
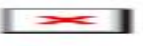

















## 大学数学习题及答案

一 填空题:

- 1 一阶微分方程的通解的图像是\_\_\_\_\_维空间上的一族曲线.
- 2 二阶线性齐次微分方程的两个解  $y_1(x);y_2(x)$ 为方程的基本解组充分必要条件是\_\_\_\_\_.
- 3 方程  的基本解组是\_\_\_\_\_.
- 4 一个不可延展解的存在区间一定是\_\_\_\_\_区间.
- 5 方程  的常数解是\_\_\_\_\_.
- 6 方程  一个非零解为  $x_1(t)$ ,经过变换\_\_\_\_\_
- 7 若  $\Phi_0$ 是线性方程组  的基解矩阵,则此方程组的任一解  $\Phi_0$ =\_\_\_\_\_.
- 8 一曲线上每一占切线的斜率为该点横坐标的 2 倍,则此曲线方程为\_\_\_\_\_.
- 9 满足\_\_\_\_\_条件的解,称为微分方程的特解.
- 10 如果在微分方程中,自变量的个数只有一个我们称这种微分方程为\_\_\_\_\_.
- 11 一阶线性方程  有积分因子(  ).
- 12 求解方程  的解是( \_\_\_\_\_ ).
- 13 已知(  ) 为恰当方程,则  $\square$ =\_\_\_\_\_.
- 14  $\square$   ,  ,  由存在唯一性定理其解的存在区间是( \_\_\_\_\_ ).
- 15 方程  的通解是( \_\_\_\_\_ ).
- 16 方程  的阶数为\_\_\_\_\_.
- 17 若向量函数  在区间 D 上线性相关,则它们的伏朗斯基行列式  $w(x)$ =\_\_\_\_\_.
- 18 若  $P(X)$ 是方程组  的基本解方阵则该方程组的通解可表示为\_\_\_\_\_.
19. 方程  所有常数解是\_\_\_\_\_.
20. 方程  的基本解组是\_\_\_\_\_.
21. 方程  满足解的存在唯一性定理条件的区域是\_\_\_\_\_.

22. 函数组  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  在区间 I 上线性无关的 \_\_\_\_\_ 条件是它们的朗斯基行列式在区间 I 上不恒等于零.

23. 若  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  是二阶线性齐次微分方程的基本解组, 则它们 \_\_\_\_\_ 共同零点.

二 单项选择:

1 方程  $y'' + y = 0$  满足初值问题解存在且唯一定理条件的区域是( ).

- (A) 上半平面 (B)  $x > 0$  平面 (C) 下半平面 (D) 除 y 轴外的全平面

2 方程  $y'' + y = 0$  ( ) 奇解.

- (A) 有一个 (B) 有两个 (C) 无 (D) 有无数个

3 在下列函数中是微分方程  $y'' + y = 0$  的解的函数是( ).

- (A)  $\sin x$  (B)  $\cos x$  (C)  $e^{ix}$  (D)  $e^{-ix}$

4 方程  $y'' + y = 0$  的一个特解  $y = \sin x$  形如( ).

- (A)  $\sin x$  (B)  $\cos x$  (C)  $e^{ix}$  (D)  $e^{-ix}$

5  $y'' + y = 0$  连续可微是保证方程  $y'' + y = 0$  解存在且唯一的( )条件.

- (A) 必要 (B) 充分 (C) 充分必要 (D) 必要非充分

6 二阶线性非齐次微分方程的所有解( ).

- (A) 构成一个 2 维线性空间 (B) 构成一个 3 维线性空间  
(C) 不能构成一个线性空间 (D) 构成一个无限维线性空间

7 方程  $y'' + y = 0$  过点(0,0)有( ).

- (A) 无数个解 (B) 只有一个解 (C) 只有两个解 (D) 只有三个解

8 初值问题  $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$  在区间  $-\infty < x < \infty$  上的解是( ).

- (A)  $\sin x$  (B)  $\cos x$  (C)  $e^{ix}$  (D)  $e^{-ix}$

9 方程  $y'' + y = 0$  是( ).

- (A) 一阶非线性方程 (B) 一阶线性方程  
(C) 超越方程 (D) 二阶线性方程

10 方程  $y'' + y = 0$  的通解是( ).

- (A)  $y = \cos x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  (D)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$

11 方程  $y'' + y = 0$  的一个基本解组是( ).

- (A)  $\cos x, \sin x$  (B)  $\cos x, \sin x, x$  (C)  $\cos x, \sin x, x^2$  (D)  $\cos x, \sin x, x^2, x$

12 若  $y_1$  和  $y_2$  是方程  $y'' + y = 0$  的两个解, 则  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  ( $C_1, C_2$  为任意常数)

- (A) 是该方程的通解 (B) 是该方程的解  
(C) 不一定是该方程的通解 (D) 是该方程的特解

13 方程  $y'' + y = 0$  过点(0,0)的解为  $y = \sin x$ , 此解存在( ).

- (A)  $x \in (-\infty, +\infty)$  (B)  $x \in (0, \pi)$  (C)  $x \in (\pi, 2\pi)$  (D)  $x \in (2\pi, 3\pi)$

14 方程  $y'' + y = 0$  是( ).

- (A) 可分离变量方程 (B) 齐次方程 (C) 全微分方程 (D) 线性非齐次方程

15 微分方程  $y'' + y = 0$  的通解是( ).

- (A)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  (B)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$  (C)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x$  (D)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x^2$

16 在下列函数中是微分方程  $y'' + y = 0$  的解的函数是( ).

- (A)  $y = \cos x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = \cos x + \sin x$  (D)  $y = \cos x - \sin x$

17 方程  $y'' + y = 0$  的一个数解  $y = C$  形如( ).

- (A)  $C = 0$  (B)  $C = 1$  (C)  $C = -1$  (D)  $C = 2$

18 初值问题  $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的解是( ).

- (A)  $y = \cos x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = \cos x + \sin x$  (D)  $y = \cos x - \sin x$

19. 方程  $y'' + y = 0$  的奇解是 ( ).

- (A)  $y = \cos x$  (B)  $y = \sin x$  (C)  $y = \cos x + \sin x$  (D)  $y = \cos x - \sin x$

20. 方程  过点  共有 ( ) 个解.  
 (A) 一 (B) 无数 (C) 两 (D) 三

21.  阶线性齐次微分方程基本解组中解的个数恰好是 ( ) 个.  
 (A)  (B)  -1 (C)  +1 (D)  +2

22. 一阶线性非齐次微分方程组的任两个非零解之差 ( ).  
 (A) 不是其对应齐次微分方程组的解 (B) 是非齐次微分方程组的解  
 (C) 是其对应齐次微分方程组的解 (D) 是非齐次微分方程组的通解

23. 如果  ,  都在  平面上连续, 那么方程  的任一解的存在区间 ( ).  
 (A) 必为  (B) 必为  (C) 必为  (D) 将  
 因解而定

三 求下列方程的解:

1 求下列方程的通解或通积分:

- (1)  (2)  (3)  (4)   
 (5)

2 求方程的解

3 解方程:  并求出满足初始条件:当 x=0 时,y=2 的特解

4 求方程:

5 求方程:  的通解

6 求  的通解.

7 求解方程:

8 求方程:  的解

9 求方程  的通解

10 求下列方程组的通解



11 求初值问题    的解的存在区间并求出第二次近似解

12 求方程的通解

(1)



(2)



(3)



(三种方法)

(4)



13 计算方程  的通解


14 计算方程



15 求下列常系数线性微分方程:



16 试求   x 的基解矩阵

17 试求矩阵   的特征值和对应的特征向量.

18 试求矩阵   的特征值和特征向量

19 解方程组



20. 求下列方程组的通解



#### 四 名词解释

1 微分方程

2 常微分方程、偏微分方程

3 变量分离方程

4 伯努利方程

5  条件

6 线性相关

五 证明题

1 在方程  中已知  $p(x);q(x)$ 在  上连续

求证:该方程的任一非零解在  $xoy$  平面上不能与  $x$  轴相切.

2 设  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 分别是非齐次性线方程

$$\text{[Redacted Equation]}$$

$$\text{[Redacted Equation]}$$

证明:  $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程  的解。

3 设  $f(x)$ 在 $[0; +\infty]$ 上连续且   $f(x)=0$  求证: 方程  的一切解  $y(x)$ ;

均有   $y(x)=0$

4 在方程  中  $p(x)$ 、 $q(x)$ 在  上连续; 求证: 若  $p(x)$ 恒不为零; 则该方程的任一基本解组的朗斯基行列式  $w(x)$  是  上的严格单调函数。

5 证明:  $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程  的解。

6 证明: 函数组  (其中当  时 ) 在任意区间  $(a,b)$  上线性无关。

7. 在方程  中, 已知  ,  在  上连续, 且  . 求证: 对任意  和  , 满足初值条件  的解  的存在区间必为  .

8. 在方程  中, 已知  ,  在  上连续. 求证: 该方程的任一非零解在  平面上不能与  $x$  轴相切.

### 练习题答案

一 填空题:

1、 2


2、 线性无关 (或: 它们的朗斯基行列式不等于零)

3、  $e^x; xe^x$

4、 开

5、 

6、 

7、  ,c 为常数列向量

8、  $y=x^2+c$

9、 初始

10、 常微分方程

11、  $e^{\int p(x)dx}$

12、  $x^2+y^2=c$ ; c 为任意正常数


13、 /

14、 

15、 


16、 4

17、 0

18、  ; 其中 c 是确定的 n 维常数列向量

19. 

20. 

21.  , (或不含 x 轴的上半平面)

22. 充分

23. 没有


二 单项选择

1、 D    2、 C    3、 C    4、 D    5、 B    6、 C    7、 A    8、 D    9、 A    10、 C

11、 D    12、 B    13、 D    14、 D    15、 B    16、 C    17、 D    18、 D    19. D    20. B    21. A

22.C    23. D

三 求下列方程的解

1(1) 解: 当  时, 分离变量取不定积分, 得



通积分为  $\ln y = Ce^x$

(2) 解: 令  $y = xu$ , 则  代入原方程, 得

$$\input type="text"/>$$

分离变量, 取不定积分, 得

$$\input type="text" \quad (\input type="text")$$

通积分为:

$$\input type="text"/>$$

(3) 解: 方程两端同乘以  $y^{-5}$ , 得

$$\input type="text"/>$$

令  $y^{-4} = z$ , 则  代入上式, 得

$$\input type="text"/>$$

通解为

$$\input type="text"/>$$

原方程通解为

$$\input type="text"/>$$

(4) 解: 因为 , 所以原方程是全微分方程。

取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  原方程的通积分为

$$\input type="text"/>$$

即

$$\input type="text"/>$$

(5) 解: 原方程是克莱洛方程, 通解为:  $y = cx + 2c^3$

2 解: 设  则方程化为 , 积分后得  $y = ct$  即

于是  $x = c_1 t^5 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5$  其中  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  为任意常数

=

$$\input type="text"/>$$

=  $f_1(t) + f_2(t)$

故  $x_1(t) + x_2(t)$  为方程

$$\input type="text"/>$$

=  $f_1(t) + f_2(t)$  的解。



3 解: 将变量分离, 得到

$$\frac{dy}{y} = -x dx$$

两边积分, 即得

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

因而, 通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^C$$

这里  $c$  是任意常数。以  $x=0, y=1$  代入通解中以决定任意常数  $c$ , 得到

$$c = -1$$

因而, 所求特解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

4 解: 以  $x = \sin u$  及  $dx = \cos u du$  代入, 则原方程变为

$$\frac{du}{\cos u} = -x dx$$

即

$$\sec u du = -x dx$$

将上式分离变量, 即有

$$\frac{du}{\cos u} = -x dx$$

两边积分, 得到

$$\ln|\sec u + \tan u| = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

这里  $C$  是任意函数, 整理后, 得到

$$\sec u + \tan u = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C}$$

令  $u = \arcsin x$ , 得到  $\sin u = cx$

5 解: 令  $z = y^{-1}$  得

$$z' + z = x$$

代入原方程得到

$$z' + z = x$$

这是线性方程, 求得它的通解为

$$z = e^{-x} \int x e^x dx + C$$

代回原来的变量  $y$ , 得到

$$\frac{1}{3}x^3 + 2xy^2$$

这就是原方程的通解。此外，方程还有解  $y=0$ 。

6 解： 这里  $M = 3x^2 + 6xy^2$ ， $N = 6x^2y + 4y^3$ ，这时

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy^2$$

因此方程是恰当方程。现在求  $u$ ，使它同时满足如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$$

由 (1) 对  $x$  积分，得到  $u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$

为了确定  $\varphi(y)$ ，将 (3) 对  $y$  求导数，并使它满足 (2)，即得

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

于是

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

积分后可得

$$\varphi(y) = y^4$$

将  $\varphi(y)$  代入 (3)，得到

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$$

因此，方程的通解为

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

这里  $c$  是任意常数

7 解：特征方程  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  即特征根  $\lambda = -1$  是重根，因此方程有四个实值解  $\cos t$ 、 $t \cos t$ 、 $\sin t$ 、

$t \sin t$

故通解为  $x = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t$  其中  $c_1; c_2; c_3; c_4$  为任意常数

8 解： 令  $y = ct$  则方程化为：  $t^5 + 5c^2 t^3 + 5c^4 t + c_5 = 0$

积分后得  $y = ct$  即  $t^5 + 5c^2 t^3 + 5c^4 t + c_5 = 0$  于是  $x = c_1 t^5 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t^1 + c_5$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/337116125142006104>