天津市第一中学滨海学校2024届高三第六次学业水平质量调查数学试卷（开学考）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．若集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{x}>0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}$，则 $\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B=$（　）

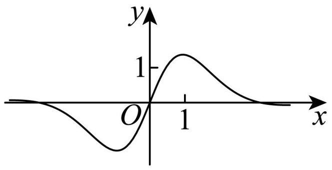
A．$\left(-2,+\infty\right)$　　B．$\left(0,+\infty\right)$

C．$\left(-2,0\right]$　　D．$\left[0,1\right]$

2．已知复数 z 满足 $\frac{z}{1+2\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{2024}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$（　）

A．3　　B．$\sqrt{3}$　　C．5　　D．$\sqrt{5}$

3．已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 可能是（　）



A．$\frac{5\sin x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$　　B．$\frac{5\cos x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$　　C．$\frac{x^2+1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$　　D．$4x\mathrm{e}^{-|x|}$

4．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则“$a_1=2$”是“$\{a_n\}$ 为单调递增数列”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．下列说法不正确的是（　）

A．若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(3,\sigma^2\right)$，且 $P\left(X\le 4\right)=0.7$，则 $P\left(3<X<4\right)=0.2$

B．一组数据 10，11，11，12，13，14，16，18，20，22 的第 60 百分位数为 14

C．若线性相关系数 $|r|$ 越接近 1，则两个变量的线性相关性越强

D．对具有线性相关关系的变量 x，y，且线性回归方程为 $\hat{y}=0.3x-m$，若样本点的中心为 $\left(m,2.8\right)$，则实数 m 的值是 -4

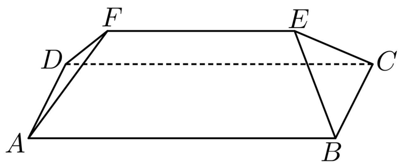
6．已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D，点 E 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，且 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BE}$，则 $x+y=$（　）

A．5　　B．7　　C．9　　D．11

7．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right)$ 内单调递减，$x=\frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴，且函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ 为奇函数，则 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right)=$（　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

8．坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\mathrm{m},BC=AD=10\mathrm{m}$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　）



A．102m　　B．112m

C．117m　　D．125m

9．若 $F(\mathrm{c},0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，过 F 作双曲线一条渐近线的垂线与两条渐近线交于 A,B 两点，O 为坐标原点，$\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{12a^2}{7}$，则该双曲线的离心率 $e=$（ ）

A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{8}{5}$

二、填空题

10．$\frac{\left(2x-y\right)^6}{x^2y^3}$ 的展开式中 x 的系数为____________．

11．函数 $f\left(x\right)=\log_2 x+2^x-\frac{x}{\ln 2}$ 的图象在 $x=1$ 处切线的斜率为____________.

12．某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有________种（用数字作答）.

13．已知抛物线 E：$y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与抛物线 E 交于 A，B 两点，若直线 l 与圆 $x^2+y^2-px=0$ 交于 C，D 两点，且 $3\left|AB\right|=8\left|CD\right|$，则直线 l 的一个斜率为____________.

14．甲，乙，丙三人进行传球游戏，每次投掷一枚质地均匀的正方体骰子决定传球的方

式：当球在甲手中时，若骰子点数大于3，则甲将球传给乙，若点数不大于3，则甲将球保留；当球在乙手中时，若骰子点数大于4，则乙将球传给甲，若点数不大于4，则乙将球传给丙；当球在丙手中时，若骰子点数大于3，则丙将球传给甲，若骰子点数不大于3，则丙将球传给乙．初始时，球在甲手中，投掷n次骰子后（$n\in\mathbf{N}^*$），记球在甲手中的概率为p_n，则$p_3=$________；$p_n=$________．

15．定义在R上的奇函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=0$，当$x\in\left(-1,1\right)$时，$f\left(x\right)=\log_2\left(\frac{a}{1-x}-1\right)+b$，则$\sum_{k=1}^{2024}f\left(\frac{k}{3}\right)=$____________．

三、解答题

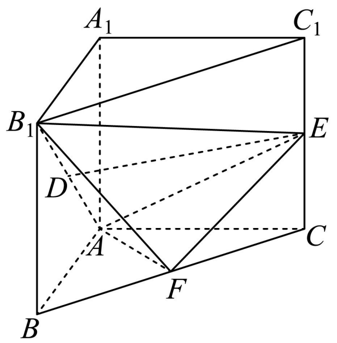
16．在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$a^2-b^2+c^2=2$，△ABC的面积为$\frac{\sqrt{2}}{4}$．

(1)求$\tan B$；

(2)若$b=1$，求$\sin A\sin C$；

(3)求$\cos 3B$的值．

17．如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA_1\perp$平面ABC，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，且$AB=AA_1=2$，D，E，F分别是B_1A，CC_1，BC的中点．



(1)求直线DE与BC所成角的余弦值；

(2)求证：$B_1F\perp$平面AEF；

(3)求平面AB_1E与平面AEF夹角的余弦值．

18．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左顶点为点$A$，上、下顶点分别为点$B$、$C$，左焦点为点$F$，且椭圆的焦距为$2\sqrt{3}$，△$BCF$为等边三角形．

(1)求椭圆的方程及离心率；

(2)设过原点 O 且斜率为 $k\left(k>0\right)$ 的直线 l 与椭圆交于 P、Q 两点，直线 l 与直线 AB 交于点 M，且点 P、M 均在第一象限．若 $\triangledown BPQ$ 的面积是 $\triangle BPM$ 的面积的 2 倍，求直线 l 的方程．

19．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，$a_1=2$，a_2，a_3+2，a_4 成等差数列.

(1)求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式和 $\sum\limits_{i=1}^{n}ia_i$；

(2)数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_n\in\mathrm{N}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$；当 $n=a_k\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$ 时，$b_n=\dfrac{n}{2}$；当 $n\neq a_k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$b_n<b_{n+1}$.记数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n．

①若 $\sum\limits_{i=a_k+1}^{a_{k+1}}b_i=2024\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，求 k 的值；

②若 $b_{a_n+1}=1$，求证：$S_{2n}=4S_n-n+2$．

20．黎曼猜想是解析数论里的一个重要猜想，它被很多数学家视为是最重要的数学猜想之一．它与函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}$（$x>0,s>1$，$s$ 为常数）密切相关，请解决下列问题．

(1)当 $1<s\leq 2$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)当 $s>2$ 时；

①证明 $f\left(x\right)$ 有唯一极值点；

②记 $f\left(x\right)$ 的唯一极值点为 $g\left(s\right)$，讨论 $g\left(s\right)$ 的单调性，并证明你的结论．

参考答案：

1．C

【分析】根据题意求集合 A,B，再利用集合的交并补集运算即可得解.

【详解】因为 $A=\left\{x\left|\frac{1}{x}>0\right.\right\}=\{x|x>0\}$，则 $\complement_{R}A=\{x|x\le 0\}$.

又因为 $B=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}=\{x|-2<x<1\}$，

所以 $\left(\complement_{R}A\right)\cap B=(-2,0]$.

故选：C.

2．D

【分析】根据复数乘法的运算法则、虚数单位乘方的运算性质，结合复数的模定义进行求解即可.

【详解】由 $\frac{z}{1+2\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{2024}$，

则 $z=\mathrm{i}^{2024}(1+2\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

故选：D

3．A

【分析】借助排除法结合函数值符号，将不符合题意的排除即可得.

【详解】由图可知，该函数定义域包括 0，对 B、C 选项中，$\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-0}=0$，故排除 B、C；当 $x>0$ 时，易得 $4x>0$、$\mathrm{e}^{-|x|}>0$，故 $4x\mathrm{e}^{-|x|}>0$，与图象矛盾，故排除 D.

故选：A.

4．A

【分析】利用充分条件和必要条件的定义判断.

【详解】解：由 $a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n=a_n(a_n-1)>0$，解得 $a_n<0$ 或 $a_n>1$，

所以“$a_1=2$”是“$\{a_n\}$ 为单调递增数列”的充分不必要条件，

故选：A

5．B

【分析】利用正态分布的性质即可判断选项 A，利用百分位数的定义即可判断选项 B，根据线性相关系数的性质即可判断选项 C，利用线性回归方程中的基本量即可判断选项 D.

【详解】对 A：若随机变量 X 服从正态分布 $X\left(3,\sigma^2\right)$，且 $P\left(X\le 4\right)=0.7$，

则 $P\left(X>4\right)=1-P\left(X\le 4\right)=0.3$，

则 $P\left(3<X<4\right)=0.5-P\left(X>4\right)=0.2$，A 正确；

对 B：因为 $10\times 60\%=6$，所以第 60 百分位数为 $\dfrac{14+16}{2}=15$，B 错误；

对 C：若线性相关系数 $|r|$ 越接近 1，

则两个变量的线性相关性越强，C 正确；

对于 D，样本点的中心为 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$，

所以 $\overline{x}=m$，$\overline{y}=2.8$，

而对于回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

因为此时线性回归方程为 $\hat{y}=0.3x-m$，

所以 $\hat{b}=0.3$，$2.8=0.3m-m$，

所以 $m=-4$，D 正确.

故选：B

6．D

【分析】利用平面向量的线性运算可将 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$ 转化为 $5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$，则得到 x,y 的值，进而即可求解.

【详解】因为 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$，边 BC 的中点为 D，所以 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=3\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}\right)+2\overrightarrow{AC}$，

因为 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}$，所以 $\dfrac{5}{2}\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{AC}$，

所以 $\dfrac{5}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{5}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=3\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{AC}$，

所以 $5\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{AC}$，即 $5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$，

因为 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BE}$，

所以 $x=5$，$y=6$，故 $x+y=11$.

故选：D.

7．B

【分析】首先由函数的单调性转化函数周期的范围，即可求 ω 的范围，再结合函数的对称性列式，确定 ω，再分别代入函数的解析数，由对称性求 φ，并验证函数的单调性后，即可求

解.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right)$ 内单调递减，

所以 $\frac{7\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\le\frac{1}{2}T\Rightarrow\frac{7\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\le\frac{1}{2}\frac{2\pi}{|\omega|}$，得 $|\omega|\le 2$，

因为 $x=\frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴，

所以 $\omega\cdot\frac{3\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathrm{Z}$，①

因为函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{8}+\varphi\right)$ 是奇函数，

所以 $\frac{\omega\pi}{8}+\varphi=m\pi,m\in \mathrm{Z}$，②，

由①－②可得，$\omega=4\left(2k-m\right)+2$，

而 $|\omega|\le 2$，所以 $|\omega|=\pm2$

当 $\omega=2$ 时，$\frac{2\pi}{8}+\varphi=m\pi,m\in \mathrm{Z}$，得 $\varphi=m\pi-\frac{\pi}{4}$，$m\in\mathbf{Z}$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

即 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，显然此时函数单调递减，符合题意，

所以 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{24}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当 $\omega=-2$ 时，$-\frac{2\pi}{8}+\varphi=m\pi,m\in \mathrm{Z}$，得 $\varphi=m\pi+\frac{\pi}{4}$，$m\in\mathbf{Z}$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

即 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\pi,2\pi\right)$，显然此时函数不是单调递减函数，不符合题意，

所以 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

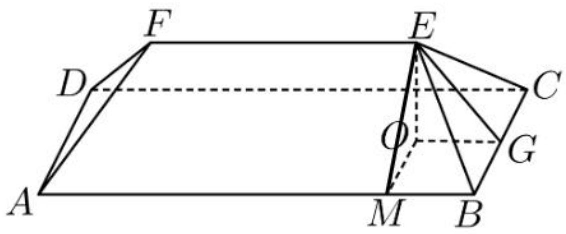
故选：B

8．C

【分析】先根据线面角的定义求得 $\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$，从而依次求 EO，EG，EB，

EF，再把所有棱长相加即可得解.

【详解】如图，过E做$EO\perp$平面$ABCD$，垂足为O，过E分别做$EG\perp BC$，$EM\perp AB$，垂足分别为G，M，连接OG,OM，



由题意得等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为$\angle EMO$和$\angle EGO$，

所以$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$.

因为$EO\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$EO\perp BC$，

因为$EG\perp BC$，$EO,EG\subset$平面EOG，$EO\cap EG=E$，

所以$BC\perp$平面EOG，因为$OG\subset$平面EOG，所以$BC\perp OG$，.

同理：$OM\perp BM$，又$BM\perp BG$，故四边形$OMBG$是矩形，

所以由$BC=10$得$OM=5$，所以$EO=\sqrt{14}$，所以$OG=5$，

所以在直角三角形EOG中，$EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2+5^2}=\sqrt{39}$

在直角三角形EBG中，$BG=OM=5$，$EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{39}\right)^2+5^2}=8$，

又因为$EF=AB-5-5=25-5-5=15$，

所有棱长之和为$2\times25+2\times10+15+4\times8=117\,\mathrm{m}$.

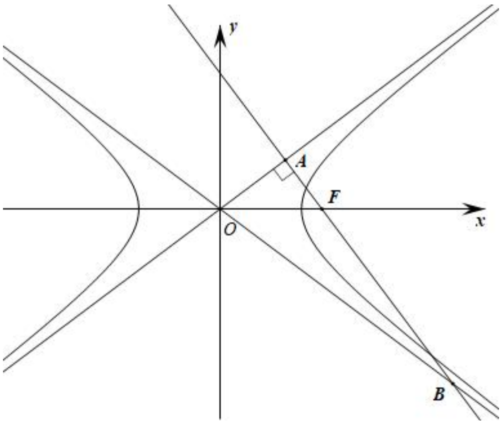
故选：C

9．A

【分析】先求出渐近线方程，根据题设条件作出图象，设$\angle AOF=\theta$，可得出$\tan\theta=\frac{b}{a}\in(0,1)$，从而求出$\tan2\theta=\frac{2ab}{a^2-b^2}$，再求出$F$到渐近线的距离$|FA|$，从而得出$|AO|=a$，结合$\triangle OAB$的面积为$\frac{12}{7}a^2$，可得到$\frac{a^3b}{a^2-b^2}=\frac{12}{7}a^2$，从而可得$a$，$b$的等量关系，再由离心率公式即可求解.

【详解】根据题意可得双曲线的渐近线方程为$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$.

设过点$F(\mathrm{c},0)$作渐近线$y=\frac{b}{a}x$的垂线，分别交$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$于点A,B，如图所示：



因为$a>b>0$，所以$0<\frac{b}{a}<1$，

设$\angle AOF=\theta$，则$\angle AOB=2\theta$，$\tan\theta=\frac{b}{a}\in(0,1)$，

所以$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$，

因为$F(\mathrm{c},0)$到$y=\frac{b}{a}x$的距离为$|FA|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，则$|AO|=a$，

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AO|\cdot|AB|=\frac{1}{2}a\cdot a\tan2\theta=\frac{a^3b}{a^2-b^2}=\frac{12a^2}{7}$，解得$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，

所以该双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{4}$.

故选：A

10．-160

【分析】利用二项展开式的通项即可解出.

【详解】要求$\frac{(2x-y)^6}{x^2y^3}$的展开式中x的系数，

即求$(2x-y)^6$展开式中含x^3y^3的项,

易知$(2x-y)^6$展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(2x)^{6-r}(-y)^r, r=0,1,2,3,4,5,6$，

所以第四项满足题意，即$T_4=\mathrm{C}_6^3(2x)^3\times(-y)^3=-8\mathrm{C}_6^3x^3y^3=-160x^3y^3$，

故展开式中x的系数为-160.

故答案为：-160.

11．$2ln2/ln4$

【分析】首先求函数的导数，再根据导数的几何意义，即可求解.

【详解】由题意可知，$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}+2^x\ln 2-\dfrac{1}{\ln 2}$，$f'(1)=2\ln 2$，

根据导数的几何意义可知，函数的图象在$x=1$处切线的斜率为$2\ln 2$.

故答案为：$2\ln 2$

12．64

【分析】分类讨论选修2门或3门课，对选修3门，再讨论具体选修课的分配，结合组合数运算求解.

【详解】（1）当从8门课中选修2门，则不同的选课方案共有$C_4^1C_4^1=16$种；

（2）当从8门课中选修3门，

①若体育类选修课1门，则不同的选课方案共有$\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_4^2=24$种；

②若体育类选修课2门，则不同的选课方案共有$\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_4^1=24$种；

综上所述：不同的选课方案共有$16+24+24=64$种.

故答案为：64.

13．$\sqrt{3}$（或$-\sqrt{3}$，答案不唯一）

【分析】设l的方程为$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立直线方程和抛物线方程，再由焦点弦公式得$|AB|=x_1+x_2+p=2p+\dfrac{2p}{k^2}$，由圆$x^2+y^2-px=0$的方程可知，直线$l$过其圆心，$|CD|=2r$，由$3|AB|=8|CD|$列出方程求解即可.

【详解】由题意知，l的斜率存在，且不为0，设l的方程为$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\\ y^2=2px\end{cases}$，得$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$，

易知$\Delta>0$，则$x_1+x_2=\dfrac{k^2p+2p}{k^2}=p+\dfrac{2p}{k^2}$，

所以$|AB|=x_1+x_2+p=2p+\dfrac{2p}{k^2}$，

圆$x^2+y^2-px=0$的圆心$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，半径$r=\dfrac{p}{2}$，且直线$l$过圆心$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，