# 第七章 立体几何与空间向量（测试）

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分（选择题 共 58 分）

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．设$\alpha,\beta,\gamma$是三个不同平面，且$\alpha \cap \gamma = l, \beta \cap \gamma = m$，则$\alpha /\!/ \beta$是$l \parallel m$的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．已知向量$\vec{a}=\left(0,0,1\right)$，$\vec{b}=\left(1,-1,1\right)$，向量$\vec{a}+\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为（　）．

A．$\left(0,0,2\right)$　　B．$\left(0,0,1\right)$

C．$\left(0,0,-1\right)$　　D．$\left(0,0,-2\right)$

3．四棱台的上底面是边长为 2 的正方形，下底面是边长为 4 的正方形，四条侧棱的长均为$2\sqrt{2}$，则该四棱台的体积为（　）

A．$28\sqrt{3}$　　B．$84\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{28\sqrt{6}}{3}$　　D．$28\sqrt{2}$

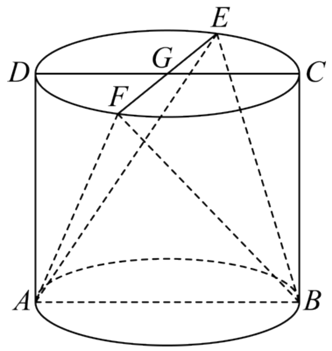
4．已知球 $O$ 的体积为$\dfrac{500\pi}{3}$，点 $A$ 到球心 $O$ 的距离为 3，则过点 $A$ 的平面$\alpha$被球 $O$ 所截的截面面积的最小值是（　）

A．$9\pi$　　B．$12\pi$　　C．$16\pi$　　D．$20\pi$

5．三棱锥$A-BCD$中，$AD\perp$平面$ABC$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=1$，$AC=2$，$AD=4$，则三棱锥$A-BCD$外接球的表面积为（　）

A．$10\pi$　　B．$20\pi$　　C．$25\pi$　　D．$30\pi$

6．如图，已知正方形 $ABCD$ 为圆柱的轴截面，$AB=BC=2$，$E$，$F$ 为上底面圆周上的两个动点，且 $EF$ 过上底面的圆心 $G$，若$AB\perp EF$，则三棱锥$A-BEF$的体积为（　）




A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7．在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点$D$在棱$BB_1$上，满足$V_{A-BCC_1D}=\frac{4}{9}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，点$M$在棱$A_1C_1$上，且$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{MC_1}$，点$N$在直线$BB_1$上，若$MN//$平面$ADC_1$，则$\frac{NB}{NB_1}=$（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

8．已知$E$，$F$分别是棱长为2的正四面体$ABCD$的对棱$AD,BC$的中点.过$EF$的平面$\alpha$与正四面体$ABCD$相截，得到一个截面多边形$\tau$，则下列说法正确的是（　）

A．截面多边形$\tau$不可能是平行四边形　　B．截面多边形$\tau$的周长是定值

C．截面多边形$\tau$的周长的最小值是$\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D．截面多边形$\tau$的面积的取值范围是$\left[1,\sqrt{2}\right]$

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9．已知$a$，$b$，$c$为三条不同的直线，$\alpha,\beta$为两个不同的平面，则下列说法正确的是（　）

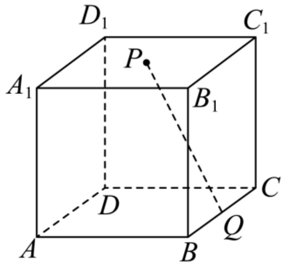
A．若$a//b,a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\cap\beta=c$，则$a//c$

B．若$a\perp b,a\perp c,b\subset\alpha,c\subset\alpha$，则$a\perp\alpha$

C．若$a//\alpha,b//\alpha,a\cap b=A,a\subset\beta,b\subset\beta$，则$\alpha//\beta$

D．若$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=c,a\perp c$，则$a\perp\beta$

10．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$P$是正方体的上底面$A_1B_1C_1D_1$内（不含边界）的动点，点$Q$是棱$BC$的中点，则以下命题正确的是（　）



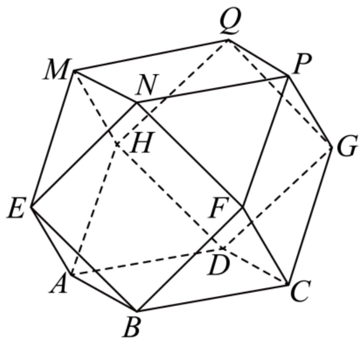

A．三棱锥$Q-PCD$的体积是定值

B．存在点$P$，使得$PQ$与$AA_1$所成的角为$60°$

C．直线 $PQ$ 与平面 $A_1ADD_1$ 所成角的正弦值的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D．若 $PD_1=PQ$，则 $P$ 的轨迹的长度为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

11．半正多面体（semiregular solid）亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，体现了数学的对称美．二十四等边体就是一种半正多面体，是由正方体切截而成的，它由八个正三角形和六个正方形构成（如图所示），若它的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，则（　）




A． $BF\perp$ 平面 $EAB$

B．该二十四等边体的体积为 $\dfrac{20}{3}$

C．该二十四等边体外接球的表面积为 $6\pi$

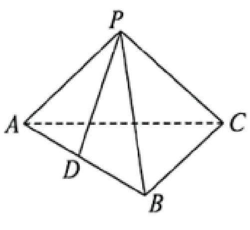
D．$PN$ 与平面 $EBFN$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

## 第二部分（非选择题 共 92 分）

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。**

12. 已知四面体有两个面是边长为 2 的正三角形，另外两个面是直角三角形，则该四面体的体积等于________.

13．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\vee ABC$ 为等边三角形，$\triangle APC$ 为等腰直角三角形，$PA=PC$，平面 $PAC\perp$ 平面 $ABC$，$D$ 为 $AB$ 的中点，则异面直线 $AC$ 与 $PD$ 所成角的余弦值为_____.

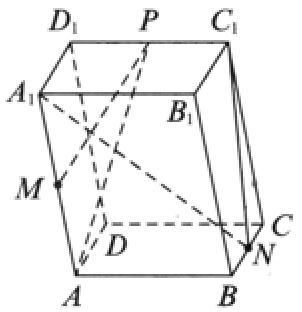



14．要使正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 以直线 $CA_1$ 为轴，旋转 $n°$ 后与其自身重合，则 $n$ 的最小正值为__________.

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步聚。**

15．（13 分）

如图所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$、$N$ 分别是 $AA_1$ 、$BC$ 的中点. 设 $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ .

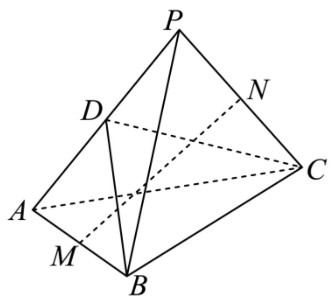



(1)已知 $P$ 是 $C_1D_1$ 的中点，用 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$ 、 $\overrightarrow{A_1N}$ 、 $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$ ；

(2)已知 $P$ 在线段 $C_1D_1$ 上，且 $\dfrac{C_1P}{PD_1}=\dfrac{1}{2}$ ，用 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$ .

16. （15 分）

已知三棱锥 $P-ABC$ ， $AB\perp BC$ ， $BC\perp CP$ ，$D$，$M$，$N$ 分别是 $AP$，$AB$，$CP$ 的中点，$4AB=3BC=12$ ， $PB=\sqrt{34}$ ，二面角的 $P-BC-D$ 余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ .



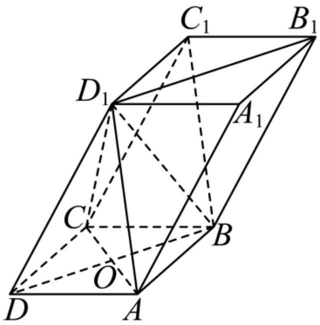

(1)证明： $AB\perp MN$ ；

(2)求直线 $MN$ 与平面 $BCD$ 所成角的正弦值.

17. （15 分）

如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $24\sqrt{3}$ ， $D_1A=D_1C$ ， $D_1D=D_1B$ ， $CD=AD=4$ ，

$\angle ADC = 60^\circ$.

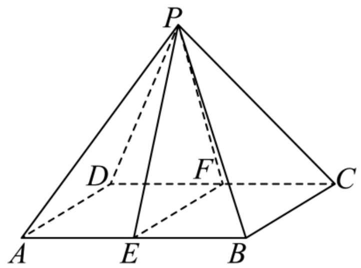



(1)求点 $A$ 到平面 $DBB_1D_1$ 的距离；

(2)求二面角 $D-BD_1-C_1$ 的正弦值.

18．（17 分）

如图，四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PA=PB$ ， $PC=PD$ ，且平面 $PAB\perp$ 平面 $PCD$． $E,F$ 分别是 $AB,CD$ 的中点． $AB=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}$ .




(1)求证：! $PEF$ 是直角三角形；

(2)求四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值；

(3)求平面 $PEF$ 与平面 $PBC$ 的夹角余弦值的范围.

19．（17 分）

对于空间向量 $\vec{m}=(a,b,c)$ ，定义 $\|\vec{m}\|=\max\{|a|,|b|,|c|\}$ ，其中 $\max\{x,y,z\}$ 表示 $x,y,z$ 这三个数的最大值.

(1)已知$\vec{a}=\left(6,\dfrac{11}{2},1\right)$，$\vec{b}=\left(x,\dfrac{1}{2}x,-x\right)$.

①写出$\|\vec{a}\|$，写出$\|\vec{b}\|$（用含$x$的式子表示）；

②当$0\le x\le 4$，写出$\|\vec{a}-\vec{b}\|$的最小值及此时$x$的值；

(2)设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，求证：$\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$

(3)在空间直角坐标系$O-xyz$中，$A(2,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,6)$，点$P$是以$O$为球心，1为半径的球面上的动点，点$Q$是$\Delta ABC$内部的动点，直接写出$\|\overrightarrow{PQ}\|$的最小值及相应的点$P$的坐标.

# 第七章 立体几何与空间向量（测试）

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分（选择题 共 58 分）

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．设$\alpha,\beta,\gamma$是三个不同平面，且$\alpha\cap\gamma=l,\beta\cap\gamma=m$，则$\alpha/\!/\beta$是$l\parallel m$的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由于$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=l,\beta\cap\gamma=m$，由平面平行的性质定理可得：$l\parallel m$，

所以$\alpha/\!/\beta$是$l\parallel m$的充分条件；

但当$l\parallel m$，$\alpha\cap\gamma=l,\beta\cap\gamma=m$，并不能推出$\alpha/\!/\beta$，也有可能$\alpha,\beta$相交，

所以$\alpha/\!/\beta$是$l\parallel m$的不必要条件；

故选:A.

2．已知向量$\vec{a}=(0,0,1)$，$\vec{b}=(1,-1,1)$，向量$\vec{a}+\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为（　）．

A．$(0,0,2)$　　B．$(0,0,1)$

C．$(0,0,-1)$　　D．$(0,0,-2)$

【答案】A

【解析】向量$\vec{a}+\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(1,-1,2)\cdot(0,0,1)}{1}\cdot\dfrac{(0,0,1)}{1}=(0,0,2)$

故选：A

3．四棱台的上底面是边长为 2 的正方形，下底面是边长为 4 的正方形，四条侧棱的长均为$2\sqrt{2}$，则该四棱台的体积为（　）

A．$28\sqrt{3}$　　B．$84\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{28\sqrt{6}}{3}$　　D．$28\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】过$A_1E\perp AC$，由正四棱台的性质可知：$A_1E$是该正四棱台的高，

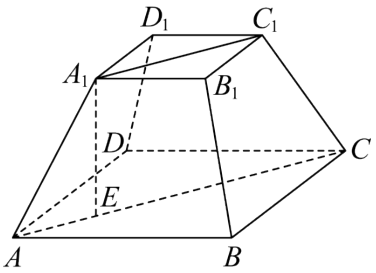
因为四边形 $ACC_1A_1$ 是等腰梯形，

所以 $AE=\frac{1}{2}\left(A_1C_1-AC\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4^2+4^2}-\sqrt{2^2+2^2}\right)=\sqrt{2}$，

由勾股定理可知： $A_1E=\sqrt{A_1A^2-A_1E^2}=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$，

所以该四棱台的体积为$\frac{1}{3}\times\left(4^2+2^2+\sqrt{4^2\times 2^2}\right)\times\sqrt{6}=\frac{28\sqrt{6}}{3}$，

故选：C




4．已知球 $O$ 的体积为$\frac{500\pi}{3}$，点 $A$ 到球心 $O$ 的距离为 3，则过点 $A$ 的平面$\alpha$ 被球 $O$ 所截的截面面积的最小值是（　）

A．$9\pi$　　B．$12\pi$　　C．$16\pi$　　D．$20\pi$

【答案】C

【解析】设球 $O$ 的半径为 $R$，则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}$，解得 $R=5$.

因为点 $A$ 到球心 $O$ 的距离为 3，

所以过点 $A$ 的平面$\alpha$ 被球 $O$ 所截的截面圆的半径的最小值为$r=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

则所求截面面积的最小值为$\pi r^2=16\pi$.

故选：C

5．三棱锥 $A-BCD$ 中，$AD\perp$平面 $ABC$，$\angle BAC=60°$，$AB=1$，$AC=2$，$AD=4$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为（　）

A．$10\pi$　　B．$20\pi$　　C．$25\pi$　　D．$30\pi$

【答案】B

【解析】在$\vee ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，$AB=1$，$AC=2$，

由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即 $BC^2=1+4-2\times 1\times 2\times\cos 60°=3$，所以 $BC=\sqrt{3}$，

设$\vee ABC$ 的外接圆半径为 $r$，

则 $2r=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2$，所以 $r=1$，

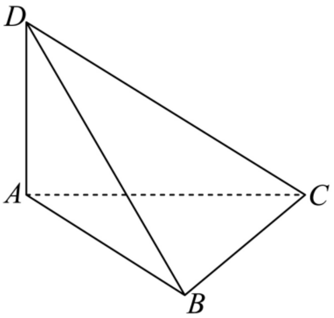
$AD\perp$平面 $ABC$，且 $AD=4$，

设三棱锥 $A-BCD$ 外接球半径为 $R$，

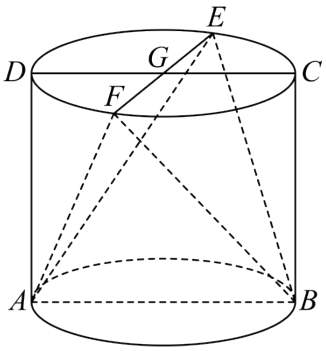
则 $R^2=r^2+(\frac{1}{2}AD)^2$，即 $R^2=1+4=5$，

所以三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$．

故选：B．




6．如图，已知正方形 $ABCD$ 为圆柱的轴截面，$AB=BC=2$，$E$，$F$ 为上底面圆周上的两个动点，且 $EF$ 过上底面的圆心 $G$，若 $AB\perp EF$，则三棱锥 $A-BEF$ 的体积为（　）




A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】如图设圆柱的下底面的圆心为 $O$，连接 $AG,BG,OG$，

则 $OG=BC=2$，且 $OG\perp$ 平面 $GEC$，

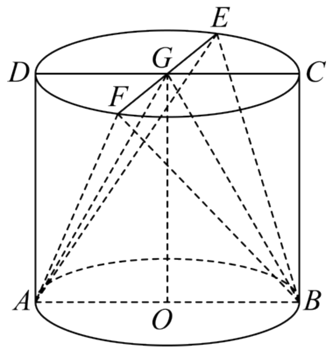
$EF\subset$ 平面 $GEC$，所以 $OG\perp EF$，又 $AB//CD$，$AB\perp EF$，

所以 $CD\perp EF$，又 $CD\cap OG=G$，$CD,OG\subset$ 平面 $CDAB$，

所以 $EF\perp$ 平面 $CDAB$，且 $EG=GF=2$，

$S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}AB\times OG=2$，

所以 $V_{A-BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABG}EF=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$．



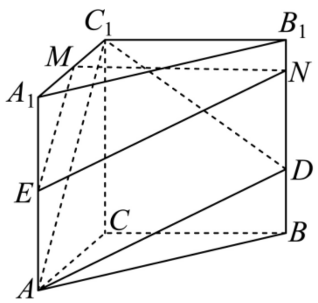

故选：B.

7．在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 $D$ 在棱 $BB_1$ 上，满足 $V_{A-BCC_1D}=\frac{4}{9}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，点 $M$ 在棱 $A_1C_1$ 上，且 $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{MC_1}$，点 $N$ 在直线 $BB_1$ 上，若 $MN//$ 平面 $ADC_1$，则 $\frac{NB}{NB_1}=$（　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】D

【解析】如图所示：




因为 $V_{A-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，所以 $V_{A-BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，

所以 $V_{A-BCC_1D}=\frac{4}{9}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}V_{A-BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{A-BCC_1B_1}$

所以 $S_{梯形BCC_1D}=\frac{2}{3}S_{四边形BCC_1B}$，所以 $S_{\triangle C_1B_1D}=\frac{1}{3}S_{四边形BCC_1B_1}$，则 $\frac{DB_1}{BB_1}=\frac{2}{3}$，

设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 6，则 $DB_1=4$，$DB=2$，

又 $M$ 为 $A_1C_1$ 的中点，取 $A_1A$ 的中点 $E$，连接 $ME$，则 $ME//C_1A$。

过 $E$ 作 $EN//AD$，且 $EN\cap BB_1=N$，连接 $MN$，又 $ME\cap EN=E$，

所以平面 $MNE//$ 平面 $ADC_1$，又 $MN\subset$ 平面 $MNE$，

所以 $MN//$ 平面 $ADC_1$，所以 $DN=EA=3$，

所以 $NB_1=DB_1-DN=4-3=1$，所以 $BN=5$，则 $\frac{NB}{NB_1}=5$，

故选：D

8．已知 $E$，$F$ 分别是棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 的对棱 $AD,BC$ 的中点.过 $EF$ 的平面 $\alpha$ 与正四面体 $ABCD$

相截，得到一个截面多边形$\tau$，则下列说法正确的是（    ）

A．截面多边形$\tau$不可能是平行四边形　　B．截面多边形$\tau$的周长是定值

C．截面多边形$\tau$的周长的最小值是$\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D．截面多边形$\tau$的面积的取值范围是$\left[1,\sqrt{2}\right]$

【答案】D

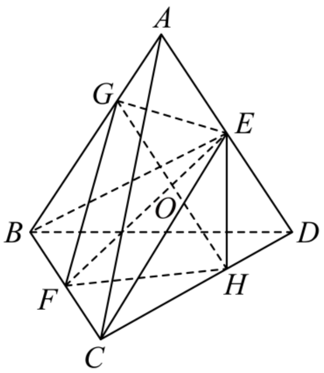
【解析】对于A，当平面$\alpha$过$AD$或$BC$时，截面为三角形.

易知正四面体关于平面$ADF$对称，将平面$\alpha$从平面$ADF$开始旋转与$AB$交于点$G$时，

由对称性可知，此时平面$\alpha$与$CD$交于点$H$，且$AG=DH$，

此时截面为四边形$EGFH$，且注意到当$G,H$分别为$AB,CD$的中点时，此时满足$AG=DH$，

且$GF//AC,AC//EH,GF=EH=\frac{1}{2}AC$，即此时截面四边形$EGFH$是平行四边形，故A错误；




对于BC，设$AG=m\left(0\le m\le 2\right)$，由余弦定理得$GE=\sqrt{m^2+1-m}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，

$GF=\sqrt{\left(2-m\right)^2+1-\left(2-m\right)}=\sqrt{\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，

由两点间距离公式知，$GE+GF$表示动点$\left(m,0\right)$到定点$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和$\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的距离之和，

当三点共线时取得最小值$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$，

由二次函数单调性可知，当$m=0$或$m=2$时，$GE+GF$取得最大值$1+\sqrt{3}$，

所以截面多边形$\tau$周长的取值范围是$\left[4,2+2\sqrt{3}\right]$，故BC错误；

对于D，记$GH$与$EF$的交点为$O$，由对称性$\angle EFG=\angle EFH$，$FG=FH$，

所以$EF\perp GH$，$S_{EGFH}=\frac{1}{2}EF\cdot GH$，

因为$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{3}$，

所以$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{2}$，所以$S_{EGFH}=\frac{\sqrt{2}}{2}GH$，