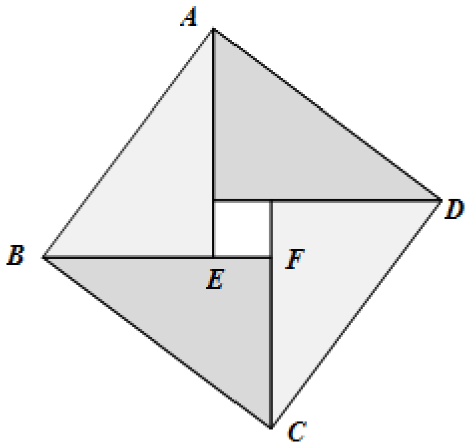
第 16 讲　向量小题 14 类

【题型一】 向量基础："绕三角形"（基底拆分）

【典例分析】

我国东汉末数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副"弦图"给出了勾股定理的证明，后人称其为"赵爽弦图"，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图所示.在"赵爽弦图"中，若 $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{BA}=\vec{b},\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EF}$，则 $\overrightarrow{BF}=$（　　）

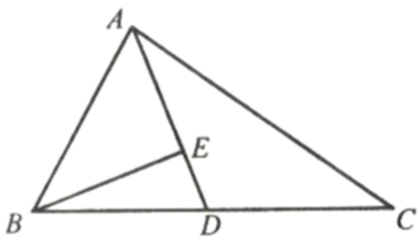


A. $\frac{12}{25}\vec{a}+\frac{9}{25}\vec{b}$　　B. $\frac{16}{25}\vec{a}+\frac{12}{25}\vec{b}$

C. $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$　　D. $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$

【变式演练】

1.如图，在$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 中点，E 在线段 AD 上，且 $AE=2ED$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　　）

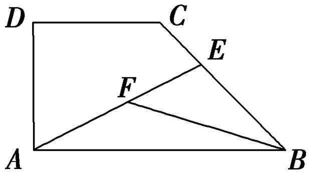


A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2.如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2DC$，E 为 BC 边上一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$，$F$ 为 AE

的中点，则 $\overrightarrow{BF}=$（　　）



A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　　　B．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C．$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　　　D．$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

山东省淄博市桓台第一中学 2019-2020 学年高一下学期期中考试数学试题

3. D，E，F 为 $\triangle ABC$ 所在平面内三点，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，则 $\overrightarrow{EF}=$（　　）.

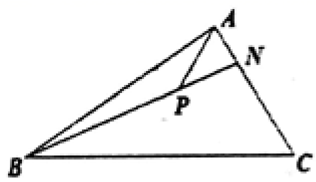
A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　　　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$

【题型二】　系数未知型“绕三角形”

【典例分析】

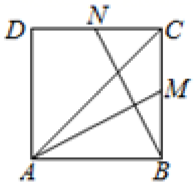
如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{2}{9}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$，则实数 m 的值为（　　）



A．$\frac{1}{9}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．1　　　　D．3

【变式演练】

1.如图，正方形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 BC、CD 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）

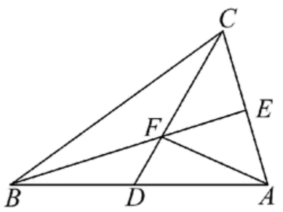


A．2　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{8}{5}$

2.在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别满足 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$．若 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，则实数 $\lambda+\mu$ 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$-\frac{7}{5}$　　D．$\frac{7}{5}$

3.如图，ΔABC 中，$AD=DB, AE=EC, CD$ 与 BE 交于 F，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=x\vec{a}+y\vec{b}$，则 $\left(x,y\right)$ 为

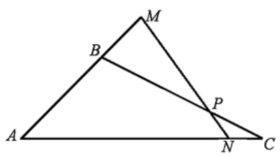


A．$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$

【题型三】　求最值型“绕三角形”

【典例分析】

在 ΔABC 中，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}$，过点 P 的直线与 AB 、AC 所在的直线分别交于点 M 、N，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\left(\lambda>0,\mu>0\right)$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{5}{2}$

【变式演练】

1.已知O是ΔABC内一点，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，点$M$在$\Delta OBC$内（不含边界），若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+2\mu$的取值范围是（　　）

A．$\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　B．$(1,2)$　　C．$\left(\frac{2}{3},1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},1\right)$

2.在ΔABC中，$|AC|=2,|AB|=2,\angle BAC=120^\circ,\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，$M$为线段$EF$的中点，若$\left|\overrightarrow{AM}\right|=1$，则$\lambda+\mu$的最大值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　C．2　　D．$\frac{\sqrt{21}}{3}$

3.ΔABC中，D为AB的中点，点F在线段CD（不含端点）上，且满足$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\left(x,y\in R\right)$，则$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$的最小值为（　　）

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．$2+2\sqrt{2}$　　C．6　　D．8

【题型四】　数量积

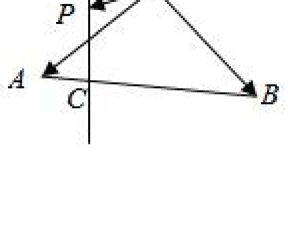
【典例分析】

已知菱形$ABCD$边长为2，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\lambda\in R$，若$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=-3$，则$\lambda$的值为(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

【变式演练】

1.如图，在等腰直角$\triangle ABO$中，$OA=OB=1$，C为靠近点A的线段AB的四等分点，过C作AB的垂线l，P为垂线l上任意一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$的值是(　　)



A．$-\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．-2　　　　D．2

2.在ΔABC中，$AB=AC$，点M在BC上，$4\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$，$N$是$AM$的中点，$\sin\angle BAM=\frac{1}{3}$，$AC=2$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=$

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

3.已知$\triangle ABC$是边长为3的正三角形，点M是AB的中点，点N在AC边上，且$AN=2NC$，则$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}=$（　　）.

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B．$-\frac{3}{2}$　　　　C．$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$-\frac{9}{2}$

【题型五】　数量积最值型

【典例分析】

在ΔABC中，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=2$，且$\frac{\pi}{3}\le B\le\frac{2\pi}{3}$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围是（　　）

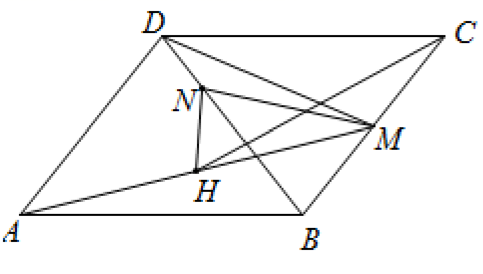
A．$[-2,1)$　　　　B．$\left[\frac{2}{3},1\right)$　　　　C．$\left[-2,\frac{2}{3}\right)$　　　　D．$\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

【变式演练】

1.已知四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，$AB=BC=\frac{BD}{2}=2$，$AC=CD=2\sqrt{3}$，点E在四边形$ABCD$上运动，则$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$的最小值是（　　）

A．3　　　　B．-1　　　　C．-3　　　　D．-4

2.如图，在平行四边形$ABCD$中，M是BC的中点，且$AD=DM$，N是线段BD上的动点，过点N作AM的垂线，垂足为H，当$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}$最小时，$\overrightarrow{HC}=$（　　）



A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3. 在ΔABC中，$A=\frac{\pi}{3}, AC:BC=2:3$，点$D$为线段$AB$上一动点，若$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$最小值为$-\frac{3}{4}$，则$\Delta ABC$的面积为__________.

【题型六】 向量模

【典例分析】

若向量$\vec{a}=(x,2)$，$\vec{b}=(-3,y)$，$\vec{c}=(-1,-2)$，且$(\vec{a}-\vec{c})\perp(\vec{b}+\vec{c})$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为________.

【变式演练】

1.已知$\vec{a},\vec{b}$是平面上的单位向量，则$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|+\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$的最大值是_________.

2.已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\vec{b}=(2,1)$，且$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\ (\lambda<0)$，则$\left|\sqrt{5}\vec{a}+\vec{b}\right|=$______.

3.设$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|$的最大值是________

【题型七】 投影向量

【典例分析】

已知平面向量$\vec{e_1}$和$\vec{e_2}$满足$\left|3\vec{e_1}-\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_1}\right|=2$，则$\vec{e_1}$在$\vec{e_2}$方向上的投影的最小值为__________.

【变式演练】

1.已知点$A(-1,1)$、$B(1,2)$、$C(-2,-1)$、$D(3,4)$,则向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影为　（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

2.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=1,\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|\le 2$则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　B. $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　C. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

【题型八】 向量技巧 1：极化恒等式

【典例分析】

如图,在△ABC中,D是 BC的中点,E,F是 AD上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是________.

【变式演练】

1.已知△ABC是边长为 2 的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$的最小值是（　　）

$A.-2$　　$B.-\frac{3}{2}$　　$C.-\frac{4}{3}$　　$D.-1$

2.已知圆C的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，点P在直线$y=x+3$上，线段AB为圆C的直径，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为

A．2　　B．$\frac{5}{2}$　　C．3　　D．$\frac{7}{2}$

3、已知球O的半径为 1，A,B是球面上的两点，且$AB=\sqrt{3}$，若点P是球面上任意一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是 A. $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　D. $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

【题型九】 向量技巧 2：等和线

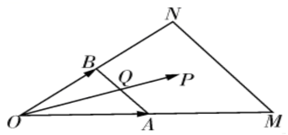
【典例分析】

在ΔABC中，已知 D 是 AB 边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda$=

A．$-\frac{1}{3}$　B．$-\frac{2}{3}$　C．$\frac{1}{3}$　D．$\frac{2}{3}$

【变式演练】

1.如图,在ΔOMN中，A、B分别是OM、ON的中点,若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（$x$，$y\in R$),且点$P$落在四边形$ABNM$内（含边界)，则$\frac{y+1}{x+y+2}$的取值范围是（　　）

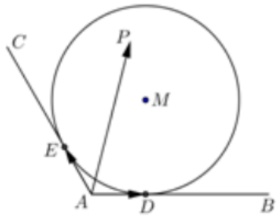


A．$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　B．$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$ C．$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ D．$\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$

2.如图，$Rt\Delta ABC$ 中，P 是斜边 BC 上一点，且满足：$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$，点 M,N 在过点 P 的直线上，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC},(\lambda,\mu>0)$，则 $\lambda+2\mu$ 的最小值为（　　）

A．2　B．$\frac{8}{3}$　C．3　D．$\frac{10}{3}$

3.如图，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，圆 M 与 AB、AC 分别相切于点 D、E，$AD=1$，点 P 是圆 M 及其内部任意一点，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AE}(x、y\in R)$，则 $x+y$ 的取值范围是（　　）



A．$[1,4+2\sqrt{3}]$　B．$[4-2\sqrt{3},4+2\sqrt{3}]$　C．$[1,2+\sqrt{3}]$　D．$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$

【题型十】 向量技巧 3：奔驰定理与面积

【典例分析】

设 O 为 ΔABC 所在平面内一点，满足 $2\overrightarrow{OA}-7\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔABC 的面积与 ΔBOC 的面积的比值为

A．6　B．$\frac{8}{3}$　C．$\frac{12}{7}$　D．4

【变式演练】

1.设 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，过 G 作直线 l 分别交 AB,AC（不与端点重合）于 P,Q，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AC}$，若 ΔPAG 与 ΔQAG 的面积之比为 $\frac{2}{3}$，则 $\mu=$

A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{2}{3}$　C．$\frac{3}{4}$　D．$\frac{5}{6}$

2.O 为三角形内部一点，a、b、c 均为大于 1 的正实数，且满足 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$，若 $S_{\Delta OAB}$、$S_{\Delta OAC}$、$S_{\Delta OBC}$ 分别表示 ΔOAB、ΔOAC、ΔOBC 的面积，则 $S_{\Delta OAB}:S_{\Delta OAC}:S_{\Delta OBC}$ 为（　　）

A. $(c+1):(b-1):a$ B. $c:b:a$ C. $\frac{1}{a}:\frac{1}{b-1}:\frac{1}{c+1}$ D. $c^2:b^2:a^2$

3.已知点M是$\triangle ABC$所在平面内一点，满足$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则$\Delta ABM$与$\Delta BCM$的面积之比为（　　）

A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 3 D. $\frac{1}{3}$

【题型十一】 解析几何中的向量

【典例分析】

已知点$M(1,0)$，A,B是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的动点，且$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$，则$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{BA}$的取值范围是（　　）

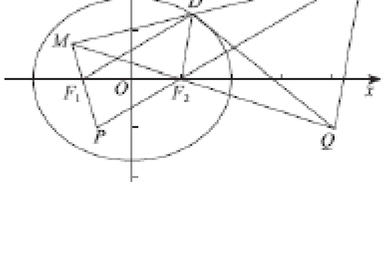
A. $[\frac{2}{3},1]$ B. $[1,9]$ C. $[\frac{2}{3},9]$ D. $[\frac{\sqrt{6}}{3},3]$

【变式演练】

1.在平面直角坐标系xOy中，设直线$y=-x+2$与圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$交于A,B两点，O为坐标原点，若圆上一点C满足$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则$r=$

A. $2\sqrt{2}$ B. 5 C. 3 D. $\sqrt{10}$

2.如图所示，已知椭圆C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，点M与C的焦点不重合，分别延长MF_1,MF_2到P,Q，使得$\overrightarrow{MF_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_1P}$，$\overrightarrow{MF_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$，$D$是椭圆$C$上一点，延长$MD$到$N$，若$\overrightarrow{QD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{QM}+\frac{2}{5}\overrightarrow{QN}$，则$|PN|+|QN|=$（　　）



A．10　B．5　C．6　D．3

【题型十二】 向量四心

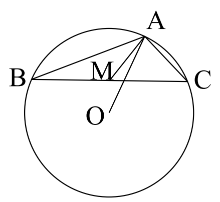
【典例分析】

已知 O，N，P 在 ΔABC 所在平面内，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|,\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则点 O，N，P 依次是 ΔABC 的　（　　）

A、重心 外心 垂心　　B、重心 外心 内心　　C、外心 重心 垂心　　D、外心 重心 内心

【变式演练】

1.已知 ΔABC 外接圆的圆心为 O，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{2}$，A 为钝角，M 是 BC 边的中点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=$（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2.已知 O 是平面上的一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos C}),\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的(　　)

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

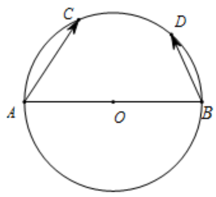
3.已知 O 是平面上的一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos C})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的(　　)

A. 重心　　　B. 垂心　　　C. 外心　　　D. 内心

【题型十三】 综合应用

【典例分析】

已知C，D是半径为1的圆O上的动点，线段AB是圆O的直径，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值范围是（　　）



A．$[-2,\frac{1}{2}]$　　B．$[-2,0]$　　C．$[-4,\frac{1}{2}]$　　D．$[-4,0]$

【变式演练】

1.．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=60°$，且$\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{b}(t\in R)$，则$|\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{a}|$的最小值为（　　）

A．$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　　B．4　　C．$2\sqrt{13}$　　D．$\sqrt{13}$

2.设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为非零不共线向量，若$|\vec{a}-t\vec{c}+(1-t)\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{c}|(t\in R)$，则（　　）

A．$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{c})$　　B．$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{b}+\vec{c})$

C．$(\vec{a}+\vec{c})\perp(\vec{a}+\vec{b})$　　D．$(\vec{a}-\vec{c})\perp(\vec{b}+\vec{c})$

3.已知平面向量$\vec{\alpha_k}(k=1,2,...,6)$满足：$|\vec{\alpha_k}|=k(k=1,2,...,6)$，且$\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}+...+\vec{\alpha_6}=\vec{0}$，则$(\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2})\cdot(\vec{\alpha_5}+\vec{\alpha_6})$的最大值是（　　）

A．9　　B．10　　C．12　　D．14

【题型十四】 超难小题

【典例分析】

已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，向量$\vec{c}$满足$\vec{c}=\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}(0<\lambda<1)$，且$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，记向量$\vec{c}$在向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向上的投影分别为$x$、$y$.现有两个结论：①若$\lambda=\frac{1}{3}$，则$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$；②$x^2+y^2+xy$的最大值为$\frac{3}{4}$.则正确的判断是（　　）

A．①成立，②成立　　B．①成立，②不成立

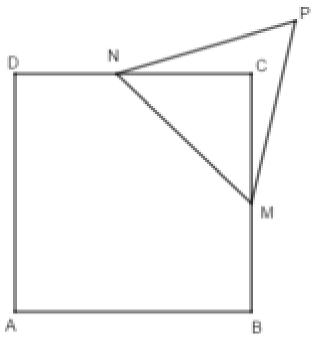
C．①不成立，②成立　　D．①不成立，②不成立

【变式演练】

1.已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，满足$|\vec{a}+\vec{b}|=1$．平面向量$\vec{c}$在$\vec{a},\vec{b}$上的投影之和为2，则$\left|\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right|$的最小值是___.

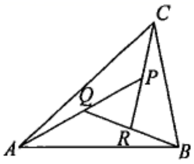
2.已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足：$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，$|\vec{c}|=2|\vec{a}-\vec{c}|=2$，则$|\vec{b}-\vec{c}|$的最小值是________.

3.如图，在边长为2的正方形*ABCD*中，*M*，*N*分别为边*BC*，*CD*上的动点，以*MN*为边作等边$\triangle PMN$，使得点*A*，*P*位于直线*MN*的两侧，则$\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为______.



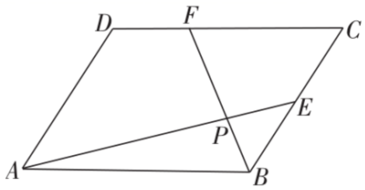
【课后练习】

1.如图所示，在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$AP$的中点为$Q$，$BQ$的中点为$R$，$CR$的中点恰为$P$，则$\overrightarrow{AP}=$（）



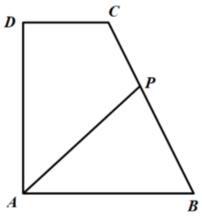
A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　　B．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$

2.如图，四边形*ABCD*是平行四边形，*E*是*BC*的中点，点*F*在线段*CD*上，且$CF=2DF$，*AE*与*BF*交于点*P*，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}$，则$\lambda=$（　　）



A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{2}{3}$

3.如图，直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//CD,\angle BAD=90°$，$AD=AB=2,CD=1$，动点 P 在线段 BC 上运动，且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}\left(m,n\in \mathrm{R}\right)$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值是（　　）

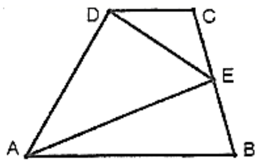


A．3　　B．$3+2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4+2\sqrt{2}$

4.边长为 6 的正三角形 ABC 中，E 为 BC 中点，F 在线段 AC 上且 $AF=\frac{1}{2}FC$，若 AE 与 BF 交于 M，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$（　　）

A．-12　　B．-9　　C．$-\frac{15}{2}$　　D．$-\frac{27}{4}$

5.如图梯形 $ABCD$，$AB//CD$ 且 $AB=5$，$AD=2DC=4$，E 在线段 BC 上，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}$ 的最小值为



A．$\frac{15}{13}$　　B．$\frac{95}{13}$　　C．15　　D．$-\frac{15}{13}$

6. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，O 为 BD 的中点，且 $OA=3$，$OC=5$．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-7$，　　则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的值是________．

7.已知点 P 为 ABC 内一点，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则△$APB$，△$APC$，△$BPC$ 的面积之比为（　　）

A．$9:4:1$　　　B．$1:4:9$　　　C．$3:2:1$　　　D．$4:2:1$

8.已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若 $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$(其中 P 为平面上任意一点)，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　　B. 内心　　　C. 重心　　　D. 垂心

9. 在 $Rt\Delta AOB$ 中，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{5},\left|\overrightarrow{OB}\right|=2\sqrt{5}, AB$ 边上的高线为 OD，点 E 位于线段 OD 上，若 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EA}=\frac{3}{4}$，则向量 $\overrightarrow{EA}$ 在向量 $\overrightarrow{OD}$ 上的投影为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　　B．1　　　C．1 或 $\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$

10.$\triangle OAB$ 是边长为 6 的正三角形，点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，且 $m>0$，$n>0$，$2m+3n=4$，则 $\left|\overrightarrow{OC}\right|$ 的取值范围是_________．

11.已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，向量 $\vec{p}$ 满足 $\vec{p}=(2-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}$，当 $\vec{p}$ 与 $\vec{p}-\vec{a}$ 的夹角余弦值取得最小值时，实数 λ 的值为___________．

12.在平面直角坐标系 xOy 中，若抛物线 C:$y^2=2px$($p>0$)的焦点为 F，直线 $x=3$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点，|AF|=4，圆 E 为 $\triangle FAB$ 的外接圆，直线 OM 与圆 E 切于点 M，点 N 在圆 E 上，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围是（　　　）

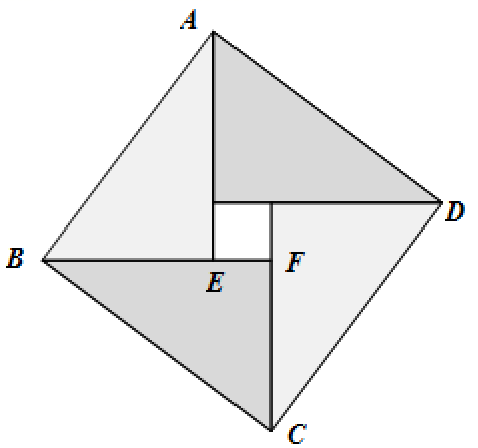
A．$\left[-\frac{63}{25},9\right]$　　　B．$[-3,21]$　　　C．$\left[\frac{63}{25},21\right]$　　　D．$[3,27]$

第 16 讲　向量小题 14 类

【题型一】 向量基础："绕三角形"（基底拆分）

【典例分析】

我国东汉末数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副"弦图"给出了勾股定理的证明，后人称其为"赵爽弦图"，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图所示.在"赵爽弦图"中，若 $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{BA}=\vec{b},\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EF}$，则 $\overrightarrow{BF}=$（　　）



A. $\dfrac{12}{25}\vec{a}+\dfrac{9}{25}\vec{b}$　　B. $\dfrac{16}{25}\vec{a}+\dfrac{12}{25}\vec{b}$

C. $\dfrac{4}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$　　D. $\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{4}{5}\vec{b}$

【答案】B

【分析】

利用平面向量的加法法则和数乘向量求解.

【详解】

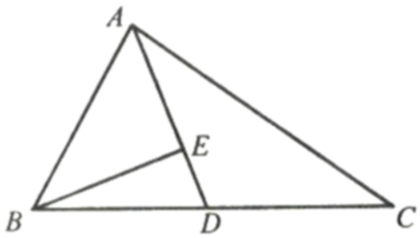
由题得 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}\right)$

即 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}\right)$，解得 $\overrightarrow{BF}=\dfrac{16}{25}\overrightarrow{BC}+\dfrac{12}{25}\overrightarrow{BA}$，即 $\overrightarrow{BF}=\dfrac{16}{25}\vec{a}+\dfrac{12}{25}\vec{b}$，

故选：B

【变式演练】

1.如图，在$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 中点，E 在线段 AD 上，且 $AE=2ED$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　　）



A． $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　**B．** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

C． $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　**D．** $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

【答案】 B

【分析】

求得$\overrightarrow{AD}$关于$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的表达式，利用平面向量的减法法则可得出$\overrightarrow{BE}$关于$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的表达式.

【详解】

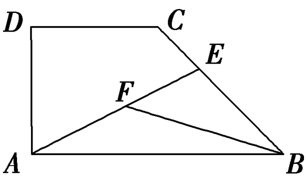
$\because D$为BC的中点，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

$\because AE=2ED$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

故选：B.

2.如图，在直角梯形$ABCD$中，$AB=2AD=2DC$，E为BC边上一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$，$F$为$AE$的中点，则$\overrightarrow{BF}=$（　　）



A． $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　**B．** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C． $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　**D．** $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

【答案】 C

【分析】

根据平面向量的三角形法则和共线定理即可得答案.

【详解】

解：$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}\right)=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$

$=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ 故选：C.

3. D，E，F 为 $\triangle ABC$ 所在平面内三点，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，则 $\overrightarrow{EF}=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　**B.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

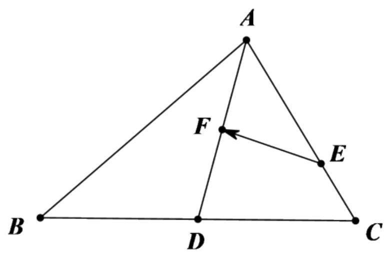
C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　**D.** $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$

【答案】D

【分析】

画出图形，根据向量线性运算求解即可.

解：由题知，D 为 BC 中点，E 为 AC 三等分点且靠近 C 点，F 为 AD 中点，如图，



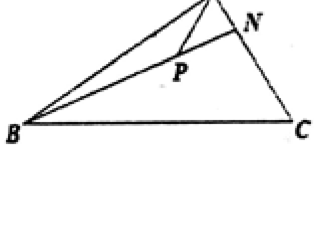
所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$．故选：D.

【题型二】 系数未知型“绕三角形”

【典例分析】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{2}{9}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$，则实数 m 的值为

(　　)



A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．1　　D．3

【答案】A

【解析】

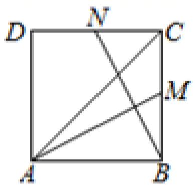
因为$\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{2}{9}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，设$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BN}$，而

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+t(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AB}+t(\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC})=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}t\overrightarrow{AC}$，所以$m=1-t$且$\frac{t}{4}=\frac{2}{9}$，

故$m=1-t=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$，应选答案 A.

【变式演练】

1.如图，正方形$ABCD$中，M、N分别是BC、CD的中点，若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}$,则$\lambda+\mu=$（　　）



A．2　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{8}{5}$

【答案】D

【解析】

试题分析：取向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$作为一组基底，则有

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+\mu(\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}$$

又$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，所以$\lambda-\frac{1}{2}\mu=1,\mu+\frac{1}{2}\lambda=1$，即$\lambda=\frac{6}{5},\mu=\frac{2}{5},\lambda+\mu=\frac{8}{5}$.

2.在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别满足$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$．若$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，则实数$\lambda+\mu$的值为（　　）

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$-\frac{7}{5}$　　D．$\frac{7}{5}$

【答案】B

【分析】

设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，由 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，得到 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$，结合平面向量的基本定理，化简得到 $-\vec{a}+\vec{b}=\left(\lambda+\frac{1}{3}\mu\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\lambda+\mu\right)\vec{b}$，即可求解.

【详解】

由题意，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则在平行四边形 $ABCD$ 中，

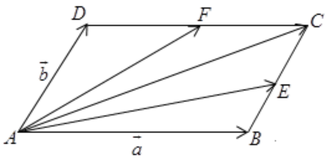
因为 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以点 E 为 BC 的中点，点 F 在线段 DC 上，且 $CF=2DF$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$，

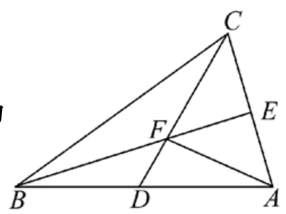
又因为 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，

所以 $-\vec{a}+\vec{b}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}=\lambda\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\mu\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\lambda+\frac{1}{3}\mu\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\lambda+\mu\right)\vec{b}$，

所以 $\begin{cases}\lambda+\frac{1}{3}\mu=-1\\ \frac{1}{2}\lambda+\mu=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{8}{5}\\ \mu=\frac{9}{5}\end{cases}$，所以 $\lambda+\mu=\frac{1}{5}$。故选：B.



3.如图，ΔABC 中，$AD=DB,AE=EC,CD$ 与 BE 交于 F，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=x\vec{a}+y\vec{b}$，则 (x,y) 为

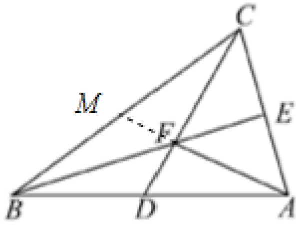


A. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　**B.** $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　**C.** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　**D.** $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$

【答案】A

【分析】延长 AF 交 BC 于点 M，由于 $AD=DB,AE=EC,CD$ 与 BE 交于 F，可知：点 F 是 ΔABC 的重心，利用三角形重心的性质和向量的平行四边形法则即可得到答案.

【详解】延长 AF 交 BC 于点 M；



∵ $AD=DB,AE=EC,CD$ 与 BE 交于 F，$\therefore$ 点 F 是 ΔABC 的重心，$\therefore\ \overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

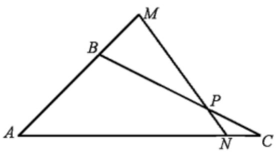
$\therefore\ \overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ 又$\because$ $\overrightarrow{AF}=x\vec{a}+y\vec{b}$

$\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$，则$\left(x,y\right)$为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$；故答案选 A

【题型三】 求最值型“绕三角形”

【典例分析】

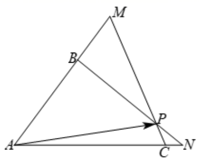
在ΔABC中，点P满足$\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}$，过点$P$的直线与$AB$、$AC$所在的直线分别交于点$M$、$N$，若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\left(\lambda>0,\mu>0\right)$，则$\lambda+\mu$的最小值为（　　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$　　　　**B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　　　**C.** $\frac{3}{2}$　　　　**D.** $\frac{5}{2}$

【答案】B

【分析】由题意得出$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，再由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}$，可得出$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{4\mu}\overrightarrow{AN}$，由三点共线得出$\frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu}=1$，将代数式$\lambda+\mu$与$\frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu}$相乘，展开后利用基本不等式可求出$\lambda+\mu$的最小值.

【详解】如下图所示：

$\because\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}$，即$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)$，$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\because\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\left(\lambda>0,\mu>0\right)$，$\therefore\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AN}$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{4\mu}\overrightarrow{AN}$，$\because M$、$P$、$N$三点共线，则$\frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu}=1$.

$\therefore \lambda+\mu=(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu}\right)=\frac{3\lambda}{4\mu}+\frac{\mu}{4\lambda}+1\geq 2\sqrt{\frac{3\lambda}{4\mu}\cdot\frac{\mu}{4\lambda}}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，

当且仅当 $\mu=\sqrt{3}\lambda$ 时，等号成立，因此，$\lambda+\mu$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，故选：B.

【变式演练】

1.已知 O 是 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，点 M 在 ΔOBC 内（不含边界），若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+2\mu$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　　**B.** $(1,2)$　　　**C.** $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　　**D.** $\left(\frac{1}{2},1\right)$

【答案】B

【分析】

根据 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 可知 O 为 ΔABC 的重心; 根据点 M 在 ΔOBC 内, 判断出当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小；当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 的值最大，因不含边界，所以取开区间即可.

【详解】因为 O 是 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 所以 O 为 ΔABC 的重心

M 在 ΔOBC 内（不含边界），且当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小，此时

$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 所以 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{1}{3}$，即 $\lambda+2\mu=1$

当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 最大，此时 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$ 所以 $\lambda=0,\mu=1$，即 $\lambda+2\mu=2$

因为 M 在 ΔOBC 内且不含边界所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$ 所以选 B

2.在 ΔABC 中，$\left|AC\right|=2,\left|AB\right|=2,\angle BAC=120^\circ,\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，$M$ 为线段 EF 的中点，若 $\left|\overrightarrow{AM}\right|=1$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　　**B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　　**C.** 2　　　**D.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$

【答案】C

【分析】化简得到 $\overrightarrow{AM}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{2}\overrightarrow{AC}$，根据 $\left|\overrightarrow{AM}\right|=1$ 得到 $\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu=1$，得到 $\lambda+\mu$ 的最大值.

【详解】

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{2}\overrightarrow{AC}$，

故 $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2=\lambda^2+\mu^2+\frac{\lambda\mu}{2}\times 4\cos120^\circ=\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu=1$

故$1=\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu=(\lambda+\mu)^2-3\lambda\mu\geq(\lambda+\mu)^2-\frac{3}{4}(\lambda+\mu)^2$，故$\lambda+\mu\leq 2$.

当$\lambda=\mu=1$时等号成立.故选：C.

3.ΔABC中， D为AB的中点，点F在线段CD（不含端点）上，且满足$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in R)$，则$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$的最小值为（　　）

A．$3+2\sqrt{2}$　　**B．**$2+2\sqrt{2}$　　**C．6**　　**D．8**

【答案】D

【解析】$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=2x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}$，因为$C, F, D$三点共线，所以$2x+y=1$且$x>0, y>0$，

则$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(2x+y)=4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 4+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=8$，当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即$x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$时，

上式取等号，故$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$有最小值 8，故选 D.

【题型四】 数量积

【典例分析】

已知菱形$ABCD$边长为2，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\lambda\in$R，若$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=-3$，则$\lambda$的值为(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　**B．**$-\frac{1}{2}$　　**C．**$\frac{1}{3}$　　**D．**$-\frac{1}{3}$

【答案】A

【分析】根据向量的基本定理，结合数量积的运算公式，建立方程即可得到结论.

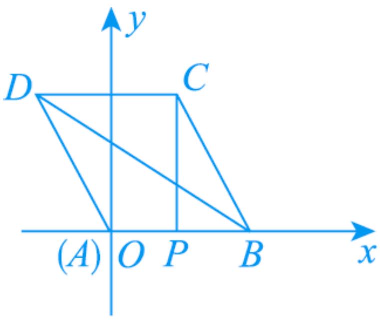
【详解】法一：由题意可得$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times 2\cos\frac{\pi}{3}=2$，

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot[(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BC}]=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot[(\lambda-1)\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}]$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}^2$

$=(1-\lambda)\cdot 4-2+2(1-\lambda)-4=-6\lambda=-3$，$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$，故选 A.

法二：建立如图所示的平面直角坐标系，



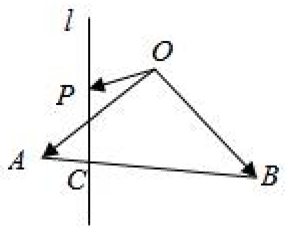
则 $B(2,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，$D(-1,\sqrt{3})$.

令 $P(x,0)$，由 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=(-3,\sqrt{3})\cdot(x-1,-\sqrt{3})=-3x+3-3=-3x=-3$ 得 $x=1$.

$\because\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}$.故选 A.

【变式演练】

1.如图，在等腰直角$\triangle ABO$中，$OA=OB=1$，C 为靠近点 A 的线段 AB 的四等分点，过 C 作 AB 的垂线 l，P 为垂线 l 上任意一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$的值是(　　)



A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

【答案】B

【分析】

根据题意，直接利用向量共线和向量的线性运算及夹角公式求出结果.

【详解】

在等腰直角$\triangle ABO$中，$OA=OB=1$，C 为靠近点 A 的线段 AB 的四等分点，

过 C 作 AB 的垂线 l，P 为垂线 l 上任意一点，

则：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CP}$，

所以：$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CP}\right)\cdot\overrightarrow{BA}$，$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}$，

$=\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ-\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+0$，$=\dfrac{1}{2}$．故选 B.

2.在ΔABC中，$AB=AC$，点M在BC上，$4\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$，$N$是$AM$的中点，$\sin\angle BAM=\dfrac{1}{3}$，$AC=2$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=$

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】A

【解析】$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC})=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\dfrac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

在ΔABM和ΔAMC中，由正弦定理可得$\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}=\dfrac{CM}{\sin\angle CAM}\Rightarrow\sin\angle CAM=1$,

$\therefore\cos\angle BAC=\cos(\angle BAM+\angle CAM)=\cos(\angle BAM+\dfrac{\pi}{2})=-\sin\angle BAM=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC})\cdot(\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\dfrac{7}{8}\overrightarrow{AC})=\dfrac{9}{32}\times4-\dfrac{7}{32}\times4-\dfrac{9}{16}\times2\times2\times(-\dfrac{1}{3})=1$.

3.已知$\triangle ABC$**是边长为3的正三角形，点**M**是**AB**的中点，点**N**在**AC**边上，且**$AN=2NC$**，则**$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}=$（　　）．

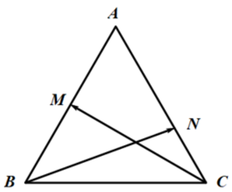
A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　**B．**$-\dfrac{3}{2}$　　　　**C．**$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　**D．**$-\dfrac{9}{2}$

【答案】D

【分析】

用$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$分别表示出$\overrightarrow{BN}$和$\overrightarrow{CM}$，然后根据向量的数量积计算公式求解出$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$的结果.

【详解】如下图所示：



因为M是AB的中点，所以$\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$，

又因为$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2-\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\dfrac{1}{6}\times9-\dfrac{2}{3}\times9=-\dfrac{9}{2}$，故选：D.

【题型五】 数量积最值型

【典例分析】

在ΔABC中，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=2$，且$\frac{\pi}{3}\le B\le\frac{2\pi}{3}$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围是（　　）

A． $[-2,1)$　　**B．** $\left[\frac{2}{3},1\right)$　　**C．** $\left[-2,\frac{2}{3}\right)$　　**D．** $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

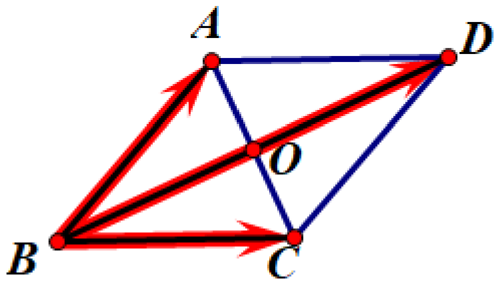
【答案】D

【分析】

由$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，可以得到$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=0$，利用平面向量加法的几何意义，可以构造平行四边形$BCDA$，根据$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=0$，可知平行四边形$BCDA$是菱形，这样在$Rt\Delta BOA$中，可以求出菱形的边长，求出$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的表达式，利用$\frac{\pi}{3}\le B\le\frac{2\pi}{3}$，构造函数，最后求出$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围.

【详解】

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=0\Rightarrow\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=0$，以$BC,BA$为邻边作平行四边形$BCDA$，如下图：



所以$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$，因此$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow CA\perp BD$，所以平行四边形$BCDA$是菱形，设$CA\cap BD=O$，$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=2$，所以$\left|\overrightarrow{BD}\right|=2\Rightarrow BO=1$，在$Rt\Delta BOA$中，

$\cos\angle ABO=\frac{BO}{AB}\Rightarrow AB=\frac{1}{\cos\frac{\angle ABC}{2}}$　$y=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{\cos\frac{\angle ABC}{2}})^2\cdot\cos\angle ABC=\frac{2\cos\angle ABC}{1+\cos\angle ABC}$，

设$x=\cos\angle ABC\because\frac{\pi}{3}\le\angle ABC\le\frac{2}{3}\pi\therefore x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，所以当$x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$时，

$y=\frac{2x}{1+x}\Rightarrow y'=\frac{2}{(1+x)^2}>0$，$y=\frac{2x}{1+x}$是增函数，故$y\in[-2,\frac{2}{3}]$，因此本题选D.

【变式演练】

1.已知四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，$AB=BC=\frac{BD}{2}=2$，$AC=CD=2\sqrt{3}$，点E在四边形$ABCD$