

5. 4. 2 正弦函数、余弦函数的性质

目录

【题型归纳】	2
题型一：正余弦函数的周期问题.....	2
题型二：正余弦函数的奇偶问题.....	3
题型三：正余弦函数的对称问题.....	5
题型四：正余弦函数的单调问题.....	7
题型五：根据正余弦函数单调性求参数的范围问题.....	8
题型六：比较大小	12
题型七：正余弦函数的最值与值域问题.....	13
题型八：正余弦函数的综合应用	14
【重难点集训】	19
【高考真题】	30

【题型归纳】

题型一：正余弦函数的周期问题

1. (2024·高一·全国·课后作业) 若函数 $f(x)$ 满足：① $f(x+\pi)=f(x)$ ，② $f(|x|)=f(x)$ ，则 $f(x)$ 可以是 ().

- A. $\sin 2x$ B. $\cos x$ C. $\sin|x|$ D. $|\sin x|$

【答案】D

【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 周期为 π 的偶函数，

函数 $y = \sin 2x$ 周期为 π 的奇函数，不适合题意；

函数 $y = \cos x$ 周期为 2π 的偶函数，不适合题意；

函数 $y = \sin|x|$ 不具有周期性，不适合题意；

函数 $y = |\sin x|$ 周期为 π 的偶函数，适合题意.

故选：D

2. (2024·高一·广东东莞·期中) 函数 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}x\right)$ 的最小正周期是 ()

- A. π B. 2π C. 6 D. 4π

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

故选：D

3. (2024·高一·上海·课后作业) 函数 $f(x) = |A\sin x - B|$ ($A \neq 0, B \in R$) 的最小正周期 ()

- A. 与 A 有关，且与 B 有关 B. 与 A 有关，但与 B 无关
C. 与 A 无关，且与 B 无关 D. 与 A 无关，但与 B 有关

【答案】D

【解析】由题意，函数 $f(x) = |A\sin x - B|$ ($A \neq 0, B \in R$)，

当 $B = 0$ 时，函数 $f(x) = |A\sin x|$ ，此时函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ；

当 $B \neq 0$ 时，函数 $f(x) = |A\sin x - B|$ ，此时函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，

所以 $f(x)$ 的最小正周期与 A 无关，且与 B 有关.

故选：D.

4. (2024·高一·全国·随堂练习) 函数 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 是 ()

- A. 最小正周期为 π 的奇函数 B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 2π 的奇函数

D. 最小正周期为 2π 的偶函数

【答案】C

【解析】因为 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$,

$\therefore T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, 所以函数是最小正周期为 2π .

又因为 $-\sin(-x) = \sin x$, 所以函数 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数.

故函数 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 是最小正周期为 2π 的奇函数.

故选: C

题型二: 正余弦函数的奇偶问题

5. (2024·高一·上海·课后作业) 函数 $y = -2\sin x + \frac{1}{\sin x}$ 的奇偶性是_____.

【答案】奇函数

【解析】令 $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

所以函数 $y = -2\sin x + \frac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

令 $y = f(x) = -2\sin x + \frac{1}{\sin x}$

所以 $f(-x) = -2\sin(-x) + \frac{1}{\sin(-x)} = 2\sin x - \frac{1}{\sin x} = -f(x)$

所以函数 $y = -2\sin x + \frac{1}{\sin x}$ 为奇函数

故答案为: 奇函数

6. (2024·高一·北京·期末) 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 为奇函数, 则符合条件的一个 φ 的取值可以为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一, $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

【解析】函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

所以符合条件的一个 φ 的取值可以为 $\frac{\pi}{2}$.

故答案为: $\frac{\pi}{2}$

7. (2024·高一·上海·期中) 已知函数 $y = \sqrt{3}\cos(x + \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq 0$) 是奇函数, 则 $\theta =$ _____.

【答案】 $-\frac{\pi}{2}$

【解析】由题意可知： $y = \sqrt{3}\cos(x+\theta)$ 关于原点对称，可知 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，

且 $-\pi \leq \theta \leq 0$ ，所以 $k = -1, \theta = -\frac{\pi}{2}$ 。

故答案为： $-\frac{\pi}{2}$ 。

8. (2024·高一·内蒙古赤峰·阶段练习) 若 $y = (x-1)^2 + 2ax + \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a =$ _____。

【答案】 1

【解析】 $f(x) = (x-1)^2 + 2ax + \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = x^2 + 1 + (2a-2)x - \cos 2x$ ，

定义域为 $\mathbf{R}$ ，

由题意得 $f(-x) = f(x)$ ，

即 $(-x)^2 + 1 + (2a-2)(-x) - \cos(-2x) = x^2 + 1 + (2a-2)x - \cos 2x$ ，

故 $2(2a-2)x = 0$ ，解得 $a = 1$ 。

故答案为： 1

9. (2024·高一·湖南长沙·期末) 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6} + \theta\right) (0 < \theta < \pi)$ 为奇函数，则 $\theta =$ _____。

【答案】 $\frac{2\pi}{3} / \frac{2}{3}\pi$

【解析】因为函数 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6} + \theta\right) (0 < \theta < \pi)$ 为奇函数，

所以 $f(0) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \theta\right) = 0$ ，所以 $-\frac{\pi}{6} + \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，所以 $\theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

又 $0 < \theta < \pi$ ，所以 $k = 0$ 时， $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 。

故答案为： $\frac{2\pi}{3}$

10. (2024·高一·上海·阶段练习) 函数 $f(x) = \sin x + x + x^3 + 2$ ，若 $f(m) = 4$ ，则 $f(-m) =$ _____。

【答案】 0

【解析】因为 $f(x) + f(-x) = \sin x + x + x^3 + 2 + \sin(-x) + (-x) + (-x)^3 + 2 = 4$ ，

可得 $f(m) + f(-m) = 4 + f(-m) = 4$ ，所以 $f(-m) = 0$ 。

故答案为： 0。

题型三：正余弦函数的对称问题

11. (2024·高一·上海·随堂练习) 函数 $y = 4\sin x$ 的图象关于 ().

A. y 轴对称;

B. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称;

C. 原点对称;

D. 直线 $x = \pi$ 对称.

【答案】C

【解析】 $y = 4\sin x$ 是奇函数，图象关于原点对称，A 错误，C 正确；

而 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \pi = 0$ ，则直线 $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \pi$ 都不是 $y = 4\sin x$ 的图象的对称轴，CD 错误.

故选：C.

12. (2024·高一·北京海淀·期末) 已知 $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}$ ，则下列直线中，是函数 $f(x)$ 对称轴的为 ().

A. $x = 0$

B. $x = \frac{\pi}{6}$

C. $x = \frac{\pi}{4}$

D. $x = \frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】依题意， $\sin x + \cos x \neq 0$ ，解得 $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

对于 A， $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ，则函数的图象关于 $x = 0$ 不对称，A 不正确；

对于 B， $f(0) = 1$ ， $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} \neq 1$ ，则函数的图象关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 不对称，B 不正确；

对于 C， $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{3\pi}{4} - k\pi$ ，即 $\frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{\pi}{4} + (1-k)\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1 + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos x + \sin x} = f(x)$ ，则函数的图象关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，C 正确；

对于 D， $f(0) = 1$ ， $f(\pi) = -1$ ，则函数的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 不对称，D 不正确.

故选：C

13. (2024·高一·四川达州·阶段练习) 若函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + m$ ($0 < \omega < 5$) 满足

$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2$ ，则 $\omega + m$ 的值为 ().

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + m$ 满足 $f(x + \frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3} - x) = 2$,

可得函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{3}, 1)$ 对称, 所以 $m = 1$, 且 $\sin(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3}) = 0$,

所以 $\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $\omega = 3k - 1 (k \in \mathbb{Z})$,

又 $0 < \omega < 5$, 当 $k = 1$ 时, $\omega = 2$, 所以 $\omega + m = 3$.

故选: B.

14. (2024·高一·江苏常州·期中) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称,

且 $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 ω 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2} / 0.5$

【解析】由 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称, 得 $\frac{2\pi}{3}\omega + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

由 $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $0 < \varphi < \pi$ 得, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$,

当 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时, $\omega = \frac{3k-1}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 由 $\omega > 0$ 得 ω 的最小值为 1;

当 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\omega = \frac{3k-2}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 由 $\omega > 0$ 得 ω 的最小值为 $\frac{1}{2}$;

综上所述, ω 的最小值为 $\frac{1}{2}$;

故答案为: $\frac{1}{2}$.

15. (2024·新疆·三模) 已知函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则

$\varphi =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】Q $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称,

$\therefore \frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得: $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Q $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

题型四: 正余弦函数的单调问题

16. (2024·高一·全国·随堂练习) 函数 $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的单调递减区间为 ()

A. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$

B. $[2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbf{Z}$

C. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$

D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】因为 $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin x$,

且 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$.

故选: C.

17. (2024·高一·全国·课后作业) $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为_____.

【答案】 $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

【解析】由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

故答案为: $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

18. (2024·高一·内蒙古·阶段练习) 函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), x \in [-\pi, 0]$ 单调减区间为_____

【答案】 $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$

【解析】正弦函数 $y = \sin u$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$,

由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

记 $A = \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 则 $A \cap [-\pi, 0] = \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$,

故答案为: $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$.

题型五: 根据正余弦函数单调性求参数的范围问题

19. (2024·高一·广东佛山·期中) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 若函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围为 ()

- A. $[1, 2]$ B. $\left[1, \frac{11}{6}\right]$ C. $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$ D. $\left[\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right]$

【答案】D

【解析】由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得到 $\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$,

又因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases} \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{\omega} \geq \pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}),$

得到 $\frac{5}{3} + 4k \leq \omega \leq \frac{11}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$, 又 $\frac{\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2}$, $\omega > 0$, 即 $0 < \omega \leq 2$,

令 $k = 0$, 得到 $\frac{5}{3} \leq \omega \leq \frac{11}{6}$,

故选: D.

20. (2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值, 且在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left[\frac{11}{4}, \frac{17}{3}\right]$ C. $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ D. $\left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right]$

【答案】D

【解析】当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, 因为 $\omega > 0$, 则 $-\frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$,

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值, 可得 $\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega > 2$,

当 $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ 时, 可得 $\frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \pi\omega - \frac{\pi}{6}$,

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 则 $\left(\frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6}, \pi\omega - \frac{\pi}{6}\right) \subseteq \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} \geq k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \pi\omega - \frac{\pi}{6} \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \leq \omega \leq k + \frac{2}{3} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \leq k + \frac{2}{3}, \text{ 解得 } k \leq \frac{7}{3},$$

$$\text{又因为 } \omega > 2, \text{ 则 } \frac{4}{3} < k \leq \frac{7}{3}, \text{ 所以 } k = 2, \text{ 所以 } \frac{5}{2} \leq \omega \leq \frac{8}{3},$$

$$\text{因此 } \omega \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3} \right].$$

故选: D.

21. (2024·高三·天津·开学考试) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 内单调递减,

$x = \frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴, 且函数 $y = f\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ 为奇函数, 则 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 内单调递减,

$$\text{所以 } \frac{7\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \leq \frac{1}{2}T \Rightarrow \frac{7\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{|\omega|}, \text{ 得 } |\omega| \leq 2,$$

因为 $x = \frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴,

$$\text{所以 } \omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ ①}$$

因为函数 $y = f\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{8} + \varphi\right)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } \frac{\omega\pi}{8} + \varphi = m\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ ②},$$

$$\text{由 ①} - \text{②} \text{ 可得, } \omega = 4(2k - m) + 2,$$

$$\text{而 } |\omega| \leq 2, \text{ 所以 } |\omega| = 2$$

$$\text{当 } \omega = 2 \text{ 时, } \frac{2\pi}{8} + \varphi = m\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ 得 } \varphi = m\pi - \frac{\pi}{4}, m \in \mathbb{Z},$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{即 } f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 显然此时函数单调递减, 符合题意,

$$\text{所以 } f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

当 $\omega = -2$ 时, $-\frac{2\pi}{8} + \varphi = m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 得 $\varphi = m\pi + \frac{\pi}{4}, m \in \mathbb{Z}$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{即 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in (\pi, 2\pi)$, 显然此时函数不是单调递减函数, 不符合题意,

$$\text{所以 } f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: B

22. (2024·四川巴中·一模) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 若 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

$f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = -f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调, 则 ω 的取值可以是 ()

A. 3

B. 5

C. 7

D. 9

【答案】A

【解析】因为 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 取到最大值,

又 $f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = -f(x)$, 可知 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 的对称中心,

$$\text{故 } \frac{1+2k}{4}T = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \therefore T = \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z},$$

故 $\omega = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$;

又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调, 故 $\frac{T}{2} \geq \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$,

$$\text{即 } T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6}, \therefore 0 < \omega \leq 12,$$

结合选项, 当 $\omega = 9$ 时, $f(x) = \sin(9x + \varphi)$, $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 取到最大值,

$$\text{故 } 9 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 则 } \varphi = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, φ 没有符合题意的值, 不合题意;

当 $\omega=7$ 时, $f(x)=\sin(7x+\varphi)$, $x=\frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 取到最大值,

故 $7\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$, 则 $\varphi=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi, k\in Z$,

结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, φ 没有符合题意的值, 不合题意;

当 $\omega=5$ 时, $f(x)=\sin(5x+\varphi)$, $x=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 取到最大值,

故 $5\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$, 则 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$,

结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)=\sin(5x-\frac{\pi}{3})$,

由 $x\in(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$, 得 $5x-\frac{\pi}{3}\in(\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4})$,

由于 $y=\sin x$ 在 $(\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4})$ 上不单调, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$ 上不单调, 不合题意;

当 $\omega=3$ 时, $f(x)=\sin(3x+\varphi)$, $x=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 取到最大值,

故 $3\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$, 则 $\varphi=2k\pi, k\in Z$,

结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 可得 $\varphi=0$, 则 $f(x)=\sin 3x$, 满足 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 为 $f(x)$ 的对称中心,

由 $x\in(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$, 得 $3x\in(\pi, \frac{5\pi}{4})$,

由于 $y=\sin x$ 在 $(\pi, \frac{5\pi}{4})$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$ 上单调递减, 符合题意;

故 $\omega=3$

故选: A

23. (2024·高一·山东聊城·期末) 若 φ 是三角形的一个内角, 且函数 $y=2\sin(3x+\varphi)$ 在区间 $(-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{12})$ 上单调, 则 φ 的取值范围为 ()

- A. $[0, \frac{\pi}{6}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$

【答案】B

【解析】当 $x\in(-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{12})$ 时, $3x+\varphi\in(-\frac{2\pi}{3}+\varphi, \frac{\pi}{4}+\varphi)$,

由于 φ 是三角形的一个内角, 所以 $0<\varphi<\pi$,

则 $-\frac{2\pi}{3}<-\frac{2\pi}{3}+\varphi<\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\varphi<\frac{5\pi}{4}$,

由于函数 $y = 2\sin(3x + \varphi)$ 在区间 $\left(-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调,

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{9} + \varphi \\ \frac{\pi}{4} + \varphi \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

即 φ 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

故选: B

题型六: 比较大小

24. (2024·山东临沂·二模) 若实数 a, b, c 满足 $a = 2\sin\frac{\pi}{12}$, $b^3 = 7$, $3^c = 10$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $b < a < c$

【答案】A

【解析】因为 $a = 2\sin\frac{\pi}{12} < 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$,

又 $b^3 = 7$, 则 $b = \sqrt[3]{7}$, 且 $1 < \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = 2$, 即 $1 < b < 2$,

因为 $3^c = 10$, 所以 $c = \log_3 10 > \log_3 9 = 2$,

所以 $c > b > a$.

故选: A

25. (2024·高一·海南·阶段练习) 已知 $a = \lg 3, b = 2^{\frac{1}{10}}, c = \sin 40^\circ$, 则 ()

- A. $a < c < b$ B. $b < a < c$
C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

【答案】A

【解析】依题意, $a = \lg 3 < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}, b = 2^{\frac{1}{10}} > 2^0 = 1$, 而 $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ < \sin 40^\circ < \sin 90^\circ = 1$,

即 $\frac{1}{2} < c < 1$, 所以 $a < c < b$.

故选: A

26. (2024·高一·贵州遵义·阶段练习) 设 $a = 2^{0.2}, b = \log_{0.2} 2, c = \sin \frac{\pi}{4}$, 则 ()

- A. $b < c < a$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $b < a < c$

【答案】A

【解析】由于 $a = 2^{0.2} > 1, b = \log_{0.2} 2 < 0, c = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因此 $b < c < a$,

故选：A

27. (2024·高一·江苏苏州·开学考试) 设 $a = \sin \frac{1}{2}$, $b = \log_3 1.74$, $c = 2^{2023}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

【答案】C

【解析】 $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$, 则 $a = \sin \frac{1}{2} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$$b = \log_3 1.74 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \quad b = \log_3 1.74 < \log_3 3 = 1, \quad \text{即 } b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$c = 2^{2023} > 1.$$

故 $c > b > a$.

故选：C.

题型七：正余弦函数的最值与值域问题

28. (2024·高一·上海·课后作业) 函数 $y = \sin^2 x + 2 \cos x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 值域是_____.

【答案】(1,2)

【解析】因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos x \in (0, 1)$,

$$y = \sin^2 x + 2 \cos x = -\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = -(\cos x - 1)^2 + 2 \in (1, 2),$$

所以函数 $y = \sin^2 x + 2 \cos x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 值域是 (1,2).

故答案为：(1,2)

29. (2024·高一·山东潍坊·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

【答案】1

【解析】因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$,

又函数 $y = \cos x$ 在 $[-\pi, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 1.

故答案为：1.

30. (2024·高一·全国·课后作业) 使 $\cos x = 1 - m$ 有解的 m 的取值范围为_____.

【答案】[0,2]

【解析】由于 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 若 $\cos x = 1 - m$ 有解,

则 $-1 \leq 1-m \leq 1$ ，解得 $0 \leq m \leq 2$ ，

故答案为： $[0, 2]$ 。

31. (2024·高一·河北衡水·期中) 函数 $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x + 3 (x \in [0, \pi])$ 的最大值为_____。

【答案】 4

【解析】 由于 $x \in [0, \pi]$ ，所以 $\sin x \in [0, 1]$ 。

又函数 $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x + 3 = -\sin^2 x - 2 \sin x + 4 = -(\sin x + 1)^2 + 5$ ，

所以当 $\sin x = 0$ 时， $f(x)_{\max} = 4$ 。

故答案为： 4。

题型八：正余弦函数的综合应用

32. (多选题) (2024·高一·广东茂名·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \sin x - \frac{1}{\sin x}$ ，则 ()

A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 对称

B. $f(x)$ 的一个周期为 π

C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

D. $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$

【答案】 AC

【解析】 对于选项 A：令 $\sin x \neq 0$ ，解得 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

可知 $f(x) = \sin x - \frac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ ，

且 $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) - \frac{1}{\sin(\pi - x)} = \sin x - \frac{1}{\sin x}$ ，

$f(\pi + x) = \sin(\pi + x) - \frac{1}{\sin(\pi + x)} = -\sin x + \frac{1}{\sin x}$ ，

可得 $f(\pi - x) + f(\pi + x) = 0$ ，所以 $f(x)$ 关于 $(\pi, 0)$ 对称，故 A 正确；

对于选项 B：因为 $f(\pi + x) = -f(x) \neq f(x)$ ，

所以 π 不是 $f(x)$ 的周期，故 B 错误；

对于选项 C：因为 $f(-x) = \sin(-x) - \frac{1}{\sin(-x)} = -\sin x + \frac{1}{\sin x} = f(\pi + x)$ ，

所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，故 C 正确；

对于选项 D：令 $t = \sin x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ ，则 $\sin x - \frac{1}{\sin x} = t - \frac{1}{t}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/338023000124007026>