高三入学摸底测试数学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题 p：$\forall x>0$，$x^2+x+1\le 0$ 的否定为（　　）

A. $\forall x>0$，$x^2+x+1>0$

B. $\forall x<0$，$x^2+x+1>0$

C. $\exists x>0$，$x^2+x+1>0$

D. $\exists x\le 0$，$x^2+x+1>0$

2. 设 $A=\left\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2-5x+4<0\right\}$，$B=\left\{x \mid ax-1=0\right\}$，若 $A\bigcap B=B$，则实数 a 的值的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 已知 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64，则展开式的第 5 项是（　　）

A. 6　　B. 15　　C. $\dfrac{6}{x^4}$　　D. $\dfrac{15}{x^2}$

4. 已知盒子中有 6 个大小相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回地随机取两球，每次取一球，记第一次取出的球的数字是 x，第二次取出的球的数字是 y．若事件 $A=$“$x+y$ 为偶数”，事件 $B=$“x，y 中有偶数且 $x\ne y$”，则 $P\left(A\middle|B\right)=$（　　）

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 设等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 d，则“$0<a_1<d$”是“$\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 为递增数列”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $xy+x-2y=4$，则 $2x+y$ 的最小值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 9

7. 过双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左焦点 F 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 A，直线 FA 交直线 $bx-ay=0$ 于点 B．若 $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{AF}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a\ln\left(ax-a\right)+a\left(a>0\right)$，若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $\left(0,\mathrm{e}^2\right)$　　B. $\left(0,1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$　　D. $\left(0,\mathrm{e}\right)$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选错得 0 分.

9. 下列命题中，正确的是（　　）

A. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$，若 $P\left(X\le 0\right)=0.3$，则 $P(X<4)=0.3$

B. 若甲、乙两组数据的相关系数分别为 0.66 和 -0.76，则甲组数据的线性相关性更强

C. 用 X 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中事件 A 发生的概率，若 $E\left(X\right)=150,D\left(X\right)=50$，则 $p=\frac{2}{3}$

D. 已知随机变量 X 的分布列为 $P\left(X=i\right)=\frac{a}{i\left(i+1\right)}\left(i=1,2,3,\cdots,100\right)$，则 $a=\frac{101}{100}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x(a\in\mathrm{R})$，则下列说法正确的有（　　）

A. 若 $f(x)$ 是 R 上的增函数，则 $a\in[-1,1]$

B. 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值

C. 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两零点

D. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 $f(x)$ 只有唯一个公共点

11. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，则（　　）

A. 当 $\lambda=1$ 时，$AP+PB_1$ 最小值为 $\sqrt{2}$

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C. 当 $\lambda=1,\mu=\frac{1}{2}$ 时，平面 $AB_1P\perp$ 平面 A_1AB

D. 若 $AP=1$，则 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

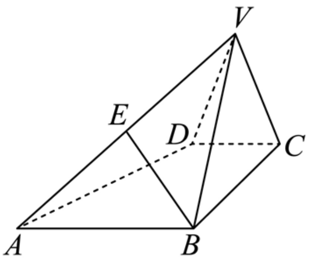
12. 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的准线方程是____________________.

13. 由 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字可以组成______个无重复数字的四位偶数.（用数字作答）.

14. 甲、乙、丙三个人去做相互传球训练，训练规则是确定一人第一次将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，每次必须将球传出．如果第一次由甲将球传出，设n次传球后球在甲手中的概率为P_n，则$P_3 =$______；$P_n =$______.

四、解答题：本大题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图所示，在四棱锥$V-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AB//CD$，$\angle ABC = 90^{\circ}$，侧面$VBC\perp$底面$ABCD$且$VB = VC = BC = AB = 2CD = 2$，$E$为$VA$中点.



（1）求证：$EB\perp AD$；

（2）求二面角$B-VD-A$的正弦值.

16. 为了了解高中学生课后自主学习数学时间（x分钟/每天）和他们的数学成绩（y分）的关系，某实验小组做了调查，得到一些数据（表一）.

编号	1	2	3	4	5
学习时间 x	30	40	50	60	70
数学成绩 y	65	78	85	99	108

（1）求数学成绩y与学习时间x的相关系数（精确到0.001）；

（2）请用相关系数说明该组数据中y与x之间的关系可用线性回归模型进行拟合，并求出y关于x的回归直线方程，并由此预测每天课后自主学习数学时间为100分钟时的数学成绩（参考数据：

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i = 22820,\sum_{i=1}^{5}y_i = 435,\sum_{i=1}^{5}y_i^2 = 38999,107.4^2\approx 11540$，$x_i$的方差为200)；

（3）基于上述调查，某校提倡学生周末在校自主学习.经过一学期的实施后，抽样调查了220位学生.按照是否参与周末在校自主学习以及成绩是否有进步统计，得到2×2列联表（表二）. 依据表中数据及小概率值$\alpha = 0.001$的独立性检验，分析“周末在校自主学习与成绩进步”是否有关.

	没有进步	有进步	合计
参与周末在校自主学习	35	130	165
未参与周末不在校自主学习	25	30	55
合计	60	160	220

附：方差：$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ 相关系数：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$

回归方程 $\hat{y}=bx+a$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$.

α	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
χ	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

17. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n+a_n=3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=-a_n\log_2\frac{a_{n+1}}{3}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*,T_n<2\lambda-1$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

18. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 左焦点为 F，离心率为 $\frac{1}{2}$，以坐标原点 O 为圆心，$\left|OF\right|$ 为半径作圆使之与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切.

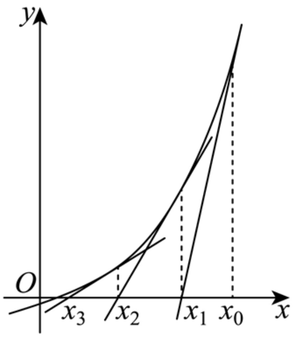
（1）求 C 的方程；

（2）设点 $P\left(4,0\right)$，A，B 是椭圆上关于 x 轴对称的两点，PB 交 C 于另一点 E，

①证明：直线 AE 经过定点；

②求△AEF 的内切圆半径的范围.

19. 牛顿在《流数法》一书中，给出了代数方程的一种数值解法——牛顿法．具体做法如下：如图，设 r 是 $f(x)=0$ 的根，首先选取 x_0 作为 r 的初始近似值，若 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 x 轴相交于点 $(x_1, 0)$，称 x_1 是 r 的一次近似值；用 x_1 替代 x_0 重复上面的过程，得到 x_2，称 x_2 是 r 的二次近似值；一直重复，可得到一列数：$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$．在一定精确度下，用四舍五入法取值，当 $x_{n-1}, x_n\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$ 近似值相等时，该值即作为函数 $f(x)$ 的一个零点 r．



（1）若 $f(x)=x^3+3x^2+x-3$，当 $x_0=0$ 时，求方程 $f(x)=0$ 的二次近似值（保留到小数点后两位）；

（2）牛顿法中蕴含了“以直代曲”的数学思想，直线常常取为曲线的切线或割线，求函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-3$ 在点 $(2, g(2))$ 处的切线，并证明：$\ln 3<1+\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$；

（3）若 $h(x)=x(1-\ln x)$，若关于 x 的方程 $h\left(x\right)=a$ 的两个根分别为 $x_1, x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_2-x_1>\mathrm{e}-\mathrm{e}a$．

高三入学摸底测试数学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题 p：$\forall x>0$，$x^2+x+1\leq 0$ 的否定为（　　）

A. $\forall x>0$，$x^2+x+1>0$

B. $\forall x<0$，$x^2+x+1>0$

C. $\exists x>0$，$x^2+x+1>0$

D. $\exists x\leq 0$，$x^2+x+1>0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据全称命题的否定:改变量词,否定结论,可得结果.

【详解】命题 p: $\forall x>0$，$x^2+x+1\leq 0$ 的否定为 $\exists x>0$，$x^2+x+1>0$.

故选: C.

【点睛】本题考查全称命题否定的改写,要注意量词和结论的变化,难度容易.

2. 设 $A=\left\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2-5x+4<0\right\}$，$B=\left\{x \mid ax-1=0\right\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的值的个数为（　　）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知求出 A，由已知得出 $B\subseteq A$.分 $B=\varnothing$，$B=\left\{2\right\}$，$B=\left\{3\right\}$ 三种情况，求解即可得出答案.

【详解】由 $B=\left\{x \mid ax-1=0\right\}$，可知集合 B 最多只有一个元素.

解 $x^2-5x+4<0$ 可得，$1<x<4$，

所以，$A=\left\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2-5x+4<0\right\}=\left\{2,3\right\}$.

因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，

又集合 B 最多只有一个元素，

所以，$B=\varnothing$，$B=\left\{2\right\}$，$B=\left\{3\right\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $a=0$，此时有 $B\subseteq A$；

当 $B=\left\{2\right\}$ 时，有 $2a-1=0$，此时 $a=\dfrac{1}{2}$；

当 $B=\left\{3\right\}$ 时，有 $3a-1=0$，此时 $a=\dfrac{1}{3}$.

综上所述，$a=0$，或$a=\frac{1}{2}$，或$a=\frac{1}{3}$.

故选：B.

3. 已知$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}$展开式的二项式系数之和为64，则展开式的第5项是（　　）

A. 6　　B. 15　　C. $\frac{6}{x^{4}}$　　D. $\frac{15}{x^{2}}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二项式系数之和为64求出$n=6$，从而求出展开式的通项公式，求出第5项.

【详解】由题意得：$2^{n}=64$，解得：$n=6$，

则$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}$展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_{6}^{r}x^{6-r}\cdot x^{-r}=\mathrm{C}_{6}^{r}x^{6-2r}$，

第五项是$T_{5}=\mathrm{C}_{6}^{4}x^{-2}=\frac{15}{x^{2}}$

故选：D

4. 已知盒子中有6个大小相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中有放回地随机取两球，每次取一球，记第一次取出的球的数字是x，第二次取出的球的数字是y．若事件$A=$“$x+y$为偶数”，事件$B=$“x，y中有偶数且$x\neq y$”，则$P\left(A|B\right)=$（　　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件，结合条件概率的计算公式，即可求解.

【详解】由题意，有放回的随机取两球，所以$n\left(\Omega\right)=36$，

因为事件$B=$“x，y中有偶数且$x\neq y$”，

所以$n\left(B\right)=36-3\times3-3=24$，

因为事件$A=$“$x+y$为偶数”， 事件$B=$“x，y中有偶数且$x\neq y$”，

所以事件$AB=$“x，y均为偶数且$x\neq y$”，

所以$n\left(AB\right)=\mathrm{A}_{3}^{2}=6$，

所以$P\left(A|B\right)=\dfrac{n\left(AB\right)}{n\left(B\right)}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$.

故选：C.

5. 设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，则“$0<a_1<d$”是“$\{\dfrac{a_n}{n}\}$为递增数列”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用等差数列通项公式求出$\dfrac{a_n}{n}$，再利用单调数列的定义，结合充分条件、必要条件的意义判断即得.

【详解】由等差数列$\{a_n\}$的公差为d，得$a_n=a_1-d+nd$，则$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1-d}{n}+d$，

当$0<a_1<d$时，$a_1-d<0$，而$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，则$\dfrac{a_1-d}{n}<\dfrac{a_1-d}{n+1}$，因此$\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$，$\{\dfrac{a_n}{n}\}$为递增数列；

当$\{\dfrac{a_n}{n}\}$为递增数列时，则$\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$，即有$\dfrac{a_1-d}{n}<\dfrac{a_1-d}{n+1}$，整理得$a_1<d$，不能推出$0<a_1<d$，

所以“$0<a_1<d$”是“$\{\dfrac{a_n}{n}\}$为递增数列”的充分不必要条件.

故选：A

6. 已知$x>0$，$y>0$，且$xy+x-2y=4$，则$2x+y$的最小值是（　　）

A. 4

B. 5

C. 7

D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】将式子变形为$x=2+\dfrac{2}{y+1}$，即可利用不等式求解，或者将式子变形为$\left(x-2\right)\left(y+1\right)=2$，结合不等式即可求解.

【详解】方法一：因为$xy+x-2y=4$，故$\left(y+1\right)x=4+2y$，解得$x=\dfrac{2y+2+2}{y+1}=2+\dfrac{2}{y+1}$，

故$2x+y=4+\dfrac{4}{y+1}+(y+1)-1\geq 3+2\sqrt{\left(\dfrac{4}{y+1}\right)\cdot(y+1)}=7$,当且仅当$\dfrac{4}{y+1}=y+1$，即$y=1$，$x=3$时等号成立.

方法二：因为$xy+x-2y=4$，则$\left(x-2\right)\left(y+1\right)=2$，且$y+1>0$，故$x-2>0$，

故 $2x+y=2(x-2)+(y+1)+3\ge 2\sqrt{2(x-2)(y+1)}+3=7$，当且仅当 $2(x-2)=y+1$ ，

即 $y=1$， $x=3$ 时等号成立.

故选：C.

7. 过双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 A，直线 FA 交直线 $bx-ay=0$ 于点 B．若 $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{AF}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$　　　　D. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】取右焦点 F_2，连接 AO、BF_2，作 $F_2M\perp AB$ 于点 M，由题意结合几何性质可得相应的边长及角度间的关系，借助余弦定理列出与 a、b、c 有关齐次式，计算即可得.

【详解】取右焦点 F_2，连接 AO、BF_2，作 $F_2M\perp AB$ 于点 M，

由 FA 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，故 $FA\perp AO$，又 $F_2M\perp AB$，

O 为 FF_2 中点，故 A 为 MF 中点，又 $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{AF}$，故 M 为 FB 中点，

$|AF|=\sqrt{|OF|^2-|OA|^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$，则 $|FM|=|BM|=2b$，

$|F_2M|=2|OA|=2a$，则 $|BF_2|=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2c$，

$|OB|=\sqrt{a^2+(3b)^2}=\sqrt{a^2+9b^2}$，由直线 $bx-ay=0$ 为双曲线的渐近线，

故有 $\tan\angle BOF_2=\dfrac{b}{a}$，则 $\cos\angle BOF_2=\dfrac{a}{c}$，

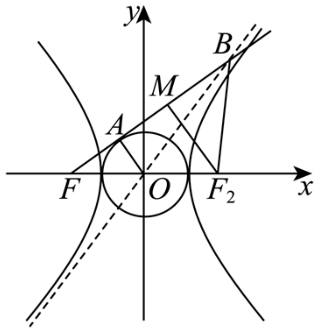
在 $\triangle BOF_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BOF_2=\dfrac{a}{c}=\dfrac{c^2+a^2+9b^2-4c^2}{2c\sqrt{a^2+9b^2}}$，

则 $2a\sqrt{a^2+9b^2}=a^2+9b^2-3c^2$，即 $a\sqrt{c^2+8b^2}=4b^2-c^2$，

即 $(c^2-b^2)(c^2+8b^2)=(4b^2-c^2)^2$，化简得 $8b^2=5c^2$，即 $8c^2-8a^2=5c^2$，

故 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

故选：D.



【点睛】关键点点睛：本题考查双曲线离心率的求法，关键点在于借助题目所给条件，从几何的角度构造辅助线，得到新的长度关系与角度关系，从而结合题意构造相应与 a 、 b 、 c 有关齐次式，得到离心率.

8. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln(ax-a)+a(a>0)$ ，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $(0,\mathrm{e}^{2})$　　　B. $(0,1)$　　　C. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$　　　D. $(0,\mathrm{e})$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $f(x)>0$ 变形得出 $\mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a>x-1+\ln(x-1)$，构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^{x}+x$，其中 $x\in\mathbf{R}$ ，利用导数分析函数 $g(x)$ 的单调性，可得出 $g(x-\ln a)>g\left[\ln(x-1)\right]$，进一步得出 $\ln a<x-\ln(x-1)$，利用导数求出函数 $h(x)=x-\ln(x-1)$ 的最小值，可得出关于实数 a 的不等式，解之即可.

【详解】因为 $a>0$，由 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln(ax-a)+a>0$，可得 $\frac{\mathrm{e}^{x}}{a}-\ln a-\ln(x-1)+1>0$，

所以， $\mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a>x-1+\ln(x-1)$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}+x$，其中 $x\in\mathbf{R}$ ，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}+1>0$，所以，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

由 $\mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a>x-1+\ln(x-1)$ 可得 $g(x-\ln a)>g\left[\ln(x-1)\right]$，

所以， $x-\ln a>\ln(x-1)$，所以， $\ln a<x-\ln(x-1)$，其中 $x>1$，

令 $h(x)=x-\ln(x-1)$，其中 $x>1$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$.

当 $1<x<2$ 时， $h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 单调递减，

当 $x>2$ 时， $h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 单调递增，

所以， $h(x)_{\min}=h(2)=2$，所以， $\ln a<2$，解得 $0<a<\mathrm{e}^{2}$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查利用函数不等式恒成立求参数的取值范围，解本题的关键在于将不等式变形为$e^{x-\ln a}+x-\ln a>x-1+\ln\left(x-1\right)$，通过构造函数$g\left(x\right)=e^{x}+x$，进一步将不等式变形为$g\left(x-\ln a\right)>g\left[\ln\left(x-1\right)\right]$，从而结合函数$g\left(x\right)$的单调性与参变量分离法求解.

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选错得 0 分.

9. 下列命题中，正确的是（　　）

A. 已知随机变量X服从正态分布$N\left(2,\sigma^{2}\right)$，若$P\left(X\le 0\right)=0.3$，则$P(X<4)=0.3$

B. 若甲、乙两组数据的相关系数分别为 0.66 和-0.76，则甲组数据的线性相关性更强

C. 用X表示n次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p为每次试验中事件 A 发生的概率，若$E\left(X\right)=150,D\left(X\right)=50$，则$p=\frac{2}{3}$

D. 已知随机变量X的分布列为$P\left(X=i\right)=\frac{a}{i\left(i+1\right)}\left(i=1,2,3,\cdots,100\right)$，则$a=\frac{101}{100}$

【答案】CD

【解析】

【分析】利用正态分布的对称性求出$P\left(X<4\right)$可判断 A；根据线性相关性的性质可判断 B；利用二项分布的期望、方差求出p可判断 C；利用裂项相消求和、随机变量X的概率和为 1 求出a可判断 D.

【详解】对于 A，因为$\mu=2$，所以$P\left(X\le 0\right)=P(X\ge 4)$，

所以$P\left(X<4\right)=1-P\left(X\le 0\right)=0.7$，故 A 错误；

对于 B，因为$0.66<\left|-0.76\right|=0.76$，则乙组数据的线性相关性更强，故 B 错误；

对于 C，若$E\left(X\right)=150,D\left(X\right)=50$，则$np=150,np\left(1-p\right)=50$，

解得$p=\frac{2}{3}$，故 C 正确；

对于 D，因为$P\left(X=i\right)=\frac{a}{i\left(i+1\right)}=\frac{a}{i}-\frac{a}{i+1}$，

所以$P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+\cdots+P\left(X=100\right)$

$=\frac{a}{1}-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{3}+\cdots+\frac{a}{100}-\frac{a}{101}=\frac{a}{1}-\frac{a}{101}=1$，解得 $a=\frac{101}{100}$，故 D 正确.

故选：CD.

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x(a\in\mathrm{R})$，则下列说法正确的有（　　）

A. 若 $f(x)$ 是 R 上的增函数，则 $a\in[-1,1]$

B. 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值

C. 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两零点

D. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与 $f(x)$ 只有唯一一个公共点

【答案】AB

【解析】

【分析】对 A：借助导数，令导函数大于等于零恒成立即可得；对 B：借助导数研究函数的单调性即可得；对 C：举出反例即可得；对 D：计算出 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程后，联立 $f(x)$，解出方程即可得.

【详解】对 A：$f'(x)=x^2-2ax+1$，由 $f(x)$ 是 R 上的增函数，

则有 $x^2-2ax+1\geq 0$ 恒成立，即 $\Delta=4a^2-4\leq 0$，解得 $a\in[-1,1]$，故 A 正确；

对 B：由 $f'(x)=x^2-2ax+1$，则当 $a>1$ 时，$\Delta=4a^2-4>0$，

故 $f'(x)=0$ 有两个不等实根，设这两个根分别为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，

则当 $\left(-\infty,x_1\right)\cup\left(x_2,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $\left(x_1,x_2\right)$ 时，$f'(x)<0$，

即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,x_1\right),\left(x_2,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_1,x_2\right)$ 上单调递减，

故函数 $f(x)$ 有两个极值 $f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)$，故 B 正确；

对 C：令 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x=x\left(\frac{1}{3}x^2-ax+1\right)=0$，

对 $\frac{1}{3}x^2-ax+1=0$，有 $\Delta'=a^2-\frac{4}{3}$，若 $a>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\Delta'>0$，

此时 $\frac{1}{3}x^2-ax+1=0$ 有两个非零不等实根，即 $f\left(x\right)$ 有三个零点，故 C 错误；

对 D：当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$，则 $f'(x)=x^2-2x+1$，

$f'\left(0\right)=1$，由 $f\left(0\right)=0$，则 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线为 $y=x$，

令$\frac{1}{3}x^3-x^2+x=x$，即有$x^2\left(x-3\right)=0$，解得$x=0$或$x=3$，

故$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与$f(x)$有两个公共点，故D错误.

故选：AB.

11. 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中$\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，则（　　）

A. 当$\lambda=1$时，$AP+PB_1$最小值为$\sqrt{2}$

B. 当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值

C. 当$\lambda=1,\mu=\frac{1}{2}$时，平面$AB_1P\perp$平面$A_1AB$

D. 若$AP=1$，则P的轨迹长度为$\frac{\pi}{2}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】当$\lambda=1$时，点P在CC_1上，把平面ACC_1A_1与平面BCC_1B_1展在一个平面上，可判定A错误；当$\mu=1$时，得到点P在B_1C_1上，证得$A_1D\perp$平面BCC_1B_1，求得三棱柱$P-A_1BC$的体积定值，可判定B正确；当$\lambda=1,\mu=\frac{1}{2}$时，得到点$P$为$CC_1$的中点，取$AB_1,AB$的中点$E,F$，证得$PE\perp$平面$ABB_1A_1$，得到$AB_1P\perp$平面$A_1AB$，可判定C正确；由点$P$满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，得到点$P$在矩形$BCC_1B_1$内，取$BC$的中点$H$，证得$AH\perp$平面$BCC_1B_1$，得到$AH\perp PH$，求得$PH=\frac{1}{2}$，得出以点$P$的轨迹，可判定D正确.

【详解】对于A中，当$\lambda=1$时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，可得点$P$在$CC_1$上，

以CC_1为轴，把平面ACC_1A_1与平面BCC_1B_1展在一个平面上，如图所示，

连接AB_1交CC_1于点P，此时$AP+PB_1$最小值为$\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{5}$，所以A错误；