p\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{K_\tau + p\sin\alpha}{p\cos\alpha - K_n\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

设：$f = \dfrac{K_\tau}{K_n}, w = \dfrac{p}{K_n}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$\frac{T}{T_0} = \exp\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\right)$$

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{T_0}{p\cos\alpha - K_n\sin^2\alpha}\, e^{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

$$x = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{T_0\cos\alpha}{p\cos\alpha - K_n\sin^2\alpha}\, e^{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

$$y = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{T_0\sin\alpha}{p\cos\alpha - K_n\sin^2\alpha}\, e^{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

- 参考点为P_0时，对于P点来说，设以下四个无是纲量

$$\tau = \frac{T}{T_0} = e^{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} d\alpha}$$

$$\sigma = \frac{K_n s}{T_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\tau}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} d\alpha$$

$$\xi = \frac{K_n x}{T_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\tau\cos\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} d\alpha \qquad (1)$$

$$\eta = \frac{K_n y}{T_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\tau\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} d\alpha$$

- 参考点为P_1时，对于P点来说，也有以下四个无是纲量

$$
\begin{cases}
\tau' = \dfrac{T}{T_1} = e^{\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{f + w\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} \mathrm{d}\alpha} \\
\sigma' = \dfrac{K_n s_1}{T_1} = \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\tau}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} \mathrm{d}\alpha \\
\xi' = \dfrac{K_n x_1}{T_1} = \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\tau\cos\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} \mathrm{d}\alpha \\
\eta' = \dfrac{K_n y_1}{T_1} = \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\tau\sin\alpha}{w\cos\alpha - \sin^2\alpha} \mathrm{d}\alpha
\end{cases}
\qquad (2)
$$

- 参考点为P_0时，对于P_1点来说，有以下四个无是纲量

$$
\begin{cases}
\tau_1 = \dfrac{T_1}{T_0} \\
\sigma_1 = \dfrac{K_n(s - s_1)}{T_0} \\
\xi_1 = \dfrac{K_n(x - x_1)}{T_0} \\
\eta_1 = \dfrac{K_n(y - y_1)}{T_0}
\end{cases} \quad (3)
$$

$$
\begin{cases}
\tau' = \dfrac{T}{T_1} = \dfrac{\tau}{\tau_1} \\
\sigma' = \dfrac{K_n s_1}{T_1} = \dfrac{\sigma - \sigma_1}{\tau_1} \\
\xi' = \dfrac{K_n x_1}{T_1} = \dfrac{\xi - \xi_1}{\tau_1} \\
\eta' = \dfrac{K_n y_1}{T_1} = \dfrac{\eta - \eta_1}{\tau_1}
\end{cases} \quad (4)
$$

- 对于第二象限和第三象限，只要选择参考点，同样可分别取得四个无因次量：τ、σ、 ξ、η。但选择参考点不同，并且积分中分母的大于0、小于0的区分不同，因而有些约定：
- 对于第一象限，一般参考点为$\alpha=\pi/2$；对于第三象限，参考点可取$\alpha=\pi$；对于第二象限，则参考点按以上两个均可以，但在计算时必须以统一的一个参考点为标准。
- 对以上的四个无因次量进行计算时，可以用计算机数值积分计算，也可以按照美国学者波特制成的计算表（Pode Table）进行。

波特表计算的步骤：

- 1、计算K_n、K_τ、p、f、w，求得α_c；
- 2、判别象限和f；
- 3、确立P_1或P_0点、h、s，参考点π/2 、 π ；
- 4、根据公式（4）和已知点情况，求出四个无因次量和另一点相对应的无因次量；
- 5、求出未知点情况。

例1-3介绍：

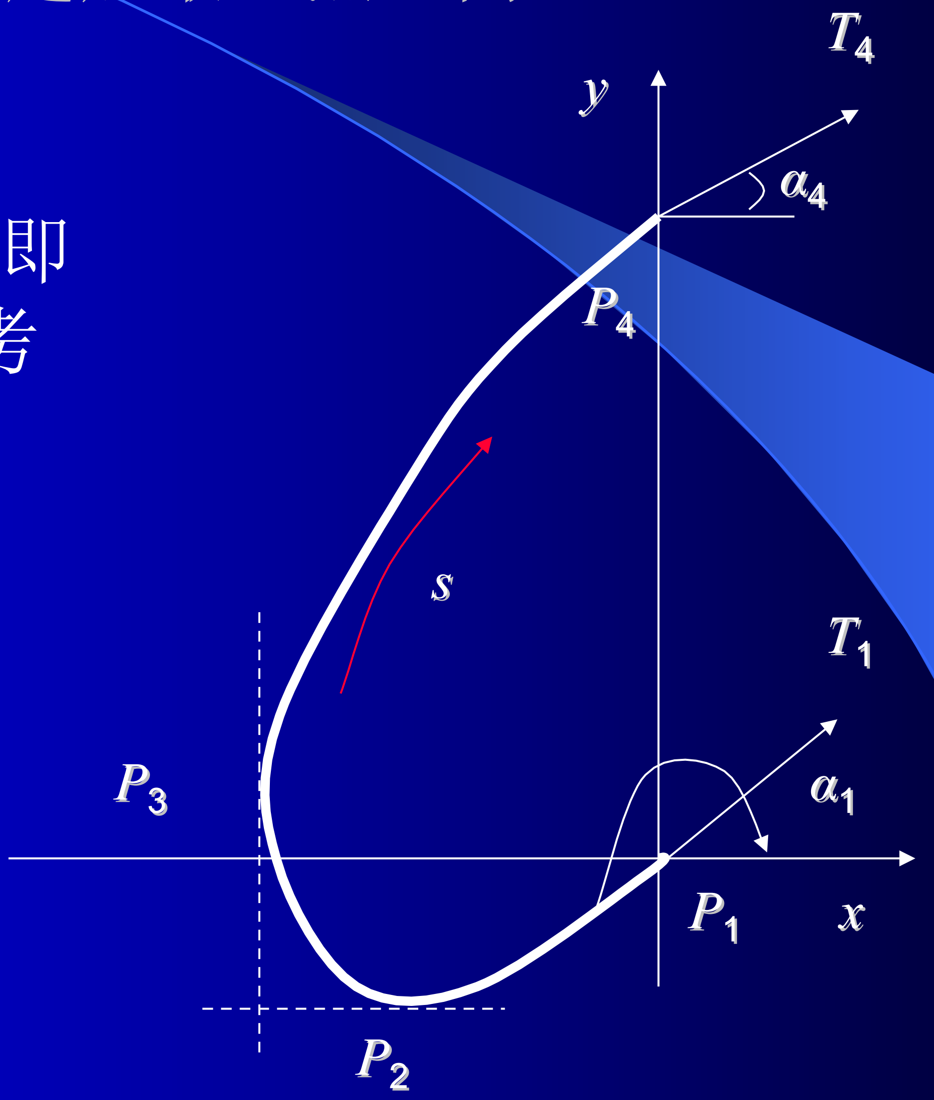
例4、两端固定在同一铅垂线上柔索S=86.36m，两端垂直间距30.48m，已知α_c=30º，f=0.025(需要内插)。求两固定端柔索的冲角及柔索冲起后最远点距离。

- 解：设坐标系

P_1和P_4点在同一铅垂线上，即$x_1=x_4$，则对于同一积分参考点$\alpha_0=\pi$，有 $\xi_1=\xi_4$。

$$\left.\begin{aligned} y_4 &= \frac{T_1}{K_n}\left(\frac{\eta_4-\eta_1}{\tau_1}\right) \\ s_4 &= \frac{T_1}{K_n}\left(\frac{\sigma_4-\sigma_1}{\tau_1}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\eta_4-\eta_1}{\sigma_4-\sigma_1}$$

$$=\frac{y_4}{s_4}=\frac{30.48}{86.36}=0.353$$



在表4中选若干组α_4、ξ_4、η_4、σ_4、τ_4。

在表2中选若干组使$\xi_1=\xi_4$的α_1、ξ_1、η_1、σ_1、τ_1。

计算出它们的 $\dfrac{\eta_4-\eta_1}{\sigma_4-\sigma_1}$，找出一组 $\dfrac{\eta_4-\eta_1}{\sigma_4-\sigma_1}=0.353$

α_4	σ_4	η_4	ξ_4	τ_4	α_1	σ_1	η_1	ξ_1	τ_1	$\dfrac{\eta_4-\eta_1}{\sigma_4-\sigma_1}$
32			2.3318		204.98			2.3318		0.4452
31.5			3.1958		207.47			3.1958		0.3894
31			4.0598		208.64			4.0598		0.3449
31.09	11.456	6.9701	3.9025	3.1452	208.43	-4.2067	1.4540	3.9025	1.5251	0.353

$$\frac{K_n y_4}{T_1}=\frac{\eta_4-\eta_1}{\tau_1}\Rightarrow\frac{T_1}{K_n\tau_1}=\frac{y_4}{\eta_4-\eta_1}=\frac{30.48}{6.9701-1.4540}=5.5256$$

P_2点，$\alpha_2=\pi$，则$\xi_2=\eta_2=\sigma_2$，　$\tau_2=1$。

P_3点，$\alpha_3=\pi/2$，则$\xi_3=-2.2445$，$\sigma_3=3.0658$，

$\eta_3=1.6061$，　$\tau_3=1.3871$。

$$x_2=\frac{\xi_2-\xi_1}{\tau_1}\frac{T_1}{K_n}=(0-3.9025)\times5.5256=-21.563(\mathrm{m})$$

$$y_2=\frac{\eta_2-\eta_1}{\tau_1}\frac{T_1}{K_n}=(0-1.4540)\times5.5256=-8.034(\mathrm{m})$$

$$x_3=\frac{\xi_3-\xi_1}{\tau_1}\frac{T_1}{K_n}=(-2.2445-3.9025)\times5.5256=-33.964(\mathrm{m})$$

$$y_3=\frac{\eta_3-\eta_1}{\tau_1}\frac{T_1}{K_n}=(1.6061-1.4540)\times5.5256=0.84(\mathrm{m})$$

第六节　平面纲索形状和张力的分段计算法

假想：一条柔性索阻力和自重不计，只考虑其端点重物的重力、阻力，则可将柔索在水中的形状看成一条直线段。

假设：

1、以折代曲，将曲线看作由若干条线段组成的折线；

2、视K_{τ}为常数；

3、把水动力和自重看成为作用于柔索端点；

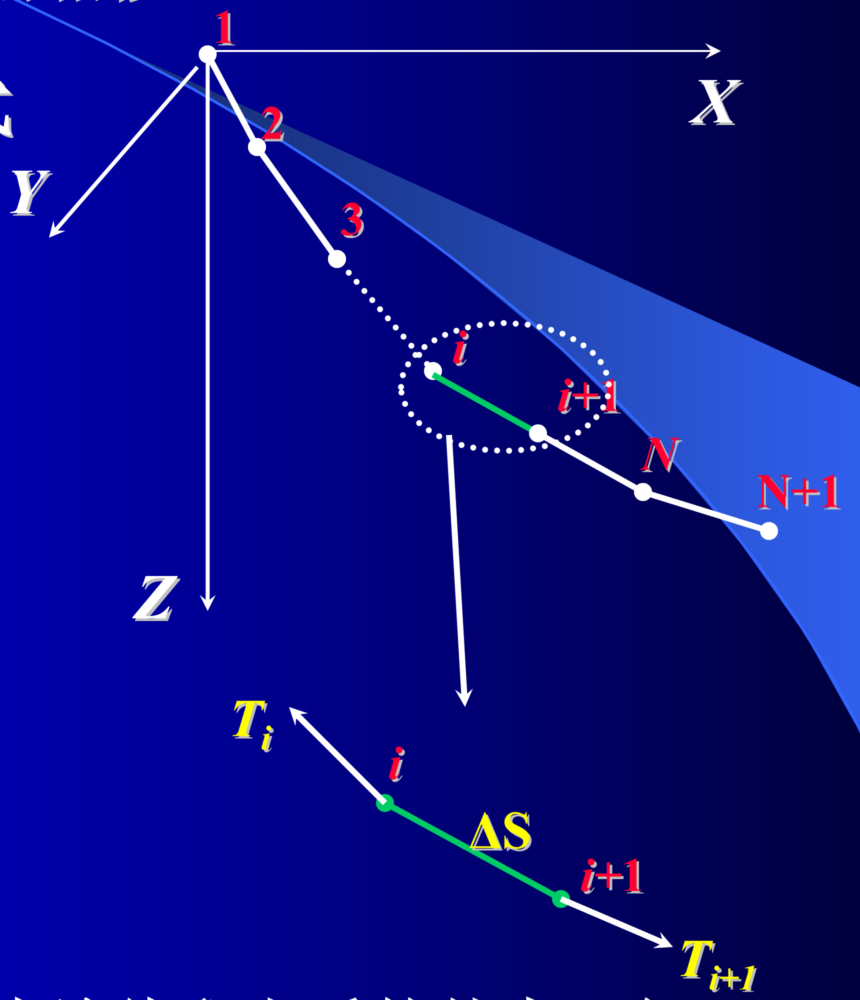
4、柔索每段的冲角由端点受力情况所决定。

根据以上假设，采用理论力学中刚化原理和静力平衡原理，对所分割的柔索小段逐段列出静力平衡式进行求解。

设纲索总长度为S，每段长度为ΔS，则总段数为：$N=\dfrac{S}{\Delta S}$

只要N取得足够大，就可以获得很好的相似。

故对于第 i 段来说，其平衡方程式可表示为：



$$\begin{cases} T_{(i+1)x}=T_{ix}-q_{ix}\cdot i \\ T_{(i+1)y}=T_{iy}-q_{iy}\cdot i \\ T_{(i+1)z}=T_{iz}-q_{iz}\cdot i \end{cases}$$

$$T_{(i+1)}=\sqrt{T^2{}_{(i+1)x}+T^2{}_{(i+1)y}+T^2{}_{(i+1)z}}$$

$$\cos\alpha_{i+1}=T_{(i+1)x}\big/T_{(i+1)}$$

$$\cos\beta_{i+1}=T_{(i+1)y}\big/T_{(i+1)}$$

$$\cos\gamma_{i+1}=T_{(i+1)z}\big/T_{(i+1)}$$

q为该线段上受的外力，包括水动力和重力等。

纲索的空间位置坐标可由下式求出：

$$x_{(i+1)} = x_i + \Delta S \cdot \cos\alpha_{(i+1)}$$

$$y_{(i+1)} = y_i + \Delta S \cdot \cos\beta_{(i+1)}$$

$$z_{(i+1)} = z_i + \Delta S \cdot \cos\gamma_{(i+1)}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

计算机程序流程图


开始
输入参数值
计算初始点的初始值
计算作用在各段上的外负荷值
J=J+1
计算下一线段的张力值
计算下一线段的方向余弦值
计算下一点的坐标值
J>=N+1?
No
Yes
是否符合边界条件？
Yes
No
结束
打印输出

以上方法也可根据具体象限情况进行受力分析计算。

例：上节例2

计算步骤：

1、合理分段：一般将柔索等分若干段，越细越好；

2、确定计算公式：柔索属何种工作状态？始端？

3、逐段计算：1）水动力计算；2）求末端张务

3）求末端冲角；3）求纵横垂直距离。

4、确定所求点张力、冲角、位置。

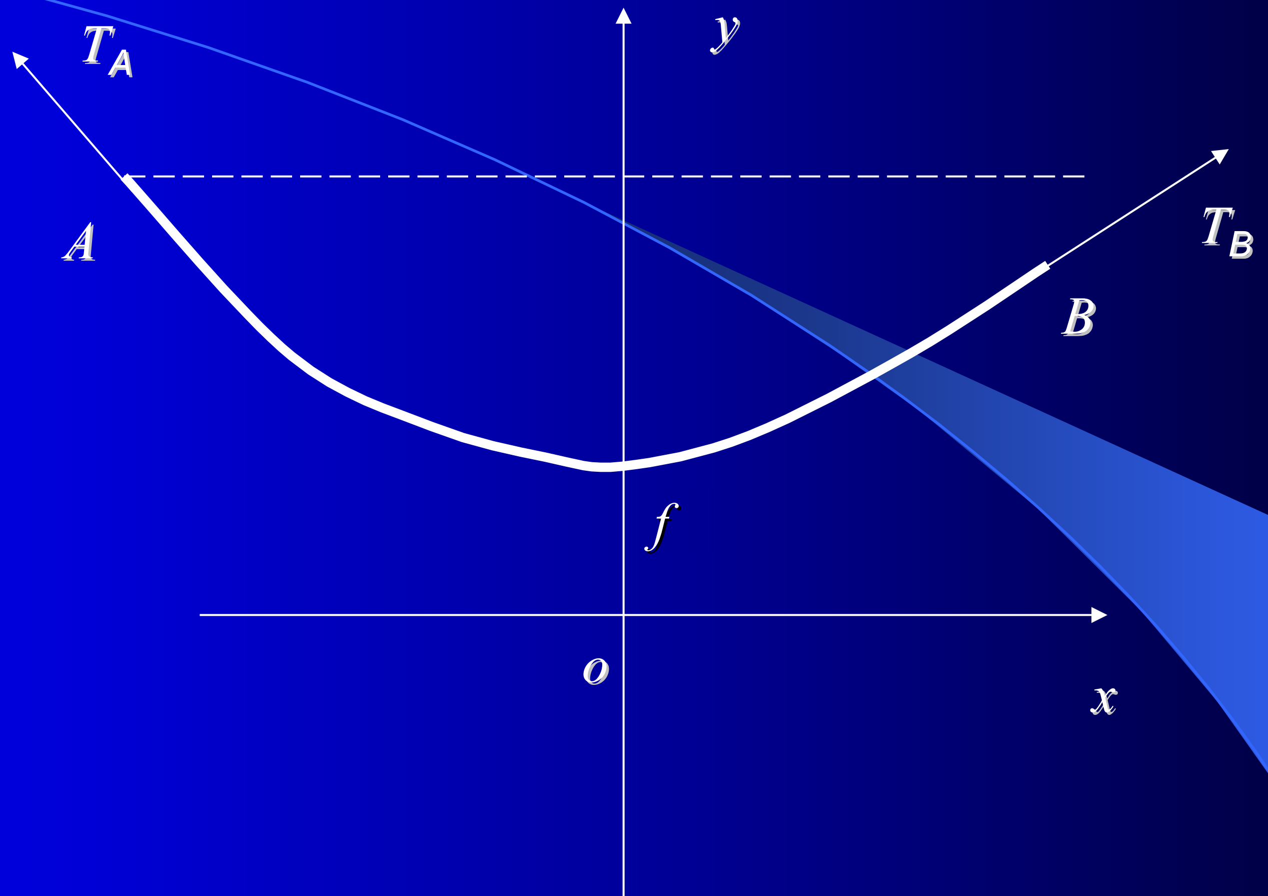
第七节　载荷沿索长均匀分布时纲索的形状和张力

应用工程中常用的方法来计算纲索形状和张力的问题。

渔具中作用在柔索上的力大致可分成两类：一类是和渔具运动无关的，如柔索在水中的自重、浮子的静浮力等；另一类是与渔具运动有关的，如水动力。由于柔索的自重在一般情况下是沿索长均匀分布的，故在静水或流速很小的情况下，水动力忽略不计，则可看成载荷沿索长分布。但是水动力是冲角的函数，如果把柔索上的水动力也看成常量，则水动力与自重的合力就为常量，则可以按载荷沿索长均布的问题处理，当然，这仅是一种近似方法。

3.7.1 绳索的曲线方程式

- 图所示为载荷沿索长均布时的柔索。图中A点坐标为（X_A，Y_A），张力为T_A；B点坐标为（X_B，Y_B），张力T_B。作用在AB单位长度上的载荷是q，方向沿Y轴，在平面问题中柔索平衡方程式的直角坐标表示法为：



$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + q_x = 0 \\ \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + q_y = 0 \end{cases}$$

这里：$q_x=0$，$q_y=q$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)-q=0$$

$$T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=A$$

$$T\cos\alpha=A$$

$$T\cos\alpha=T_0$$

$$T_0\cdot\frac{\mathrm{d}(\tan\alpha)}{\mathrm{d}s}=q$$

由于是$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\cdot\mathrm{d}x$，而$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$。则有：$\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1+y'^2}\cdot\mathrm{d}x}=\frac{q}{T_0}$

设$C=\frac{T_0}{q}$，由于T_0和q沿索长均为常数，故C为一常数，量纲是长度。取离垂点距离为C处为指标原点，则$X=0$时，$y=C$，见图。代入上式后得：$y''=\frac{1}{C}\sqrt{1+y'^2}$

这就是纲索的微分方程式。现在来求这个方程的解，令：$y'=B$，则$y''=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$，上式写为：

$$\frac{\mathrm{d}B}{\sqrt{1+B^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{C}$$

积分后得 $\text{arcsh}B=\frac{X}{C}+C_1$ 或 $B=\text{sh}\left(\frac{X}{C}+C_1\right)$，当 $X=0$ 时，为纲索垂点处，则 $y?=B=0$ 故 $C_1=0$。

因此：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\text{sh}\frac{X}{C}$，积分后得：$y=C\text{ch}\frac{x}{C}+C_2$

因为 $X=0$ 时，$y=C$，则 $C_2=0$。因此，在载荷沿索长均布时，纲索的方程为：$y=C\text{ch}\frac{x}{C}$

这表明柔索呈一悬链线。即和一根重量均匀的链条悬挂在 A、B 两点所构成曲线完全相同。式中 $C=\frac{T_0}{q}$ 称为悬链线参数。

3.7.2 张力

为了求柔索上任意一点的张力，可由 $T_0=T\cos\alpha$ 和 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha$，得：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=T_0$

因为 $\mathrm{d}s=\sqrt{(1+y'^2)\cdot\mathrm{d}x}$，则上式可写成为：$T=T_0\sqrt{1+y'^2}$，由于 $y'=\text{sh}\frac{X}{C}$，则 $T=T_0\text{ch}\frac{X}{C}$

又因为 $y=C\text{ch}\frac{X}{C}$，则 $\text{ch}\frac{X}{C}=\frac{y}{C}$，所以：$T=\frac{T_0 y}{C}=qy$

式中 T——柔索上任意一点的张力；y——对应点的纵坐标；q——单位长度上的载荷。

由此可见，柔索两点张力之差等于柔索单位长度上的载荷 q 与纵坐标差的积。在悬点 A 和 B 处在同一水平面上时，问题可进一步简化：若 T_0 为柔索垂点处张力，T 为悬点外张力，则由力三角形可知。

$T^2=(qS)^2+T_0^2$，式中 S--半根柔索的长度。因为 $T=qy$，而由图可知 $y=f+C$，则：$T=(C+f)\cdot q$

则：$T=T_0+fq$，式中 f 为柔索的垂度。代入上式，则有：（T_0+fq）$^2=T_0^2+q^2S^2$

设柔索 AB 全长为 S_0，则 $S_0=2S$，代入整理后得 $T_0=\dfrac{qs_0^2}{8f}-\dfrac{qf}{2}$，上式为计算柔索水平张力 T_0 的公式。

代入后可得张力 T 的公式为：$T=\dfrac{qs_0^2}{8f}+\dfrac{qf}{2}$，

式中 T——张力，N；S_0——柔索全长，m；f——垂度，m；q——单位长度载荷，N/m。

可以将柔索上的任意点看作是悬点，同样可用上述公式求出该点张力，但 S_0 将指与该点同一水平相应两点间索长，f 也为相应的垂度。

3.7.3 弧长

由悬链线方程：$y=C\mathrm{ch}\dfrac{X}{C}$，$y'=\mathrm{sh}\dfrac{X}{C}$，则从柔索顶点起算的柔索长度为：

$S=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\cdot\mathrm{d}x$，则代入后积分得：$S=C\mathrm{sh}\dfrac{X}{C}$

如果要计算悬点不在同一水平时柔索的全长，则可以认为 $AB=AE+EB$。见图。则有

$$S=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_{x_A}^{0}\sqrt{1+y'^2}\cdot\mathrm{d}x\pm\int_{0}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\cdot\mathrm{d}x=C\left(\mathrm{sh}\frac{X_A}{C}\pm\mathrm{sh}\frac{X_B}{C}\right)$$

$$=C\left[2\mathrm{sh}\left(\frac{X_A\pm X_B}{2C}\right)\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{X_A\pm X_B}{2C}\right)\right]=2C\cdot\mathrm{sh}\frac{X_A\pm X_B}{2C}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{X_A\pm X_B}{2C}\right)}$$

设 $L=x_A\pm x_B$，为两悬点水平间距。

则：$S = 2C\sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\frac{L}{2C}\right)+\mathrm{sh}^2\left(\frac{X_A \pm X_B}{2C}\right)\cdot \mathrm{sh}^2\left(\frac{X_A \mp X_B}{2C}\right)} = C\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{L}{2C}\right)+\left(\mathrm{ch}\frac{X_A}{C}-\mathrm{ch}\frac{X_B}{C}\right)^2}$

因为$y_A = C\mathrm{ch}\frac{X_A}{C}$ ； $y_B = C\mathrm{ch}\frac{X_B}{C}$；代入则有：

$$S = C\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{L}{2C}\right)+\left(\frac{y_A}{C}-\frac{y_B}{C}\right)^2} = P\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{L}{2C}\right)+\frac{(y_A-y_B)^2}{C^2}}$$

因为：$y_A - y_B = h$，所以：$S = \sqrt{4C^2\,\mathrm{sh}^2\frac{L}{2C}+h^2}$ ，该式是悬点在不同水平面上，柔索长度公式。

式中 L——两悬点水平间距；h——两悬点垂直间距；P——悬链线参数；S——柔索全长。

3.7.4 悬链线因素表

为了使用上述公式进行计算时，方便起见，可以应用悬链线因素表，由查表来换算各因素之间关系，如表3-7-1所示。

表3-7-1

L/S (Φ/shΦ)	f/S (chΦ−1)/2shΦ	L/f 2Φ/(chΦ−1)	Φ (L/2P)	tan α (shΦ)	cos α	α°
0.999	0.0200	50.000	0.080	0.0801	0.9968	4° 35′ 00″
0.998	0.0249	40.000	0.100	0.1002	0.9950	5° 43′ 20″
0.997	0.0374	26.619	0.150	0.1506	0.9888	8° 33′ 40″
0.996	0.0498	19.930	0.200	0.2013	0.9803	11° 23′ 00″
0.995	0.0549	18.273	0.213	0.2197	0.9767	12° 23′ 30″
0.990	0.0622	15.915	0.250	0.2526	0.9695	14° 10′ 40″
0.980	0.0866	11.312	0.350	0.3572	0.9417	19° 39′ 20″
0.970	0.1059	9.1606	0.430	0.4434	0.9142	23° 54′ 40″
0.960	0.1218	7.8845	0.497	0.5177	0.8880	27° 22′ 20″
0.950	0.1360	6.9855	0.558	0.5874	0.8622	30° 25′ 50″
0.930	0.1604	5.7982	0.665	0.7151	0.8134	35° 34′ 10″
0.900	0.1908	4.7155	0.804	0.3935	0.7457	41° 46′ 50″
0.850	0.2318	3.6656	1.004	1.1814	0.6461	49° 45′ 10″
0.830	0.2459	3.3751	1.077	1.2976	0.6104	52° 22′ 50″
0.800	0.2655	3.0129	1.183	1.4786	0.5602	55° 56′ 00″
0.750	0.2943	2.5488	1.351	1.8012	0.4854	60° 57′ 40″
0.700	0.3197	2.1902	1.514	2.1624	0.4198	65° 10′ 50″
0.650	0.3424	1.8985	1.676	2.5765	0.3616	68° 48′ 10″
0.600	0.3628	1.6533	1.839	3.0656	0.3101	71° 56′ 00″
0.550	0.3313	1.4422	2.005	3.6457	0.2645	74° 39′ 30″
0.500	0.3932	1.2560	2.177	4.3532	0.2239	77° 03′ 50″
0.450	0.4136	1.0377	2.359	5.2429	0.1873	79° 12′ 10″
0.400	0.4278	0.9349	2.553	6.3339	0.1548	81° 05′ 50″
0.370	0.4356	0.8492	2.677	7.2363	0.1369	82° 08′ 00″
0.350	0.4406	0.7945	2.763	7.8921	0.1257	82° 46′ 40″
0.330	0.4455	0.7406	2.354	8.6497	0.1148	83° 24′ 20″
0.300	0.4524	0.6632	2.997	9.9877	0.0996	84° 17′ 00″
0.270	0.4590	0.5880	3.153	11.632	0.0353	85° 06′ 30″
0.250	0.4632	0.5397	3.264	13.058	0.0764	85° 37′ 10″
0.230	0.4672	0.4922	3.333	14.712	0.0678	86° 06′ 40″
0.200	0.4728	0.4230	3.576	17.887	0.0556	86° 48′ 00″
0.170	0.4781	0.3555	3.801	22.362	0.0447	87° 26′ 20″
0.150	0.4814	0.3116	3.969	26.456	0.0376	87° 50′ 10″
0.130	0.4846	0.2682	4.159	31.997	0.0312	88° 12′ 40″
0.100	0.4390	0.2045	4.500	45.003	0.0222	88° 43′ 37″
0.070	0.4930	0.1420	4.952	70.725	0.0141	89° 11′ 24″
0.050	0.4954	0.1009	5.370	107.43	0.0093	89° 28′ 00″
0.030	0.4975	0.0608	5.990	199.71	0.0050	89° 42′ 47″