【拔尖特训】2022-2023 学年八年级数学下册尖子生培优必刷题【北师大版】

专题 6.5 平行四边形的性质与判定大题专练（重难点培优 30 题）

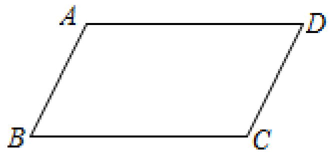
班级：____________________ 姓名：__________________ 得分：________________

注意事项：

本试卷试题解答 30 道，共分成三个层组：基础过关题（第 1-10 题）、能力提升题（第 11-20 题）、培优压轴题（第 21-30 题），每个题组各 10 题，可以灵活选用．答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、班级等信息填写在试卷规定的位置．

一、解答题

1．（2022 秋·四川自贡·八年级统考期中）已知：如图，四边形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，$AB=CD$．



(1)求证：$AD=BC$

(2)AD与BC的位置关系为：________________

【答案】(1)见解析

(2)$AD \parallel BC$

【分析】（1）如图：连接AC，由$AB \parallel CD$可得$\angle BAC=\angle ACD$，然后再证明$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，最后根据全等三角形的性质即可解答；

（2）先证明四边形$ABCD$是平行四边形，然后根据平行四边形的性质即可解答．

【详解】（1）证明：如图：连接AC

$\because AB \parallel CD$

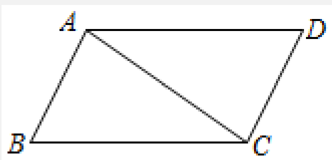
$\therefore \angle BAC=\angle ACD$

在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中

$AB=CD$、$\angle BAC=\angle ACD$、$AC=CA$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$（SAS）

$\therefore AD=BC$．



（2）解：$AD \parallel BC$，理由如下：

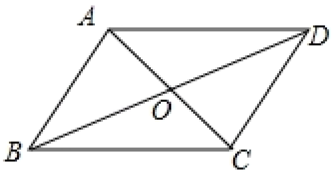
$\because AB \parallel CD$、$AB = CD$

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形

$\therefore AD \parallel BC$.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质等知识点，掌握相关判定与性质定理成为解答本题的关键.

2．（2022春·吉林·八年级统考期末）在▱$ABCD$中，对角线AC和BD交于点O．AC=8，BD=14．



(1)若AD=9，则△OAD的周长为_________．

(2)若AB=6，求△OCD的周长．

【答案】(1)20

(2)17

【分析】（1）根据平行四边形对角线互相平分的性质可求AO和DO的长度，即可求出△OAD的周长；

（2）根据平行四边形对角线互相平分和对边相等的性质即可解答．

（1）

∵四边形$ABCD$为平行四边形；

∴$AO=\frac{1}{2}AC=4$，$BO=\frac{1}{2}BD=7$；

∴△OAD的周长=$AO+B0+AB=4+7+9=20$，

故答案为：20；

（2）

在▱$ABCD$中，

$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$，

$OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 14 = 7$，

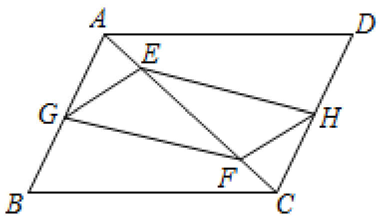
$CD = AB = 6$.

∴△OCD的周长=$OC+OD+CD=4+7+6=17$．

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，熟练地掌握平行四边形对角线互相平分以及平行四边形对边

相等的性质是解题的关键．

3．（2022春·八年级课时练习）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 G，H 分别是 AB，CD 的中点，点 E、F 在对角线 AC 上，且 $AE=CF$．求证：四边形 $EGFH$ 是平行四边形．



【答案】见解析

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AB//CD$，$AB=CD$，根据平行线的性质得到 $\angle GAE=\angle HCF$，得 $\triangle AGE\cong\triangle CHF$（SAS），根据全等三角形的性质得到 $GE=HF$，$\angle AEG=\angle CFH$，根据平行四边形的判定定理即可得到结论．

【详解】证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB//CD$，$AB=CD$，

∴$\angle GAE=\angle HCF$，

∵点 G，H 分别是 AB，CD 的中点，

∴$AG=CH$，

在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle CHF$ 中，

$$\begin{cases} AG=CH \\ \angle GAE=\angle HCF \\ AE=CF \end{cases},$$

∴$\triangle AGE\cong\triangle CHF$（SAS），

∴$GE=HF$，$\angle AEG=\angle CFH$，

∴$\angle GEF=\angle HFE$，

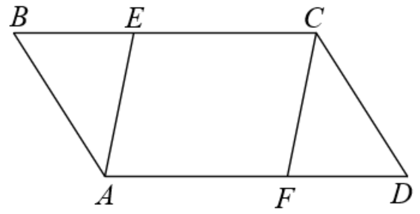
∴$GE//HF$，

又∵$GE=HF$，

∴四边形 $EGFH$ 是平行四边形

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质，熟练掌握平行四边形判定与的性质是解题的关键．

4．（2022春·广东汕头·八年级统考期末）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、AD 上，且 $BE=DF$．请判断 AE 与 CF 的数量关系，并说明理由．



【答案】$AE=CF$，理由见解析

【分析】证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，则可知线段 AE 与线段 CF 有怎样的数量关系．

【详解】解：$AE=CF$，$AE\parallel CF$．理由如下：

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=BC$．

$\because BE=DF$，

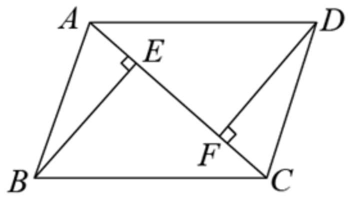
$\therefore CE=AF$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形．

$\therefore AE=CF$．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质，熟练掌握性质定理和判定定理是解题的关键．

5．（2022春·辽宁沈阳·八年级沈阳市第一二六中学校考期中）如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$BE\perp AC$， $DF\perp AC$，求证：$AE=CF$．



【答案】见解析

【分析】可证明$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，即可得到结论．

【详解】证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$

$\therefore \angle BAC=\angle DCA$

$\because BE\perp AC$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F

$\therefore \angle AEB=\angle DFC=90°$

在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中 ，

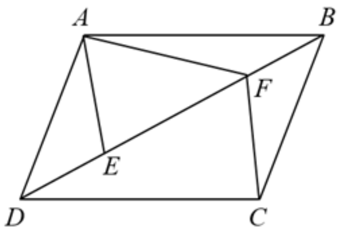
$$\begin{cases}\angle BAE=\angle DCF\\ \angle AEB=\angle CFD\\ AB=CD\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CDF$（$AAS$）

∴$AE=CF$

【点睛】此题考查平行四边形的性质和全等三角形的判定及性质，掌握平行四边形的性质和全等三角形的判定是解决问题的关键.

（2022春·湖北十堰·八年级校联考阶段练习）6．已知：如图，在▱$ABCD$中，E，F是对角线BD上的两点，连接AE，AF，CE，CF，已知___.（填序号）.



(1)在①$BE=DF$，②$AE\parallel CF$中任选一个作为条件补充在横线上，并完成证明过程.

(2)求证：四边形$AECF$为平行四边形.

【答案】(1)选①或选②

(2)见详解

【分析】（1）选择一个添加即可；

（2）若选①$BE=DF$，证明$\triangle ABE\cong\triangle CDF$即可；

若选②$AE\parallel CF$，先证$\triangle ABE\cong\triangle CDF$（$AAS$），得$AE=CF$，再由$AE\parallel CF$，即可得出四边行$AECF$是平行四边形；.

（1）

解：选①或选②，证明过程如下；

（2）

选①证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB=CD$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle ABE=\angle CDF$，

∵$BE=DF$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，

∴$AE=CF$，$\angle AEB=\angle CFD$，

∴$\angle AEF=CFE$，

∴$AE // CF$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形

选②证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB // CD$，$AB = CD$，

∴$\angle ABE = \angle CDF$，

∵$AE // CF$，

∴$\angle AEF = \angle CFE$，

∴$\angle AEB = \angle CFD$，

在△ABE 和△CDF 中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CDF \\ \angle AEB = \angle CFD \\ AB = CD \end{cases},$$

∴△ABE≌△CDF（AAS），

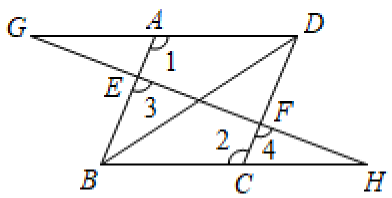
∴$AE = CF$，

又∵$AE // CF$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形；

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质；熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键．

7．（2022秋·广东广州·八年级统考期末）如图，在四边形$ABCD$中，点G是DA延长线上一点，过点G的直线分别交BA，BD，CD交于点E，O，F，交BC的延长线于点H，且$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$．



(1)若$\angle ABD = \angle ADB$，求证：BD平分$\angle ABC$；

(2)若$DG = BH$，在不添加任何辅助线的条件下，你能找出图中有几对三角形全等，分别是哪些？请写出其中一对三角形全等的理由．

【答案】(1)见解析

(2)图中有4对三角形全等，分别为△ABD≌△CDB，△AEG≌△CFH，△DOG≌△BOH，△BOE≌△DOF，理由见解析

【分析】（1）根据$\angle 1=\angle 2$，可得$\angle EAG=\angle FCH$，再由$\angle 3=\angle 4$，可得$\angle AEG=\angle CFH$，$AB\parallel CD$，再由三角形内角和定理可得$\angle G=\angle H$，从而得到$AD\parallel BC$，进而得到$\angle ADB=\angle CBD$，再由$\angle ABD=\angle ADB$，即可；

（2）先证明四边形$ABCD$是平行四边形，可得$AD=BC,AB=CD$，可证得$\triangle ABD\cong\triangle CDB$；再由$DG=BH$，可得$AG=CH$，可证得$\triangle AEG\cong\triangle CFH$；再证得$\triangle DOG\cong\triangle BOH$，可得$OB=OD$，可证得$\triangle BOE\cong\triangle DOF$，即可.

【详解】（1）证明：$\because\angle 1=\angle 2$，$\angle 1+\angle EAG=180^{\circ},\angle 2+\angle FCH=180^{\circ}$，

$\therefore\angle EAG=\angle FCH$，

$\because\angle 3=\angle 4$，

$\therefore\angle AEG=\angle CFH$，$AB\parallel CD$，

$\because\angle EAG+\angle AEG+\angle G=180^{\circ},\angle CFH+\angle FCH+\angle H=180^{\circ}$，

$\therefore\angle G=\angle H$，

$\therefore AD\parallel BC$，

$\therefore\angle ADB=\angle CBD$，

$\because\angle ABD=\angle ADB$，

$\therefore\angle ABD=\angle CBD$，即$BD$平分$\angle ABC$；

（2）解：图中有 4 对三角形全等，分别为$\triangle ABD\cong\triangle CDB$，$\triangle AEG\cong\triangle CFH$，$\triangle DOG\cong\triangle BOH$，$\triangle BOE\cong\triangle DOF$，理由如下：

$\because AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC,AB=CD$，

$\because BD=DB$，

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CDB$；

$\because DG=BH$，

$\therefore AG=CH$，

$\because\angle G=\angle H$，$\angle AEG=\angle CFH$，

$\therefore\triangle AEG\cong\triangle CFH$；

$\because\angle G=\angle H$，$DG=BH$，$\angle ADB=\angle CBD$，

$\therefore\triangle DOG\cong\triangle BOH$，

$\therefore OB=OD$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$，

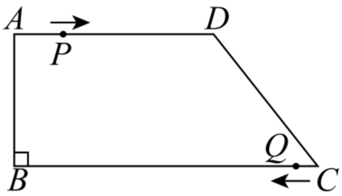
$\because \angle BOE = \angle DOF$，

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOF$；

综上所述，图中有 4 对三角形全等，分别为$\triangle ABD \cong \triangle CDB$，$\triangle AEG \cong \triangle CFH$，$\triangle DOG \cong \triangle BOH$，$\triangle BOE \cong \triangle DOF$.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，平行线的判定和性质，熟练掌握全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，平行线的判定和性质是解题的关键.

8.（2022 秋·山东东营·八年级东营市东营区实验中学校考期末）如图，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$\angle B = 90°$，$AB = 8cm$，$AD = 12cm$，$BC = 18cm$，点 P 从点 A 出发以$2cm/s$的速度沿 $A \to D \to C$ 运动，点 P 从点 A 出发的同时点 Q 从点 C 出发，以$1cm/s$的速度向点 B 运动，当点 P 到达点 C 时，点 Q 也停止运动．设点 P，Q 运动的时间为ts.



(1)从运动开始，当 t 取何值时，四边形$PQCD$是平行四边形？

(2)在运动过程中，是否存在以CD为腰的等腰三角形DQC？若存在，求出时间 t 的值；若不存在，说明理由.

【答案】(1)$t = 4$

(2)$t = 10$

【分析】（1）首先判定当$PQ \parallel CD$时，四边形$PQCD$是平行四边形，然后利用其性质$PD = QC$，构建方程，即可得解；

（2）根据题意分$CD = Q_1C$和$CD = Q_2D$两种情况讨论，分别根据等腰三角形的性质求解即可.

【详解】（1）当$PQ \parallel CD$时，四边形 $PDCQ$ 是平行四边形，

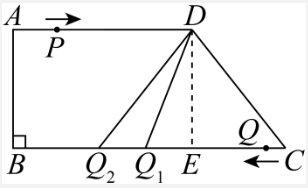
此时$PD = QC$，$PD = 12 - 2t, QC = t$

$\therefore 12 - 2t = t$，

$\therefore t = 4$，

$\therefore$当$t = 4$时，四边形$PQCD$是平行四边形.

（2）如图所示，作$DE \perp BC$交BC于点 E，



$\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle A = \angle B = 90°$

$\therefore$四边形$ABED$是矩形

$\therefore DE = AB = 8$，$BE = AD = 12$

$\therefore CE = BC - BE = 6$

$\therefore$在Rt$\triangle DEC$中，$DC = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 10$，

$\therefore$如图所示，当$CD = Q_1C$时，

$\therefore t = 10$；

当$CD = Q_2D$时，

$\because DE \perp BC$

$\therefore Q_2E = CE = 6$

$\therefore Q_2C = 2CE = 12$，

$\because AD + CD = 22$，点 P 从点 A 出发以2cm/s的速度沿 $A \to D \to C$ 运动，

$\therefore$当点 P 倒点 C 停止运动时，$t = 22 \div 2 = 11$，

$\because$当点 P 到达点 C 时，点 Q 也停止运动，

$\therefore$点 Q 运动的时间最多为 11 秒，

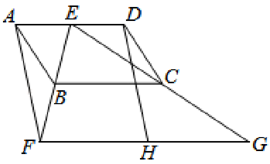
$\because 12>11$，

$\therefore t = 12$应舍去，

综上所述，当$t = 10$时，$\triangle DQC$是以CD为腰的等腰三角形．

【点睛】此题主要考查动点问题，平行四边形的判定，一元一次方程，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是根据题意列出方程求解．

9．（2023 秋·山东烟台·八年级统考期末）如图，四边形$ABCD$为平行四边形，E为AD上的一点，连接EB并延长，使$BF = BE$，连接EC并延长，使$CG = CE$，连接FG．H为FG的中点，连接DH．



(1)求证：四边形$AFHD$为平行四边形；

(2)若$CB=CE$，$\angle BAE=80^{\circ}$，$\angle DCE=30^{\circ}$，求$\angle CBE$的度数．

【答案】(1)见解析

(2)65°

【分析】（1）根据平行四边的性质得出$AD=BC$，$AD\parallel BC$，根据$BF=BE$，$CG=CE$，可得BC是$\triangle EFG$的中位线，等量代换得出$BC=FH$，可得$AD=FH$，即可得证；

（2）根据平行四边形的性质得出$\angle BAE=\angle BCD=80^{\circ}$，求得$\angle BCE=\angle BCD-\angle ECD$，根据$CB=CE$，由等边对等角即可求解．

【详解】（1）解：证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$AD\parallel BC$，

$\because BF=BE$，$CG=CE$，

$\therefore BC$是$\triangle EFG$的中位线，

$\therefore BC\parallel FG$，$BC=\frac{1}{2}FG$，

$\because H$为FG的中点，

$\therefore FH=\frac{1}{2}FG$，

$\therefore AD\parallel FH$，$BC=FH$，

$\therefore AD=FH$，

$\therefore$四边形$AFHD$是平行四边形；

（2）解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore \angle BAE=\angle BCD=80^{\circ}$，

$\because \angle DCE=30^{\circ}$，

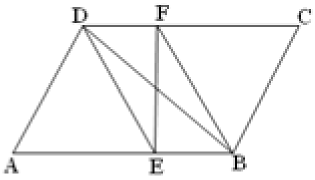
$\therefore \angle BCE=\angle BCD-\angle ECD=80^{\circ}-30^{\circ}=50^{\circ}$，

$\because CB=CE$，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB=\frac{1}{2}(180^{\circ}-50^{\circ})=65^{\circ}$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质与判定，中位线的性质与判定，掌握平行四边形的性质与判定是解题的关键．

10．(2021春·江苏徐州·八年级校考阶段练习）已知：如图，在四边形$ABCD$中，DE，BF分别是$\angle ADC$和$\angle ABC$的角平分线，交AB，CD于点E，F连接BD，EF．



(1)求证：BD,EF互相平分；

(2)若$\angle A=60^{\circ},AE=2EB,AD=4$，求四边形$DEBF$的周长和面积．

【答案】(1)见解析

(2)四边形$DEBF$的周长为12，四边形$DEBF$的面积为$4\sqrt{3}$

【分析】（1）证明BD,EF互相平分，只要证$DEBF$是平行四边形，利用两组对边分别平行来证明．

（2）首先证明出$\triangle ADE$是等边三角形，然后根据平行四边形的周长公式求解，过D点作$DG\perp AB$于点G，根据勾股定理求出$DG=2\sqrt{3}$，然后利用平行四边形的面积公式求解即可．

【详解】（1）解：∵四边形$ABCD$是平行四边形

∴$CD\parallel AB$，$CD=AB$，$AD=BC$

∵DE、BF分别是$\angle ADC$和$\angle ABC$的角平分线

∴$\angle ADE=\angle CDE$，$\angle CBF=\angle ABF$

∵$CD\parallel AB$，

∴$\angle AED=\angle CDE$，$\angle CFB=\angle ABF$

∴$\angle AED=\angle ADE$，$\angle CFB=\angle CBF$

∴$AE=AD$，$CF=CB$，

∴$AE=CF$，

∴$AB-AE=CD-CF$即$BE=DF$

∵$DF\parallel BE$，

∴四边形$DEBF$是平行四边形，

∴BD,EF互相平分；

（2）∵$\angle A=60°$，$AE=AD$，

$\therefore\triangle ADE$是等边三角形

$\because AD=4$，

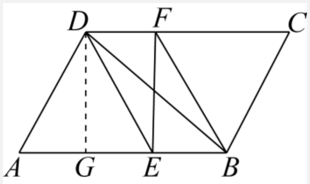
$\therefore DE=AE=4$，

$\because AE=2EB$，

$\therefore BE=2$

$\therefore$四边形$DEBF$的周长$=2(BE+DE)=2(4+2)=12$；

过 D 点作$DG\perp AB$于点 G，



在$\mathrm{Rt}\triangle ADG$中，$AD=4$，$\angle A=60°$，

$\therefore\angle ADG=30°$，

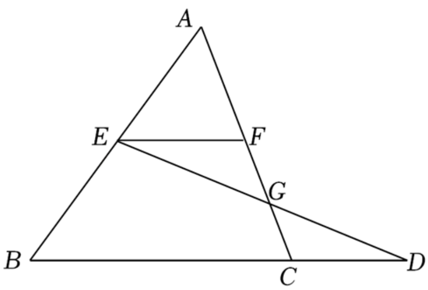
$\therefore AG=\frac{1}{2}AD=2$，

$\therefore DG=\sqrt{AD^2-AG^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$四边形$DEBF$的面积$=BE\times DG=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

【点睛】此题主要考查了平行四边形的性质与判定，勾股定理，在应用判定定理判定平行四边形时，应仔细观察题目所给的条件，仔细选择适合于题目的判定方法进行解答，避免混用判定方法.

11.（2021 春·宁夏中卫·八年级校考期末）如图，在$\triangle ABC$中，E，F 分别是边AB,AC的中点，G 是CF的中点，连接EG并延长，交BC的延长线于点 D，求证：$BC=2CD$.



【答案】见解析

【分析】根据三角形中位线定理可得$EF\parallel BC$，$BC=2EF$，从而得到$\angle DCG=\angle EFG$，再证明$\triangle GCD\cong\triangle GFE$，即可求证.

【详解】证明：$\because E$，F 分别是边AB,AC的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABC$的中位线.

$\therefore EF\parallel BC$，$BC=2EF$，

$\therefore\angle DCG=\angle EFG$.

$\because G$ 是CF的中点，

$\therefore GC=GF$，

在$\triangle GCD$和$\triangle GFE$中，

$$\begin{cases}\angle DCG=\angle EFG\\ GC=GF\\ \angle CGD=\angle FGE\end{cases},$$

$\therefore\triangle GCD\cong\triangle GFE(\mathrm{ASA})$，

$\therefore EF=CD$，

$\therefore BC=2CD$.

【点睛】本题主要考查了三角形中位线定理，全等三角形的判定和性质，熟练掌握三角形中位线定理，全等三角形的判定和性质是解题的关键.

12．（2022春·黑龙江哈尔滨·八年级哈尔滨市第四十七中学校考阶段练习）在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，垂足为点D，点E是AB边的中点，$DG\parallel AB$，EG交AD于点F，$EF=FG$，连接DG.

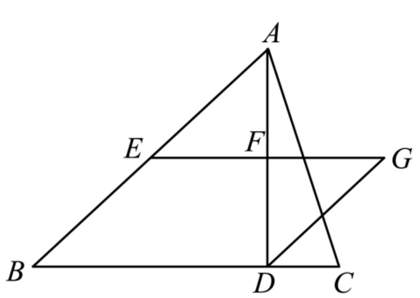


图1

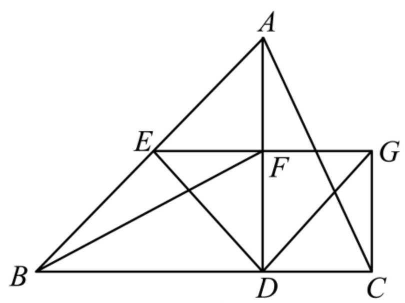


图2

(1)如图1，求证：四边形$BEGD$是平行四边形；

(2)如图2，连接DE、BF、CG，若$AC=BF$，$CD=DF$，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图2中长度为CG的2倍的线段.

【答案】(1)见解析；

(2)图2中长度为CG的2倍的线段是BD、EG、AD.

【分析】（1）证明EF是$\triangle ABD$的中位线，由三角形中位线定理得出$BD=2EF$，证出$BD=EG$，得出四边形$BEGD$是平行四边形；

（2）由HL证明$\mathrm{Rt}\triangle BDF$和$\mathrm{Rt}\triangle ADC$，得出$BD=AD$，$CD=DF=\frac{1}{2}AD$，$BD=EG=2FG$，得出$CD=FG$，

证出四边形$CDFG$是平行四边形，因此$CG=DF=\frac{1}{2}AD$，即可得出结论．

【详解】（1）证明：$\because DG\parallel AB$，

$\therefore \angle EAF=\angle GDF$，

在$\triangle EAF$与$\triangle GDF$中，

$$\begin{cases}\angle EAF=\angle GDF\\ \angle AFE=\angle DFG\\ EF=FG\end{cases},$$

$\therefore \triangle EAF\cong\triangle GDF$，

$\therefore AF=DF$

$\therefore F$是AD的中点，

$\because$点E是AB边的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore BD=2EF$，$BD\parallel EG$

$\because EF=FG$，

$\therefore BD=EG$，

$\therefore$四边形$BEGD$是平行四边形；

（2）解：$BD=EG=AD=2CG$；理由如下：

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle BDF=\angle ADC=90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BDF$和$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，$\begin{cases}BF=AC\\ DF=CD\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDF\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$（HL），

$\therefore BD=AD$，

$\because CD=DF=\frac{1}{2}AD$，$BD=EG=2FG$，

$\therefore CD=FG$，

又$\because FG\parallel CD$，

$\therefore$四边形$CDFG$是平行四边形，

$\therefore CG=DF=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore BD=EG=AD=2CG$，

即图 2 中长度为CG的 2 倍的线段是BD、EG、AD．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理；熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明三角形全等是解决问题（2）的关键．

13．（2022秋·浙江绍兴·八年级校联考期中）如图，$\triangle ABC$中，$BA=BC$，$CO\perp AB$于点O，$AO=2$，$BO=3$．

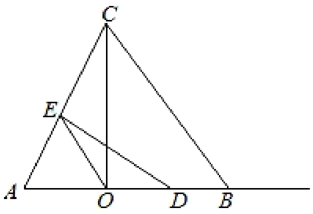
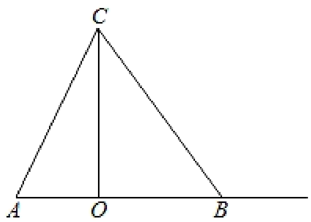


图1



备用图

(1)求BC，AC的长；

(2)若点D是射线OB上的一个动点，作$DE\perp AC$于点E，连接OE．当点D在线段OB上时，若$\triangle AOE$是以AO为腰的等腰三角形，请求出所有符合条件的OD的长．

【答案】(1)5，$2\sqrt{5}$

(2)2 或$2\sqrt{5}-2$

【分析】（1）根据$BA=BC$可得BC的长，分别根据勾股定理可得OC和AC的长；

（2）分两种情况：$AO=OE$和$AO=AE$时，分别画图，根据三角形的中位线定理和证明三角形全等可解决问题．

【详解】（1）解：$\because AO=2$，$BO=3$，

$\therefore AB=5$，

$\because BA=BC$，

$\therefore BC=5$，

$\because CO\perp AB$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=90°$，

由勾股定理得：$CO=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$AC=\sqrt{AO^2+CO^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$；

（2）分两种情况：

i)当$AO=OE=4$时，过O作$ON\perp AC$于N，如图 1 所示：

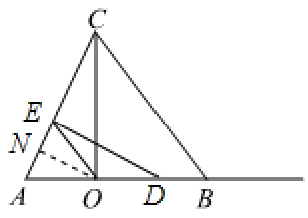


图 1

$\therefore AN=EN$，

$\because DE\perp AC$，

$\therefore ON\parallel DE$，

$\therefore ON$是$\triangle ADE$的中位线，

$\therefore OD=AO=2$；

$ii)$当$AO=AE=4$时，如图 2 所示：

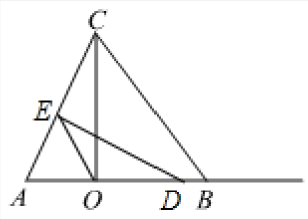


图 2

在$\triangle CAO$和$\triangle DAE$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\\ AO=AE\\ \angle AOC=\angle AED=90^\circ\end{cases},$$

$\therefore\triangle CAO\cong\triangle DAE(\text{ASA})$，

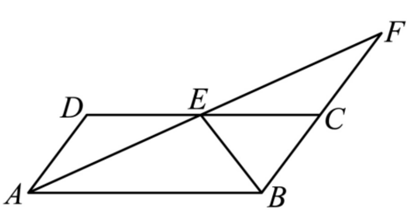
$\therefore AD=AC=2\sqrt{5}$，

$\therefore OD=AD-AO=2\sqrt{5}-2$；

综上所述，OD的长为 2 或$2\sqrt{5}-2$.

【点睛】本题是三角形的综合题，考查了全等三角形的判定与性质、平行线的性质、等腰三角形的判定和性质、勾股定理、分类讨论等知识；正确作出辅助线是等腰三角形是解题的关键.

14.（2022 春·广东江门·八年级江门市怡福中学校考阶段练习）如图，在▱$ABCD$中，点 E 是CD边的中点，连接AE并延长交BC的延长线于点 F，连接BE，$BE\perp AF$.



(1)求证：$\triangle ADE \cong \triangle FCE$；

(2)求证：AE平分$\angle DAB$；

(3)若$\angle DAB = 60°$，$AB = 4$，求▱$ABCD$的面积．

【答案】(1)见解析；

(2)见解析；

(3)$4\sqrt{3}$

【分析】(1)根据平行四边形的性质，可得$\angle D = \angle ECF$，根据对顶角相等，$\angle DEA = \angle CEF$，再根据点E是CD边的中点，即可求证；

（2）通过证明$\triangle ABF$为等腰三角形，即可求证；

（3）由题意可得，▱$ABCD$的面积等于$\triangle ABF$的面积，利用含$30°$角直角三角形的性质，即可求解．

【详解】（1）证明：在▱$ABCD$中，$AD \parallel BC$，

$\therefore \angle D = \angle ECF$，

$\because$点E是CD边的中点，

$\therefore DE = CE$，

又$\because \angle DEA = \angle CEF$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE(\mathrm{ASA})$；

（2）证明：由（1）可得$\triangle ADE \cong \triangle FCE$，

$\therefore AE = EF$，即BE为$\triangle ABF$的中线，$\angle F = \angle DAE$，

又$\because BE \perp AF$，

$\therefore \triangle ABF$为等腰三角形，

$\therefore AB = BF$，$\angle F = \angle BAE$

$\therefore \angle DAE = \angle BAE$，即$AE$平分$\angle DAB$；

（3）解：由（2）可得AE平分$\angle DAB$；

又$\because \angle DAB = 60°$

$\therefore \angle EAB = 30°$，

$\because BE \perp AF$，

$\therefore \angle AEB = 90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，$\angle EAB = 30°$，$AB = 4$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB=2$，

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore AF=2AE=4\sqrt{3}$，

由（1）可得$\triangle ADE\cong\triangle FCE$，则$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CEF}$，

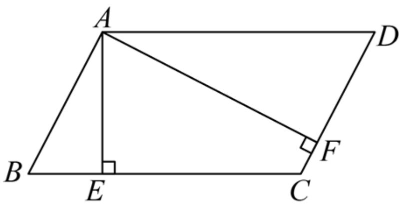
$\therefore S_{\square ABCD}=S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AF\times BE=4\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，含30°角直角三角形的性质，勾股定理，解题的关键是熟练掌握相关基本性质.

15.（浙江省杭州市下城区2020-2021学年八年级下学期期末数学试题）在四边形$ABCD$中，已知$AD\parallel BC$，$\angle B=\angle D$，$AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F.

（1）求证：四边形$ABCD$是平行四边形；

（2）若$AF=2AE$，$BC=6$，求CD的长.



【答案】（1）见解析；（2）3

【分析】（1）根据两组对边分别平行证明该四边形为平行四边形.

（2）利用等面积法求出CD长.

【详解】（1）

证明：$\because AD//BC$，

$\therefore \angle BAD+\angle B=180°$，

$\because \angle B=\angle D$，

$\therefore \angle BAD+\angle D=180°$，

$\therefore AB//CD$，

又$\because AD//BC$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形；

（2）解：$\because AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F，

$\therefore$平行四边形的面积$=BC\times AE=CD\times AF$，

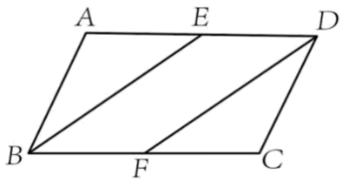
$\because AF=2AE$，

$\therefore BC=2CD=6$，

$\therefore CD=3$．

【点睛】本题考查平行四边形的判定和等面积法的使用，掌握这两点是解题关键．

16．（江苏省盐城市射阳县盐城中学新洋分校2021-2022学年八年级下学期5月月考数学试题）如图，在平行四边形$ABCD$中，



(1)若点E、F是AD、BC的中点，连接BE、DF，求证：$BE=DF$；

(2)若DF平分$\angle ADC$且交边BC于点F，如果$AB=5$，$BC=8$，试求线段BF的长．

【答案】(1)见解析

(2)3

【分析】（1）根据四边形$ABCD$是平行四边形可得$AD\parallel BC$，$AD=BC$，再由点E、F是AD、BC的中点，可得$DE=BF$，即可求证；

（2）根据$AD\parallel BC$和DF平分$\angle ADC$可得$\angle CFD=\angle CDF$，从而得到$CF=CD=5$，即可求解．

（1）

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$，$AD=BC$，

$\because$点E、F是AD、BC的中点，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD,BF=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore DE=BF$，

$\therefore$四边形$BFDE$是平行四边形，

$\therefore BE=DF$；

（2）

解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$，　$CD=AB=5$，

$\therefore \angle ADF=\angle CFD$，

∵DF平分$\angle ADC$，

∴$\angle ADF=\angle CDF$，

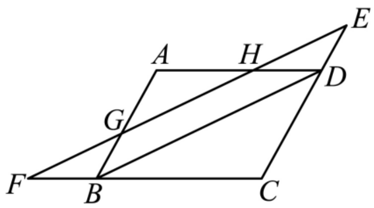
∴$\angle CFD=\angle CDF$，

∴$CF=CD=5$，

∴$BF=BC-CF=8-5=3$．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的判定；熟记平行四边形的性质，证出$CF=CD$是解决问题（2）的关键．

17．（江苏省苏州市吴江区吴江区梅堰中学2020-2021学年八年级下学期3月月考数学试题）如图，在平行四边形$ABCD$中，直线$EF\parallel BD$，与CD、CB的延长线分别交于点E、F，交AB、AD于G、H.



(1)求证：四边形$FBDH$为平行四边形；

(2)求证：$FG=EH$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】（1）根据四边形$ABCD$为平行四边形，可得$AD\parallel BC$，根据已知条件可得$EF\parallel BD$，根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形即可得证；

（2）同（1）的方法证明四边形$BDEG$为平行四边形，得出$HF=BD$由四边形$FBDH$为平行四边形，可得$BD=EG$，进而可得$FH=EG$，根据$FH-GH=EG-GH$，即可得证.

（1）

∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，

∴$EF\parallel BD$，

∴四边形$FBDH$为平行四边形，

（2）

∵四边形$FBDH$为平行四边形，

∴$HF=BD$，

∵$EF\parallel BD$，$AB\parallel DC$，

∴四边形 $BDEG$ 为平行四边形，

∴$BD=EG$，

∴$FH=EG$，

∴$FH-GH=EG-GH$，

∴$FG=EH$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质与判定，掌握平行四边的性质与判定是解题的关键.

18.（江苏省无锡市宜兴市和桥镇第二中学2021-2022学年八年级下学期3月月考数学试题）已知，如图在▱$ABCD$中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O，点 E，F 分别在 OD，BO 上，且 $OE=OF$，连接 AE，CF.

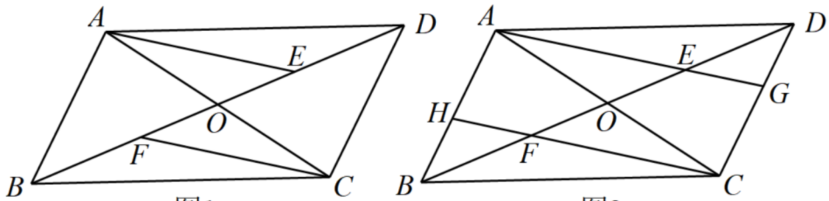


图1　　图2

(1)如图1，求证：$AE=CF$；

(2)如图2，延长 AE 交 CD 于点 G，延长 CF 交 AB 于点 H．求证：$AH=CG$.

【答案】(1)证明见解析.

(2)证明见解析.

【分析】（1）根据平行四边形的性质可得 $OA=OC$，又因为$\angle AOE=\angle COF$，$OE=OF$，进而可证明$\triangle AOE\cong\triangle COF(SAS)$，根据全等三角形的性质即可得证；

（2）由（1）得$\triangle AOE\cong\triangle COF$，根据全等三角形的性质可得$\angle EAO=\angle FCO$，进而可得$AG\parallel CF$；根据平行四边形的性质可得$AB\parallel CD$，进而可证四边形 $AHCG$ 是平行四边形，从而得出 $AH=CG$.

（1）

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OA=OC$

又∵ $\angle AOE=\angle COF$，$OE=OF$

∴$\triangle AOE\cong\triangle COF$(SAS)

∴$AE=CF$.

（2）

证明：由（1）得$\triangle AOE\cong\triangle COF$，

$\therefore\angle EAO=\angle FCO$

$\therefore AG\parallel CF$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AB\parallel CD$

即 $AH\parallel CG$

$\therefore$ 四边形 $AHCG$ 是平行四边形

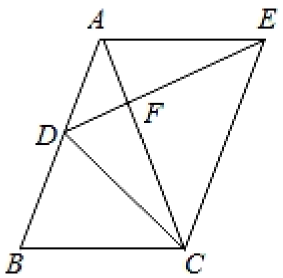
$\therefore AH=CG$.

【点睛】本题考查了三角形全等的性质与判定，平行四边形的性质与判定，熟练掌握性质与判定定理是解决本题的关键.

19．（江苏省常州市溧阳市 2020-2021 学年八年级下学期期末数学试题）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=7$，$BC=5$，将$\triangle ABC$绕点 C 旋转，使得点 D 落在 AB 边上，点 A 落在点 E 处，连接 AE.

（1）求证：四边形 $ABCE$ 是平行四边形；

（2）求$\triangle AFE$的面积.



【答案】（1）见解析；（2）$\frac{90\sqrt{19}}{73}$

【分析】（1）证明 $AB\parallel CE$，$AB=CE$ 即可；

（2）如图，过点 C 作 $CT\perp AB$ 于 T，$CK\perp DE$ 于 K，过点 A 作 $AJ\perp EF$ 于 J. 证明$\frac{AJ}{CK}=\frac{AF}{FC}$，求出 CT，$\triangle ACE$ 的面积，即可解决问题.

【详解】证明：（1）$\because AB=AC$，

$\therefore\angle B=\angle ACB$，

$\because$将$\triangle ABC$绕点 C 旋转，使得点 D 落在 AB 边上，

$\therefore AC=CE=AB$，$\angle ACB=\angle DCE$，$CB=CD$，

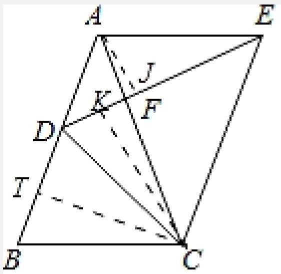
$\therefore\angle B=\angle CDB$，

$\therefore\angle CDB=\angle DCE$，

$\therefore AB \parallel CE$，

$\therefore$四边形 $ABCE$ 是平行四边形.

（2）如图，过点 C 作 $CT \perp AB$ 于 T，$CK \perp DE$ 于 K，过点 A 作 $AJ \perp EF$ 于 J.



$\because CB = CD = 5$，$CT \perp BD$，

$\therefore BT = DT$，

设 $BT = x$，

$\because CT^2 = BC^2 - BT^2 = AC^2 - AT^2$，

$\therefore 5^2 - x^2 = 7^2 - (7 - x)^2$，

$\therefore x = \frac{25}{14}$，

$\therefore BD = 2x = \frac{25}{7}$，$CT = \sqrt{BC^2 - BT^2} = \sqrt{5^2 - (\frac{25}{14})^2} = \frac{15\sqrt{19}}{14}$

$\therefore AD = AB - BD = 7 - \frac{25}{7} = \frac{24}{7}$，

$\because S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \bullet AD \bullet CT = \frac{1}{2} \bullet AJ \bullet DE$，

$\therefore \frac{AJ}{CT} = \frac{\frac{24}{7}}{7} = \frac{24}{49}$，

$\because \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta EFC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot EF \cdot AJ}{\frac{1}{2} \cdot EF \cdot CK} = \frac{AJ}{CK} = \frac{AF}{FC}$，

$\because \angle CDB = \angle CDE$，$CT \perp DB$，$CK \perp DE$

$\therefore CT = CK$，

$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{AJ}{CT} = \frac{24}{49}$，

$\therefore AF = \frac{24}{73} AC$，

$\therefore S_{\triangle}AEF = \frac{24}{73} S_{\triangle}AEC = \frac{24}{73} \times \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{15\sqrt{19}}{14} = \frac{90\sqrt{19}}{73}$.

【点睛】此题主要考查了平行四边形的证明以及勾股定理的应用，熟练掌握平行四边形的证明方法以及勾股定理的应用是解题的关键.