

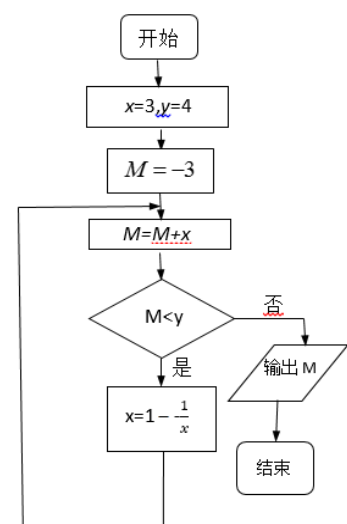
内蒙古自治区乌兰察布集宁区集宁第一中学 2023-2024 学年高三二诊模拟考试数学试卷

卷

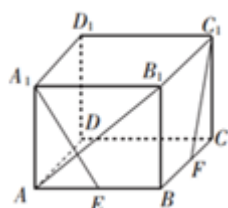
- 考生请注意：
1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
 2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
 3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为（ ）



- A. $\frac{19}{3}$ B. 4 C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{13}{2}$
2. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ，集合 $B = \{y | y = \sqrt{2-x}\}$ ，则 $A \cup B =$ （ ）
- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $[0, +\infty)$
3. 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln x$ 上任意一点处的切线斜率的最小值为（ ）
- A. 3 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. 1
4. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = \sqrt{2}AA_1$ ， E, F 分别为 AB, BC 的中点，异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角的余弦值为 m ，则（ ）



A. 直线 A_1E 与直线 C_1F 异面, 且 $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$ B. 直线 A_1E 与直线 C_1F 共面, 且 $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$

C. 直线 A_1E 与直线 C_1F 异面, 且 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 直线 A_1E 与直线 C_1F 共面, 且 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x = n^2 - 1, n \in A\}$, $P = A \cap B$, 则 P 的子集共有 ()

A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

6. 函数 $f(x) = 2\cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 2$ 的一个单调递增区间是 ()

A. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ D. $\left[\frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$

7. 已知 $z = i(3 - 2i)$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

8. 已知直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F , 且与双曲线 C 在第二象限交于点 A , 若 $|FA| = |FO|$ (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为

A. 2 B. $\sqrt{3} + 1$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5} - 1$

9. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 + i$, 则 $|z|$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

10. 若复数 z 满足 $z - \sqrt{3}(1 + z)i = 1$, 复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$, 则 $z + \bar{z} =$ ()

A. 1 B. 0 C. -1 D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

11. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3, x \in N\}$, $B = \{x | x^2 > 1\}$, 则集合 $A \cap B =$ ()

A. $\{2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

12. 定义在 R 上函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 且对任意的不相等的实数 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

若关于 x 的不等式 $f(2mx - \ln x - 3) \geq 2f(3) - f(-2mx + \ln x + 3)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 6}{6}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 3}{6}\right]$ C. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 3}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 6}{3}\right]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_2=3$ ， $S_4=16$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=$ _____，通项公式

$a_n=$ _____.

14. 如果函数 $f(x)=(m-2)x^2+2(n-8)x+1$ ($m, n \in R$ 且 $m \geq 2, n \geq 0$) 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 那么 mn 的最大值为_____.

15. 已知下列命题:

①命题“ $\exists x_0 \in R, x_0^2+1 > 3x_0$ ”的否定是“ $\forall x \in R, x^2+1 < 3x$ ”;

②已知 p, q 为两个命题, 若“ $p \vee q$ ”为假命题, 则“ $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ”为真命题;

③“ $a > 2$ ”是“ $a > 5$ ”的充分不必要条件;

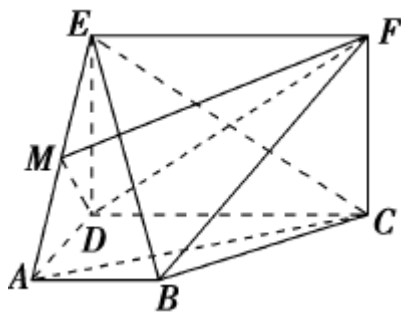
④“若 $xy=0$, 则 $x=0$ 且 $y=0$ ”的逆否命题为真命题.

其中所有真命题的序号是_____.

16. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x-y-6 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, 若目标函数 $z=ax+by$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为12, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 如图, 矩形 $CDEF$ 和梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD = \frac{1}{2}CD$, $BE \perp DF$.



(1) 若 M 为 EA 的中点, 求证: $AC \parallel$ 平面 MDF ;

(2) 若 $AB=2$, 求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积.

18. (12分) 已知 $a > 0$, 证明: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} > a + \frac{1}{a} - 1$.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - a \ln x$, $a \in R$

(1) 若 $a=1$ ，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 设 $g(x)=f(x)+(a+2)\ln x-(a+2b-2)x$ ，且 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，若 $b \geq 1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值.

20. (12 分) 某健身馆为响应十九届四中全会提出的“聚焦增强人民体质，健全促进全民健身制度性举措”，提高广大市民对全民健身运动的参与程度，推出了健身促销活动，收费标准如下：健身时间不超过 1 小时免费，超过 1 小时的部分每小时收费标准为 20 元（不足 1 小时的部分按 1 小时计算）.现有甲、乙两人各自独立地来该健身馆健身，设甲、乙健身时间不超过 1 小时的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ ，健身时间 1 小时以上且不超过 2 小时的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ，且两人健身时间都不会超过 3 小时.

(1) 设甲、乙两人所付的健身费用之和为随机变量 ξ （单位：元），求 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$ ；

(2) 此促销活动推出后，健身馆预计每天约有 300 人来参与健身活动，以这两人健身费用之和的数学期望为依据，预测此次促销活动后健身馆每天的营业额.

21. (12 分) 设函数 $f(x)=me^x-x^2+3$ ，其中 $m \in R$.

(I) 当 $f(x)$ 为偶函数时，求函数 $h(x)=xf(x)$ 的极值；

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点，求 m 的取值范围.

22. (10 分) 为响应“坚定文化自信，建设文化强国”，提升全民文化修养，引领学生“读经典用经典”，某广播电视台计划推出一档“阅读经典”节目.工作人员在前期的数据采集中，在某高中学校随机抽取了 120 名学生做调查，统计结果显示：样本中男女比例为 3:2，而男生中喜欢阅读中国古典文学和不喜欢的比例是 7:5，女生中喜欢阅读中国古典文学和不喜欢的比例是 5:3.

(1) 填写下面列联表，并根据联表判断是否有 95% 的把握认为喜欢阅读中国古典文学与性别有关系？

	男生	女生	总计
喜欢阅读中国古典文学			
不喜欢阅读中国古典文学			
总计			

(2) 为做好文化建设引领，实验组把该校作为试点，和该校的学生进行中国古典文学阅读交流.实验人员已经从所调查的 120 人中筛选出 4 名男生和 3 名女生共 7 人作为代表，这 7 个代表中有 2 名男生代表和 2 名女生代表喜欢中国古典文学.现从这 7 名代表中任选 3 名男生代表和 2 名女生代表参加座谈会，记 ξ

为参加会议的人中喜欢古典文学的人数，求 5 的分布列及数学期望 $E(\xi)$

附表及公式：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}, \quad n = a + b + c + d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 x, M 的值，当 $x = 3$ ， $M = \frac{19}{3} > 4$ ，退出循环，输出结果.

【详解】

程序运行过程如下：

$x = 3, M = 0; x = \frac{2}{3}, M = \frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}, M = \frac{1}{6};$
 $x = 3, M = \frac{19}{6}; x = \frac{2}{3}, M = \frac{23}{6};$
 $x = -\frac{1}{2}, M = \frac{10}{3}; x = 3, M = \frac{19}{3} > 4$ ，退出循环，输出结果为 $\frac{19}{3}$ ，

故选：A.

【点睛】

该题考查的是有关程序框图的问题，涉及到的知识点有判断程序框图输出结果，属于基础题目.

2、D

【解析】

可求出集合 A, B ，然后进行并集的运算即可.

【详解】

解： $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ， $B = \{y | y \geq 0\}$ ；

$\therefore A \cup B = [0, +\infty)$ 。

故选 D 。

【点睛】

考查描述法、区间的定义，对数函数的单调性，以及并集的运算。

3、 A

【解析】

根据题意，求导后结合基本不等式，即可求出切线斜率 $k \geq 3$ ，即可得出答案。

【详解】

解：由于 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln x$ ，根据导数的几何意义得：

$$k = f'(x) = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3 (x > 0),$$

即切线斜率 $k \geq 3$ ，

当且仅当 $x = 1$ 等号成立，

所以 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln x$ 上任意一点处的切线斜率的最小值为 3。

故选： A 。

【点睛】

本题考查导数的几何意义的应用以及运用基本不等式求最值，考查计算能力。

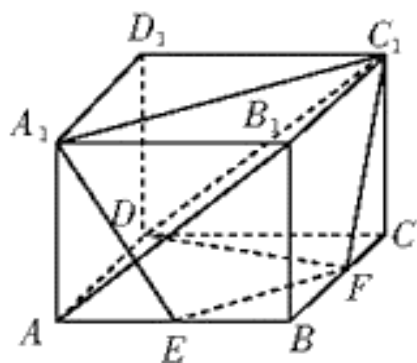
4、 B

【解析】

连接 EF ， A_1C_1 ， C_1D ， DF ，由正四棱柱的特征可知 $EF \parallel A_1C_1$ ，再由平面的基本性质可知，直线 A_1E 与直线 C_1F 共面，同理易得 $AB_1 \parallel C_1D$ ，由异面直线所成的角的定义可知，异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角为 $\angle DC_1F$ ，然后再利用余弦定理求解。

【详解】

如图所示：



连接 EF ， A_1C_1 ， C_1D ， DF ，由正方体的特征得 $EF \parallel A_1C_1$ ，

所以直线 A_1E 与直线 C_1F 共面。

由正四棱柱的特征得 $AB_1 \parallel C_1D$ ，

所以异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角为 $\angle DC_1F$ 。

设 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则 $AB = \sqrt{2}AA_1 = 2$ ，则 $DF = \sqrt{5}$ ， $C_1F = \sqrt{3}$ ， $C_1D = \sqrt{6}$ ，

由余弦定理，得 $m = \cos \angle DC_1F = \frac{3+6-5}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

故选：B

【点睛】

本题主要考查异面直线的定义及所成的角和平面的基本性质，还考查了推理论证和运算求解的能力，属于中档题。

5、B

【解析】

根据集合 A 中的元素，可得集合 B ，然后根据交集的概念，可得 P ，最后根据子集的概念，利用 2^n 计算，可得结果。

【详解】

由题可知： $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x \mid x = n^2 - 1, n \in A\}$

当 $n = 0$ 时， $x = -1$

当 $n = 1$ 时， $x = 0$

当 $n = 2$ 时， $x = 3$

当 $n = 3$ 时， $x = 8$

所以集合 $B = \{x \mid x = n^2 - 1, n \in A\} = \{-1, 0, 3, 8\}$

则 $P = A \cap B = \{0, 3\}$

所以 P 的子集共有 $2^2 = 4$

故选：B

【点睛】

本题考查集合的运算以及集合子集个数的计算，当集合 P 中有 n 元素时，集合 P 子集的个数为 2^n ，真子集个数为 $2^n - 1$ ，非空子集为 $2^n - 1$ ，非空真子集为 $2^n - 2$ ，属基础题.

6、D

【解析】

利用同角三角函数的基本关系式、二倍角公式和辅助角公式化简 $f(x)$ 表达式，再根据三角函数单调区间的求法，求得 $f(x)$ 的单调区间，由此确定正确选项.

【详解】

因为 $f(x) = 2\cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 2$

$= 1 + \cos 2x + 1 + \sin 2x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，由 $f(x)$ 单调递增，则 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，解得

$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，当 $k=1$ 时，D 选项正确.C 选项是递减区间，A，B 选项中有部分增区间部分减区间.

故选：D

【点睛】

本小题考查三角函数的恒等变换，三角函数的图象与性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.

7、C

【解析】

先化简复数 $z = i(3 - 2i)$ ，再求 $\bar{z}$ ，最后求 $z \cdot \bar{z}$ 即可.

【详解】

解： $z = i(3 - 2i) = 2 + 3i$ ， $\bar{z} = 2 - 3i$

$z \cdot \bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13$ ，

故选：C

【点睛】

考查复数的运算，是基础题.

8、B

【解析】

直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，易得 $|FA| = |FO| = c$ 。设双曲线 C 的右焦点为 E ，可得 $\triangle AFE$ 中， $\angle FAE = 90^\circ$ ，则

$|AE| = \sqrt{3}c$ ，所以双曲线 C 的离心率为 $e = \frac{2c}{\sqrt{3}c - c} = \sqrt{3} + 1$ 。故选 B。

9、C

【解析】

由复数的除法运算整理已知求得复数 z ，进而求得其模。

【详解】

因为 $\frac{1}{z} = 1 + i \Rightarrow z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ，所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的除法运算与求复数的模，属于基础题。

10、C

【解析】

根据复数代数形式的运算法则求出 z ，再根据共轭复数的概念求解即可。

【详解】

解： $\because z - \sqrt{3}i - \sqrt{3}zi = 1$ ，

$$\therefore z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i，$$

$$\text{则 } \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i，$$

$$\therefore z + \bar{z} = -1，$$

故选：C。

【点睛】

本题主要考查复数代数形式的运算法则，考查共轭复数的概念，属于基础题。

11、A

【解析】

化简集合 A, B ，按交集定义，即可求解。

【详解】

集合 $A = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/336042220101010142>