

5. 4. 3 正切函数的性质与图象

目录

【题型归纳】	2
题型一：正切函数的定义域问题.....	2
题型二：正切函数的对称性问题.....	3
题型三：正切函数的周期性问题.....	5
题型四：正切函数的单调性问题.....	6
题型五：正切函数的最值与值域问题.....	7
题型六：正切函数的奇偶性问题.....	8
题型七：正切函数的图像问题.....	9
题型八：解不等式问题.....	12
题型九：比较大小问题.....	14
题型十：正切函数的综合问题.....	15
题型十一：根据正切函数单调性求参数的范围问题.....	18
【重难点集训】	19
【高考真题】	30

【题型归纳】

题型一：正切函数的定义域问题

1. (2024·高一·全国·课后作业) $y = \tan 2x$ 定义域为 ()

- A. $\left\{x \mid x \neq \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C. $\{x \mid x \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\left\{x \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

【答案】A

【解析】因为 $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，所以 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ 。

则 $y = \tan 2x$ 定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

故选：A.

2. (2024·高一·全国·课后作业) 函数 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 ()

- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- B. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- D. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

【答案】D

【解析】由 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 有意义可得， $x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

即 $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

故函数 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 。

故选：D.

3. (2024·高一·广东佛山·阶段练习) 函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 ()

- A. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

【答案】A

【解析】令 $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

故选：A

4. (2024·高一·内蒙古赤峰·期末) 函数 $y = \sqrt{1 - \tan x}$ 的定义域为 () .

A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbf{Z}$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】由题意可得： $1 - \tan x \geq 0$ ，且 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

即 $\tan x \leq 1$ ，

$$\therefore x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

故选：C.

题型二：正切函数的对称性问题

5. (2024·高一·上海·期中) 若函数 $f(x) = 7 \tan x$ ， $g(x) = 5 \sin 2x$ ，则 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

的所有公共点的横坐标的和为_____.

【答案】 3π

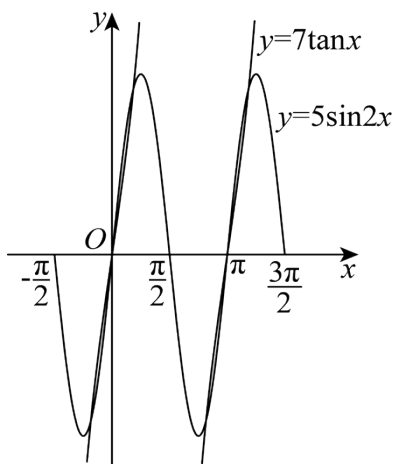
【解析】因为 $f(x) = 7 \tan x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ ，

$g(x) = 5 \sin 2x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ ，

所以两函数的交点也关于 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ 对称， $k \in \mathbf{Z}$ ，

又因为函数 $f(x) = 7 \tan x$ ， $g(x) = 5 \sin 2x$ 的最小正周期为 π ，

作出两函数的在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的图象，如下图，



由此可得两函数图象共 6 个交点，设这 6 个交点的横坐标依次为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ，

且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ ，

其中 x_1, x_3 关于 $(0, 0)$ 对称， $x_2 = 0$ ， x_4, x_6 关于 $(\pi, 0)$ 对称， $x_5 = \pi$ ，

所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3\pi$ 。

故答案为： 3π 。

6. (2024·高一·四川·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \tan(3x + \varphi)$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$) 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{9}, 0)$ 对称，则 $\varphi =$ _____。

【答案】 $-\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{1}{6}\pi$

【解析】 因为 $f(x) = \tan(3x + \varphi)$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$) 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{9}, 0)$ 对称，

所以 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 。

故答案为： $-\frac{\pi}{6}$ 。

7. (2024·高一·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = \tan(x + \varphi)$ 的图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\varphi =$ _____。

【答案】 $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$

【解析】 由题意得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，即 $\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ ，

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

故答案为: $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}$

题型三: 正切函数的周期性问题

8. (2024·高一·新疆巴音郭楞·期末) 函数 $f(x) = \tan \omega x (\omega > 0)$ 的图像的相邻两支截直线 $y = \frac{\pi}{8}$ 所得线段长为 $\frac{\pi}{8}$, 则 ω 的值是_____.

【答案】8

【解析】由题意知函数 $f(x) = \tan \omega x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{8}$,

$$\therefore \omega = \frac{\pi}{T} = 8.$$

故答案为: 8.

9. (2024·广东·一模) 已知函数 $f(x) = \tan\left(\frac{a}{a^2+1}x + \varphi\right) (a > 0)$ 的最小正周期为 2π , 则 $a =$ _____.

【答案】1

【解析】依题意 $T = \frac{\pi}{\frac{a}{a^2+1}} = 2\pi$,

整理得 $a^2 - 2a + 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

故答案为: 1.

10. (2024·高三·全国·课后作业) 函数 $f(x) = \tan \omega x (\omega > 0)$ 的图像的相邻两支截直线 $y = 2$ 所得线段长为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】因为函数 $f(x) = \tan \omega x (\omega > 0)$ 的图像的相邻两支截直线 $y = 2$ 所得线段长为 $\frac{\pi}{2}$,

所以该函数的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$, 即 $f(x) = \tan 2x$,

因此 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{3}$

题型四: 正切函数的单调性问题

11. (2024·高三·全国·专题练习) $y = 3 \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ 的单调递减区间为_____.

【答案】 $\left(4k\pi - \frac{4}{3}\pi, 4k\pi + \frac{8}{3}\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$

【解析】 函数 $y = 3 \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) = -3 \tan\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$,

由正切函数的性质知 $k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{x}{4} - \frac{\pi}{6} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

解得 $4k\pi - \frac{4}{3}\pi < x < 4k\pi + \frac{8}{3}\pi (k \in \mathbb{Z})$

所以函数的单调递减区间为 $\left(4k\pi - \frac{4}{3}\pi, 4k\pi + \frac{8}{3}\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$

故答案为: $\left(4k\pi - \frac{4}{3}\pi, 4k\pi + \frac{8}{3}\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$

12. (2024·高一·全国·课后作业) 函数 $f(x) = 3 \tan(-2x)$ 的单调减区间为_____.

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$

【解析】 因为 $f(x) = 3 \tan(-2x) = -3 \tan(2x)$,

由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 可得 $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$, 无增区间.

故答案为: $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$.

13. (2024·高一·四川达州·阶段练习) 函数 $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间为_____

【答案】 $\left(2k - \frac{3}{2}, 2k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$

【解析】 对于函数 $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$, 由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

可得 $2k - \frac{3}{2} < x < 2k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k - \frac{3}{2}, 2k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$.

故答案为: $\left(2k - \frac{3}{2}, 2k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$.

题型五: 正切函数的最值与值域问题

14. (2024·高一·上海·课堂例题) 求函数 $y = \tan^2 x - 2 \tan x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 的值域.

【解析】 $y = \tan^2 x - 2 \tan x = (\tan x - 1)^2 - 1$.

$$\because x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \therefore \tan x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

当 $\tan x = 1$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, y 取最小值 -1 ;

当 $\tan x = -\sqrt{3}$, 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, y 取最大值 $3 + 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 函数的值域为 $[-1, 3 + 2\sqrt{3}]$.

15. (2024·高一·上海·课堂例题) 求函数 $y = \tan^2 x - \tan x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值与最小值.

【解析】依题意, 函数 $y = \tan^2 x - \tan x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,

设 $t = \tan x, t \in [-1, 1]$,

$$\text{则 } y = t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, t \in [-1, 1],$$

所以当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 取得最小值为 $-\frac{1}{4}$,

当 $t = -1$ 时, 取得最大值为 $(-1)^2 - (-1) = 2$.

16. (2024·高一·上海·课堂例题) 求函数 $y = \frac{8 \tan x}{2 \tan^2 x + 1}$ 的最大值和最小值.

【解析】①当 $\tan x = 0$ 时, $y = 0$;

$$\text{②当 } \tan x > 0 \text{ 时, } y = \frac{8}{2 \tan x + \frac{1}{\tan x}},$$

$$\text{由 } 2 \tan x + \frac{1}{\tan x} \geq 2\sqrt{2} \text{ 可知 } y \leq \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $2 \tan x = \frac{1}{\tan x}$, 即 $\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, $\therefore 0 < y \leq 2\sqrt{2}$.

$$\text{③当 } \tan x < 0 \text{ 时, } y = \frac{8}{2 \tan x + \frac{1}{\tan x}},$$

$$\text{由 } -2 \tan x + \frac{1}{-\tan x} \geq 2\sqrt{2} \text{ 知 } 2 \tan x + \frac{1}{\tan x} \leq -2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } \frac{8}{-2\sqrt{2}} \leq y < 0, \text{ 即}$$

$$-2\sqrt{2} \leq y < 0.$$

综上, y 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 最小值为 $-2\sqrt{2}$.

题型六: 正切函数的奇偶性问题

17. (2024·高一·山东烟台·期末) 下列函数为奇函数的是 ()

- A. $y = |\sin x|$ B. $y = 1 - \cos 2x$ C. $y = -3\sin 2x$ D. $y = 1 + \tan x$

【答案】C

【解析】由 $y = f(x) = |\sin x|$ ，定义域关于原点对称，则 $f(-x) = |\sin(-x)| = |\sin x| = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 A 错误；

由 $y = f(x) = 1 - \cos 2x$ ，定义域关于原点对称，则 $f(-x) = 1 - \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 B 错误；

由 $y = f(x) = -3\sin 2x$ ，定义域关于原点对称，则 $f(-x) = -3\sin(-2x) = 3\sin 2x = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数，故 C 正确；

由 $y = f(x) = 1 + \tan x$ ，定义域关于原点对称，则 $f(-x) = 1 + \tan(-x) = 1 - \tan x \neq f(x)$ ，且 $f(-x) \neq -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 非奇非偶，故 D 错误。

故选：C

18. (2024·高三·陕西·阶段练习) 已知函数 $f(x) = x^5 + \tan x - 3$ ，且 $f(-m) = -2$ ，则 $f(m) =$ ()

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

【答案】A

【解析】设 $g(x) = f(x) + 3 = x^5 + \tan x$ ，定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ，关于原点对称，

则 $g(-x) = (-x)^5 + \tan(-x) = -x^5 - \tan x = -g(x)$ ，故 $g(x)$ 是奇函数，

从而 $g(m) = -g(-m)$ ，即 $f(m) + 3 = -[f(-m) + 3]$ ，

即 $f(m) = -f(-m) - 6 = -4$ 。

故选：A

19. (2024·高一·湖北·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \tan(\omega x - \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 与直线 $y = a$ 交于 A, B 两点，且线段 AB 长度的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ ，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后恰好关于原点对称，则 φ 的最大值为

()

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{8}$

【答案】C

【解析】由题意知，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$ ，得 $\omega = 3$ ，

所以 $f(x) = \tan(3x - \varphi)$ ，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

得到 $y = \tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \varphi\right] = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ 的图象，

因为该图象关于原点对称，则 $\frac{\pi}{4} - \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

当 $k > 0$ 时， $k \in \mathbb{Z}$ ， $\varphi < 0$ ，不合题意，当 $k = 0$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ，

又 $0 < \varphi < \pi$ ，所以当 $k = -1$ 时， φ 取 $\frac{3\pi}{4}$ ，当 $k \leq -2, -3, \dots$ 时， $\varphi \geq \frac{5\pi}{4}$ ，不合题意，

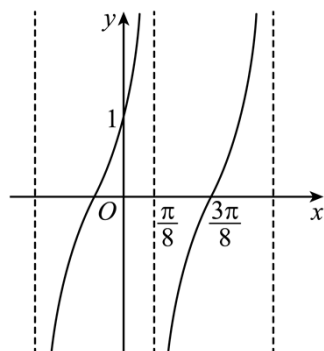
故 φ 最大值为 $\frac{3\pi}{4}$ ，

故选：C

题型七：正切函数的图像问题

20. (2024·高一·河南南阳·期中) 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\varphi > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)， $y = f(x)$ 的部分图象如

图，则 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = (\quad)$



A. $2 + \sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $-\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】由图象可知， $\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} = \frac{T}{2}$ ，所以 $T = \frac{\pi}{2}$ 。

由 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ 可得， $\omega = 2$ ，所以 $f(x) = A \tan(2x + \varphi)$ 。

又 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0$ ，所以 $A \tan\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = 0$ ，

所以 $\frac{3\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ， $f(x) = A \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。

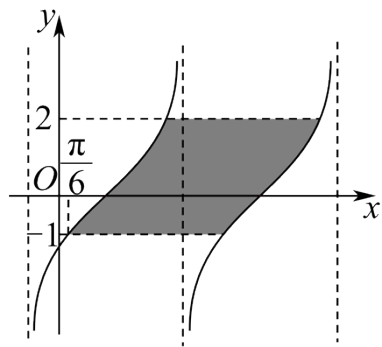
又 $f(0) = 1$ ，所以 $A \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = A = 1$ ，所以 $A = 1$ ，

所以 $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，

所以 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \tan\left(2 \times \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

21. (2024·山东·模拟预测) 函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图像如图所示, 图中阴影部分的面积为 6π , 则 $\varphi =$ ()



A. $-\frac{\pi}{3}$

B. $-\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{5\pi}{12}$

【答案】A

【解析】如图所示, 区域①和区域③面积相等, 故阴影部分的面积即为矩形 $ABCD$ 的面积, 可得 $AB = 3$, 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $AD = T$,

由题意可得: $3T = 6\pi$, 解得 $T = 2\pi$,

故 $\frac{\pi}{\omega} = 2\pi$, 可得 $\omega = \frac{1}{2}$,

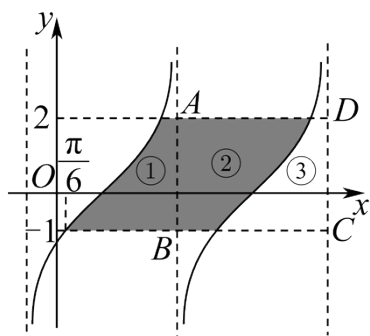
即 $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$,

可知 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$, 即 $\tan\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \varphi\right) = -1$,

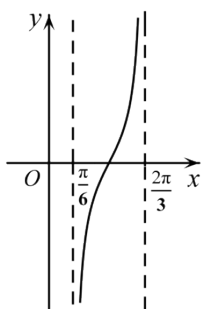
$\therefore \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\pi}{12} + \varphi \in \left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$,

$\therefore \frac{\pi}{12} + \varphi = -\frac{\pi}{4}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

故选：A.



22. (2024·河南·模拟预测) 函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图像如下图, 则 $|\varphi|$ 最小值为 ()



A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{12}$

【答案】A

【解析】由图知 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2$, 由 $\omega \cdot \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

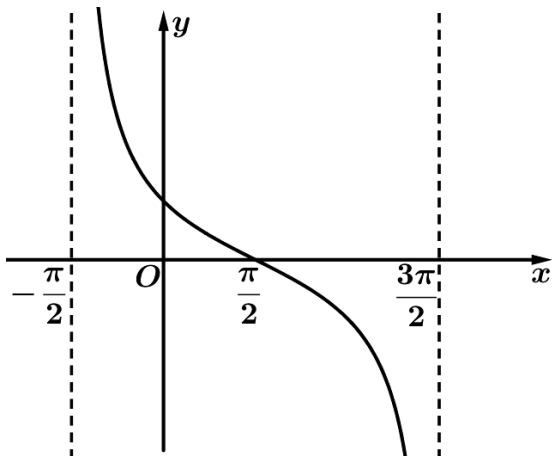
解得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

所以当 $k=1$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

故选: A

23. (2024·高三·重庆沙坪坝·阶段练习) 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图像如图所示, 且

$f(\pi) = -1$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $2-\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】由图象可知，函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 2π ，

所以 $\omega = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ ， $f(x) = A \tan\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$ ，

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 得 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$ ，所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

则 $f(x) = A \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} + k\pi\right) = A \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，

又 $f(\pi) = -1$ ，所以 $A \tan \frac{\pi}{4} = -1$ ，所以 $A = -1$ ，

故 $f(x) = -\tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，从而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：A。

题型八：解不等式问题

24. (2024·高一·河北邢台·期末) 下列是“ $\tan x > \sqrt{3}$ ”的一个充分不必要条件的是 ()

A. $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$

C. $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right)$

D. $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$

【答案】C

【解析】由 $\tan x > \sqrt{3}$ 可得 $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，但 $\frac{\pi}{4} \notin \left(k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ，

所以 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 不是 $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 的子集，

所以 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 不是“ $\tan x > \sqrt{3}$ ”的充分条件，A 错误，

因为 $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ，但 $\frac{\pi}{2} \notin \left(k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ，

所以 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 不是 $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 的子集，

所以 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 不是“ $\tan x > \sqrt{3}$ ”的充分条件，B 错误，

因为 $\frac{7\pi}{12} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ，但 $\frac{7\pi}{12} \notin \left(k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ，

所以 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 不是 $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 的子集，

所以 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 不是“ $\tan x > \sqrt{3}$ ”的充分条件，D 错误，

因为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right) \sqsubset \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以

$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 为“ $\tan x > \sqrt{3}$ ”的一个充分不必要条件，C 正确；

故选：C.

25. (2024·高一·全国·课后作业) 若直线 $x = a\pi$ ($0 < a < 1$) 与函数 $y = \tan x$ 的图象无公共点，则不等式 $\tan x \geq 2a$ 的解集为 ()

- A. $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C. $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

【答案】B

【解析】因为直线 $x = a\pi$ 与函数 $y = \tan x$ 的图象无公共点，且 $0 < a < 1$ ，

所以 $a\pi = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $a = \frac{1}{2}$ ，

故 $\tan x \geq 2a$ 可化为 $\tan x \geq 1$ ，

所以解得 $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

所以不等式 $\tan x \geq 2a$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ，

故选：B.

26. (2024·高一·上海·课后作业) 使得不等式 $-1 \leq \tan x < \sqrt{3}$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right)$
- C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$ D. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$

【答案】C

【解析】由不等式 $-1 \leq \tan x < \sqrt{3}$ ，

根据正切函数的图象与性质，可得 $k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ，

即实数 x 的取值范围是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$.

故选: C.

题型九: 比较大小问题

27. (2024·高一·北京延庆·期中) 设 $a = \sin 1$, $b = \cos 1$, $c = \tan 1$, 则

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $a < c < b$

【答案】C

【解析】因为 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan 1 > 1 > \sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1$, 即 $b < a < c$.

故选: C.

28. (2024·高一·江西九江·阶段练习) 已知 $a = \sin 2$, $b = \cos 2$, $c = \tan 2$, $d = 1$, 则 ()

- A. $a < b < c < d$ B. $a < b < d < c$
C. $c < b < a < d$ D. $b < a < d < c$

【答案】C

【解析】因为 2 是第二象限角, 所以 $0 < \sin 2 < 1$, $-1 < \cos 2 < 0$,

$\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\tan 2 < \tan \frac{3\pi}{4} = -1$,

综上所述, $a \in (0, 1)$, $b \in (-1, 0)$, $c < -1$, $d = 1$,

所以 $c < b < a < d$.

故选: C

29. (2024·高一·河南南阳·阶段练习) 若 $a = \sin 1.5$, $b = \cos 1.5$, $c = \tan 1.5$. 则 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

【答案】A

【解析】 $1.5 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \tan x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

$\therefore c = \tan 1.5 > \tan \frac{\pi}{4} = 1$,

又 $y = \sin x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 $a = \sin 1.5 > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $a \leq 1$, 故 $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$,

又 $y = \cos x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

故 $b = \cos 1.5 < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $b < a < c$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/346031004220011034>