第二十一章 一元二次方程（知识归纳+题型突破）

课标要求

1、理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程．

2、会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根及两个实根是否相等．

3、了解- -元二次方程的根与系数的关系．

4、能根据具体问题的实际意义，检验方程解的合理性．

基础知识归纳

1. 一元二次方程的相关概念

(1)定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程．

(2)一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其中 ax^2、bx、c 分别叫做二次项、一次项、常数项，a、b、c 分别称为二次项系数、一次项系数、常数项．

2.一元二次方程的解法

（1）直接开平方法：形如 $(x+m)^2=n(n\geq0)$的方程，可直接开平方求解.

(2)因式分解法：可化为 $(ax+m)(bx+n)=0$ 的方程，用因式分解法求解.

(3)公式法:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （$b^2-4ac\geq0$）．

(4) 配方法：当一元二次方程的二次项系数为 1，一次项系数为偶数时，也可以考虑用配方法．

3.根的判别式

(1)当 $\Delta=b^2-4ac\geq0$ 时，原方程有两个不相等的实数根．

(2)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，原方程有两个相等的实数根．

(3)当 $\Delta=b^2-4ac\leq0$ 时，原方程没有实数根．

4.列一元二次方程解应用题

（1）解题步骤：①审题；② 设未知数；③ 列一元二次方程；④解一元二次方程；⑤检验根是否有意义；⑥作答．

（2）应用模型：一元二次方程经常在增长率问题、面积问题等方面应用.

①平均增长率（降低率）问题：公式：$b=a(1\pm x)^n$，a 表示基数，x 表示平均增长率（降低率），n 表示变化的次数，b 表示变化 n 次后的量；

②利润问题：利润=售价-成本；利润率=利润/成本×100%；

③传播、比赛问题：

④面积问题：a.直接利用相应图形的面积公式列方程；b.将不规则图形通过割补或平移形成规则图形，运用面积之间的关系列方程.

注意：运用一元二次方程解决实际问题时，方程一般有两个实数根，则必须要根据题意检验根是否有意义.

重要题型

题型一一元二次方程的解

【例 1】

（2023 春·浙江温州·八年级校考期中）已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 有一个根是 $x=m$，则方程 $x^2+bx+a=0$ 有一个根是（　　）

A．$x=m$　　B．$x=-m$　　C．$x=\dfrac{1}{m}$　　D．$x=1-m$

【答案】C

【分析】利用一元二次方程的解，可得出 $am^2+bm+1=0$，在等式的两边同时除以 m^2，可得出 $a+b\cdot\dfrac{1}{m}+(\dfrac{1}{m})^2=0$，进而可得出方程 $x^2+bx+a=0$ 有一个根是 $x=\dfrac{1}{m}$．

【详解】∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 有一个根是 $x=m$，

$\therefore am^2+bm+1=0$，

在等式的两边同时除以 m^2 得：$a+b\cdot\dfrac{1}{m}+(\dfrac{1}{m})^2=0$，

∴方程 $x^2+bx+a=0$ 有一个根是 $x=\dfrac{1}{m}$．

故选：C．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解，牢记“能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解”是解题的关键．

巩固训练：

1．（2023·全国·九年级专题练习）若关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2+7x+m^2-9=0$ 的一个根为 0，则 m 的值为（　　）

A．3　　B．0　　C．−3　　D．−3 或 3

【答案】C

【分析】将 $x=0$ 代入方程，得到 $m^2-9=0$，再利用一元二次方程根的定义得到 $m\neq3$，确定出 m 的值即可．

【详解】解：将$x=0$代入$(m-3)x^2+7x+m^2-9=0$，

得：$m^2-9=0$，

解得：$m=\pm3$，

∵$m-3\neq0$，

∴$m\neq3$，

∴$m=-3$

故选C．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．也考查了一元二次方程的定义．

2．（2023春·山东东营·八年级东营市实验中学校考期中）若m是一元二次方程$x^2-x-2=0$的一个根，则代数式$2m^2-2m$的值为（　）

A．0　　B．2　　C．−2　　D．4

【答案】D

【分析】根据一元二次方程的解的定义得出$m^2-m-2=0$，即得出$m^2-m=2$．再将代数式$2m^2-2m$变为$2(m^2-m)$，最后整体代入求值即可．

【详解】解：∵m是一元二次方程$x^2-x-2=0$的一个根，

∴$m^2-m-2=0$，

∴$m^2-m=2$，

∴$2m^2-2m=2(m^2-m)=2\times2=4$．

故选：D．

【点睛】本题考查一元二次方程的解的定义，代数式求值．掌握一元二次方程的解就是使方程成立的未知数的值是解题关键．

3．（2023春·山东济宁·八年级济宁学院附属中学校考期中）已知m是一元二次方程$x^2-5x-2=0$的一个根，则代数式$2023-m^2+5m$的值是（　）

A．2020　B．2021　C．2022　D．2023

【答案】B

【分析】先利用一元二次方程根的定义得到$m^2-5m=2$，再把$2023-m^2+5m$变形为$2023-(m^2-5m)$，然后利用整体代入的方法计算．

【详解】解：∵m是一元二次方程$x^2-5x-2=0$0的一个根，

∴$m^2-5m-2=0$，

∴$m^2-5m=2$，

∴$2023-m^2+5m=2023-\left(m^2-5m\right)=2023-2=2021$．

故选：B．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解、代数式求值，解题的关键是掌握能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．

4．（2023·全国·九年级专题练习）已知关于 x 的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，若$a+b+c=0$，则此方程必有一个根为（　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．±1

【答案】B

【分析】将$x=1$代入方程$ax^2+bx+c=0$中的左边，得到$a+b+c$，由$a+b+c=0$得到方程左右两边相等，即$x=1$是方程的解．

【详解】将$x=1$代入方程$ax^2+bx+c=0$中的左边得：$a\times1^2+b\times1+c=a+b+c$，

∵$a+b+c=0$，

∴$x=1$是方程$ax^2+bx+c=0$的根．

即方程的一个根为$x=1$．

故选：B

【点睛】题考查了一元二次方程的解的意义：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．掌握方程的解的定义是解题的关键．

5．（2023 春·浙江宁波·八年级校考阶段练习）若关于x的一元二次方程$ax^2+bx+2=0\left(a\neq0\right)$有一根为$x=2023$，则一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+bx-b=-2$必有一根为（　）

A．2021　B．2022　　C．2023　D．2024

【答案】D

【分析】根据一元二次方程根的定义可得元二次方程$a\left(x-1\right)^2+bx-b=-2$中，$x-1=2023$，进而即可求解．

【详解】解：∵关于x的一元二次方程$ax^2+bx+2=0$（$a\neq0$）有一根为$x=2023$，

∴一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+bx-b=-2$，

即 $a(x-1)^2+b(x-1)+2=0$ 中，$x-1=2023$，

即 $x=2024$，

故选 D

【点睛】本题考查了一元二次方程根的定义，理解一元二次方程根的定义是解题的关键．

6．（2023 春·山东泰安·八年级统考期中）若 $x^2-2x-5=0$ 的一个解为 a，则 $a(2a-3)+a(1-a)$ 的值为（　　）

A．5　　B．$2\sqrt{6}+4$　　C．$\sqrt{6}$　　D．-5

【答案】A

【分析】把 a 代入 $x^2-2x-5=0$，得 $a^2-2a=5$，对 $a(2a-3)+a(1-a)$ 进行化简，即可．

【详解】∵ a 是 $x^2-2x-5=0$ 的一个解，

∴ $a^2-2a=5$，

∵ $a(2a-3)+a(1-a)=a^2-2a$，

∴ $a(2a-3)+a(1-a)=5$，

故选：A．

【点睛】本题考查一元二次方程的知识，解题的关键是掌握一元二次方程的解．

7．（2022 秋·上海静安·八年级上海市民办扬波中学校考期中）若 $x=-1$ 是方程 $x^2-mx-3=0$ 的一个根，则 m 的值为　　．

【答案】2

【分析】根据一元二次方程的解的定义将 $x=-1$ 代入方程 $x^2-mx-3=0$，列出关于 m 的方程，通过解方程求得 m 的值即可．

【详解】解：∵ $x=-1$ 是方程 $x^2-mx-3=0$ 的一个根，

∴ $1+m-3=0$，

解得：$m=2$，

故答案为：2．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解，解题的关键是根据题意得出 $1+m-3=0$．

8．（2023·全国·九年级专题练习）（2023·山东枣庄·统考中考真题）若 $x=3$ 是关于 x 的方程 $ax^2-bx=6$ 的解，则 $2023-6a+2b$ 的值为　　．

【答案】2017

【分析】把$x=3$代入$ax^2-bx=6$得$3a-b=3$，则$6a-2b=6$，将$2023-6a+2b$整理为$2023-(6a-2b)$即可求解．

【详解】解：把$x=3$代入$ax^2-bx=6$得：$9a-3b=3(3a-b)=6$，

∴$3a-b=3$，

∴$2(3a-b)=6a-2b=6$，

∴$2023-6a+2b=2023-(6a-2b)=2023-6=2017$．

故答案为：2017．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解，整体代入求代数式的值，解题的关键是掌握使方程等号两边相等的未知数的值是方程的解．

9．（2023春·江苏南通·八年级南通田家炳中学校考阶段练习）关于x的一元二次方程$(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$的一个根为0，则$k=$_____．

【答案】-3

【分析】将$x=0$代入一元二次方程$(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$，转化为关于k的方程，要注意，$k\neq1$．

【详解】解：将$x=0$代入一元二次方程$(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$得，

$-k^2-2k+3=0$，

整理得，$k^2+2k-3=0$，

解得$k_1=1$，$k_2=-3$．

∵$(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$是一元二次方程，

∴$k\neq1$，

∴$k=-3$．

故答案为：-3．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解和一元二次方程的定义，要熟悉一元二次方程的解法和二次项系数的取值范围．

10．（2023·四川·九年级专题练习）先化简，再求值$\left(\dfrac{1}{x+1}+x-1\right)\div\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，其中x的值是方程$x^2-2x-3=0$的根．

【答案】$x+1$，4

【分析】根据整式的混合运算化简后代入x的值计算即可．

【详解】解：原式$=\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{(x+1)^2}{x^2}$

$=\dfrac{x^2}{x+1}\cdot\dfrac{(x+1)^2}{x^2}$

$=x+1$；

∵x的值是方程$x^2-2x-3=0$的根，

解得$x_1=3$，$x_2=-1$，

又∵$x^2(x+1)^2\neq 0$，

∴$x\neq 0$，$x\neq -1$，

∴$x=3$，

∴原式$=3+1=4$．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解，实数的运算，分式的化简和求值，解一元一次不等式，正确地进行运算是解题的关键.

题型二　一元二次方程的解法

【例2】（2023秋·河南许昌·九年级许昌市第一中学校联考期末）下面是小明同学解一元二次方程$2x^2-2=3x$的过程，请认真阅读并完成相应的任务．

$2x^2-2=3x$．

解：二次项系数化为1，得$x^2-1=\dfrac{3}{2}x$，第一步

移项，得$x^2-\dfrac{3}{2}x=1$，第二步

配方，得$x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}=1$，第三步

变形，得$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=1$，第四步

开方，得$x-\dfrac{3}{2}=\pm 1$，第五步

解得$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{5}{2}$，第六步

(1)上面小明同学的解法中运用“配方法”将一元二次方程“降次”为两个一元一次方程，体现的数学思想是_____，其中“配方法”依据的一个数学公式是_____；

(2)上述解题过程，从第_____步开始出现错误，请写出正确的解答过程．

【答案】(1)转化思想，完全平方公式

(2)三，解答过程见详解

【分析】（1）根据解答过程判断依据即可；

（2）根据配方法判断即可．

【详解】（1）解法中运用“配方法”将一元二次方程“降次”为两个一元一次方程，体现的数学思想是转化思想，其中“配方法”依据的一个数学公式是完全平方公式；

（2）解题过程，从第三步开始出现错误，正确的解答过程如下：

解：$2x^2-2=3x$

$x^2-1=\frac{3}{2}x$，

$x^2-\frac{3}{2}x=1$，

$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}=1+\frac{9}{4}$，

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$，

$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$，

解得$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$．

【点睛】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的几种常见解法：直接开平方法、配方法、因式分解法、公式法，结合方程的特点选择合适的解法是解题的关键．

【例3】（2023春·北京门头沟·八年级统考期末）阅读材料，并回答问题：

小明在学习一元二次方程时，解方程$2x^2-x-3=0$的过程如下：

解：∵$a=2$，$b=-1$，$c=-3$ ①

∴$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-3)$ ②

$=1-24=-23<0$ ③

∴此方程无解

问题：

(1)上述过程中，从 步开始出现了错误（填序号）；

(2)发生错误的原因是： ；

(3)在下面的空白处，写出正确的解答过程．

【答案】(1)③

(2)计算错误

(3)见解析

【分析】根据公式法的步骤判断和求解即可．

【详解】（1）解：由题意可得：从③步开始出现了错误

故答案为：③；

（2）计算错误（负数乘以负数得负数）；

（3）∵ $a=2$，$b=-1$，$c=-3$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25$，

∴ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{1\pm5}{4}$，

解得：$x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-1$．

【点睛】本题考查了用公式法解一元二次方程，解题的关键是掌握公式法的计算步骤．

【例 4】（2023·全国·九年级专题练习）按要求解方程

(1) $\dfrac{1}{3}(2y+\sqrt{2})^2-6=0$（直接开平方法）；

(2) $3x^2-12x-2=0$（配方法）；

(3) $\sqrt{2}x^2-6x-3\sqrt{2}=0$（公式法）

(4) $(x-2)^2=\dfrac{1}{2}x-1$（因式分解法）

(5) $(3x-5)^2-5(3x-5)+6=0$（换元法）

【答案】(1) $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-2\sqrt{2}$

(2) $x_1=\dfrac{\sqrt{42}}{3}+2$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{42}}{3}+2$

(3) $x_1=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{2}$，$x_2=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}$

(4) $x_1=\dfrac{5}{2}$ 或 $x_2=2$

(5) $x_1=\dfrac{7}{3}$，$x_2=\dfrac{8}{3}$

【分析】（1）先移项，变成 $(2y+\sqrt{2})^2=18$，然后直接开平方；

（2）把方程的二次项系数化为 1，移项，然后在方程的左右两边同时加上一次项系数一半的平方，左边就是完全平方式，右边就是常数，然后利用平方根的定义即可求解；

（3）找出方程中二次项系数 a，一次项系数 b 及常数项 c，计算出根的判别式，由根的判别式大于 0，得到方程有解，将 a，b 及 c 的值代入求根公式即可求出原方程的解；

（4）将方程整理为$2(x-2)^2-(x-2)=0$，然后通过提取公因式$(x-2)$进行因式分解，再求解即可；

（5）先令$3x-5=y$，则原方程变形为$y^2-5y+6=0$，运用因式分解法解得$y_1=2$，$y_2=3$，再把$y=2$和3分别代入$3x-5=y$得到关于x的一元二次方程，然后解两个一元二次方程，最后确定原方程的解．

【详解】（1）解：$\frac{1}{3}(2y+\sqrt{2})^2-6=0$，

$(2y+\sqrt{2})^2=18$，

$2y+\sqrt{2}=\pm3\sqrt{2}$，

$y=\frac{\pm3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-2\sqrt{2}$；

（2）$3x^2-12x-2=0$，

$x^2-4x=\frac{2}{3}$，

$x^2-4x+4=\frac{2}{3}+4$，

$(x-2)^2=\frac{14}{3}$，

$x-2=\pm\frac{\sqrt{42}}{3}$，

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{42}}{3}+2$，$x_2=-\frac{\sqrt{42}}{3}+2$；

（3）$\sqrt{2}x^2-6x-3\sqrt{2}=0$，

$a=\sqrt{2}$，$b=-6$，$c=3\sqrt{2}$，

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times\sqrt{2}\times(-3\sqrt{2})=60>0$，

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{60}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{30}}{2}$，

$\therefore x_1=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{2}$，$x_2=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}$；

（4）$(x-2)^2=\frac{1}{2}x-1$，

$2(x-2)^2=x-2$，

$2(x-2)^2-(x-2)=0$，

$[2(x-2)-1](x-2)=0$，

$(2x-5)(x-2)=0$，

$\therefore 2x-5=0$ 或 $x-2=0$，

$\therefore x_1=\frac{5}{2}$ 或 $x_2=2$；

（5）$(3x-5)^2-5(3x-5)+6=0$，

令 $3x-5=y$，则原方程变形为 $y^2-5y+6=0$，

即：$(y-2)(y-3)=0$，

解得：$y_1=2$，$y_2=3$，

当 $y=2$ 时，$3x-5=2$，解得：$x=\frac{7}{3}$，

当 $y=3$ 时，$3x-5=3$，解得：$x=\frac{8}{3}$，

∴原方程的解为：$x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=\frac{8}{3}$．

【点睛】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握直接开平方法、公式法、因式分解法、配方法、换元法是解题的关键．

【例 5】（2023 春·陕西咸阳·八年级统考期末）先阅读下面的内容，再解答问题．

【阅读】例题：求多项式 $m^2+2mn+n^2+4$ 的最小值．

解：$m^2+2mn+n^2+4=(m^2+2mn+n^2)+4=(m+n)^2+4$，

$\because (m+n)^2\geq 0$，$\therefore (m+n)^2+4\geq 4$

∴多项式 $m^2+2mn+n^2+4$ 的最小值是 4

(1)请写出例题解答过程中把一个三项二次式转化为一个二项式的平方运用的公式是_____；

(2)求多项式 $-2x^2+4xy-2y^2+30$ 的最大值．

【答案】(1)完全平方公式(2)30

【分析】（1）根据完全平方公式的含义可得答案；

（2）把原式化为 $-2(x-y)^2+30$，再利用非负数的性质可得答案．

【详解】（1）解：公式为：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，即：完全平方公式，

故答案为：完全平方公式；

（2）$-2x^2+4xy-2y^2+30$

$=-2\left(x^2-2xy+y^2\right)+30$

$=-2(x-y)^2+30$；

$\because -2(x-y)^2\le 0$，

$\therefore -2(x-y)^2+30\le 30$，

$\therefore -2x^2+4xy-2y^2+30$的最大值是$30$．

【点睛】本题考查的是利用完全平方公式分解因式，非负数的性质，掌握利用完全平方公式求解代数式的最值是解本题的关键．

巩固训练

1．（北京市石景山区2022-2023学年八年级下学期期末数学试题）解方程$x^2-4x=3$，下列用配方法进行变形正确的是（　）

A．$(x-2)^2=19$　B．$(x-4)^2=7$　C．$(x-2)^2=4$　D．$(x-2)^2=7$

【答案】D

【分析】利用完全平方公式进行配方即可．

【详解】解：$\because x^2-4x=3$，

$\therefore x^2-4x+4=7$，即$(x-2)^2=7$，

故选：D．

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程．解题的关键在于对知识的熟练掌握．

2．（2022秋·上海奉贤·八年级校考期中）用配方法解一元二次方程$x^2-8x=-2$时，在方程两边应同时加上（　　）

A．4　B．8　C．16　D．64

【答案】C

【分析】根据配方法的步骤，利用完全平方公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a+b)^2$进行求解即可．

【详解】解：$x^2-8x=-2$进行配方，方程两边应同时加上一次项系数的一半的平方，

即$x^2-8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{8}{2}\right)^2$

$\therefore x^2-8x+16=-2+16$，

$\therefore$在方程两边应同时加上16．

故选：C．

【点睛】本题考查配方法，用配方法解一元二次方程得一般步骤：（1）化二次项系数为1，当二次项系数不是1时，方程两边同时除以二次项系数；（2）加上一次项系数一半的平方，使其中的三项成为完全平方式，但又要使此方程的等式关系不变，故在右侧同时加上一次项系数一半的平方；（3）配方后将原方程化为$a(x+m)^2=n(a\neq 0)$的形式，再用直接开平方的方法解方程．熟知配方法的步骤是解题的关键．

3．（2023·全国·九年级专题练习）用配方法解方程$x^2+4x-1=0$，配方后得到的方程（　）

A．$(x+2)^2=5$　　B．$(x-2)^2=5$

C．$(x+4)^2=3$　D．$(x-4)^2=3$

【答案】A

【分析】先移项，再配方，即可得出选项；

【详解】解：$x^2+4x-1=0$，$x^2+4x=1$，

配方得：$x^2+4x+4=1+4$，

$(x+2)^2=5$，

故选A．

【点睛】本题考查了解一元二次方程，能正确的配方是解答该题的关键．

4．（2023春·浙江杭州·八年级统考期末）用配方法解一元二次方程$x^2-2x-9=0$配方后可变形为（　）

A．$(x-1)^2=10$　　B．$(x+1)^2=10$　　C．$(x-1)^2=-8$　　D．$(x+1)^2=-8$

【答案】A

【分析】根据配方法的步骤进行求解即可．

【详解】解：$x^2-2x-9=0$，

∴$x^2-2x=9$，

∴$x^2-2x+1=9+1$，

∴$(x-1)^2=10$；

故选A．

【点睛】本题考查配方法．熟练掌握配方法的步骤，是解题的关键．

5．（2023春·山东威海·八年级统考期末）用配方法解方程$x^2-6x-1=0$，若配方后结果为$(x-m)^2=n$，则n的值为（　）

A．-10 B．10　C．-3　D．9

【答案】B

【分析】利用配方法将方程$x^2-6x-1=0$配成$(x-m)^2=n$，然后求出n的值即可．

【详解】∵$x^2-6x-1=0$，

∴$x^2-6x=1$，

∴$x^2-6x+9=1+9$，

即$(x-3)^2=10$，

∴$n=10$．

故选：B．

【点睛】本题主要考查了利用配方法解一元二次方程，熟练掌握配方法的步骤是解题的关键．

6．（2022秋·山西太原·九年级校考阶段练习）在解方程$2x^2+4x+1=0$时，对方程进行配方，图1是小思做的，图2是小博做的，对于两人的做法，说法正确的是（　）

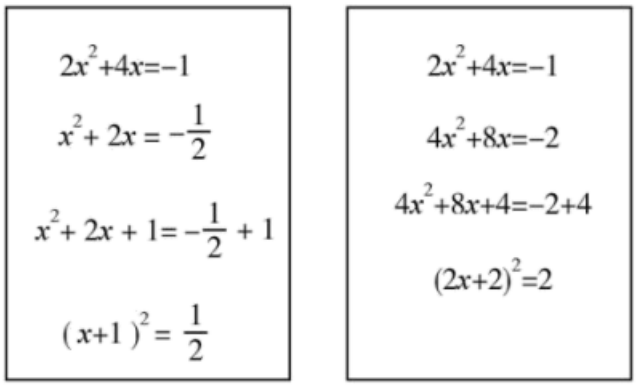


图1　　图2

A．两人都正确　B．小思正确，小博不正确

C．小思不正确，小博正确 D．两人都不正确

【答案】A

【分析】根据配方法把含未知数的项写成完全平方式，形如$(x+m)^2=n$的形式即可．

【详解】解：根据配方法可知两人的做法都正确，

故选：A．

【点睛】本题考查解一元二次方程—配方法，掌握配方法的步骤，能正确的将一元二次方程配成$(x+m)^2=n$的形式是解答的关键．

7．（2023秋·山西长治·九年级统考期末）用配方法解一元二次方程$x^2-8x=9$时，变形正确的是（　）

A．$(x-4)^2=9$　　B．$(x+4)^2=9$　　C．$(x-4)^2=25$　　D．$(x+4)^2=25$

【答案】C

【分析】在方程两边加上16，然后把方程左边配成完全平方形式即可．

【详解】解：$x^2-8x=9$，

配方得$x^2-8x+16=9+16$，即$(x-4)^2=25$．

故选：C．

【点睛】本题考查了解一元二次方程－配方法，关键是掌握配方的方法：当二次项系数为1时，两边加上一次项系数一半的平方．

8．（2022秋·天津滨海新·九年级校考期中）若$(x+y)(x+y-1)-6=0$，则$x+y$的值是（　）

A．2　　B．3　　C．-2或3　　D．2或-3

【答案】C

【分析】先设$t=x+y$，则方程即可变形为$t^2-t-6=0$，解方程即可求得t即$x+y$的值．

【详解】解：设$t=x+y$，则原方程可化为：$t(t-1)-6=0$，

即$t^2-t-6=0$，

解得：$t=-2$或$t=3$，

∴$x+y=-2$或$x+y=3$，

故选：C．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法．解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的特点灵活选用合适的方法．

9．（2023秋·湖南湘西·九年级统考期末）一元二次方程$x^2+8x-3=0$配方后可化为　　．

【答案】$(x+4)^2=19$

【分析】先把常数项移到方程右侧，再把方程两边加上16，然后把方程左边写成完全平方形式即可．

【详解】解：$x^2+8x-3=0$

移项得：$x^2+8x=3$，

配方得：$x^2+8x+16=3+16$，即$(x+4)^2=19$，

故答案为：$(x+4)^2=19$．

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，配方法的一般步骤：（1）把常数项移到等号的右边；（2）把

二次项的系数化为 1；（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方．

10．（2022 秋·甘肃平凉·九年级校考阶段练习）已知实数 x 满足 $(x^2-x)^2-2(x^2-x)-3=0$，则代数式 $x^2-x+2020$ 的值为　　．

【答案】2023

【分析】设 $t=x^2-x$，则原方程转化为关于 t 的一元二次方程 $t^2-2t-3=0$，利用因式分解法解该方程即可求得 t 的值；然后整体代入所求的代数式进行解答，注意判断方程的根的判别式 ≥ 0，方程有解．

【详解】解：设 $t=x^2-x$，

由原方程，得 $t^2-2t-3=0$，

整理，得 $(t-3)(t+1)=0$，

所以 $t=3$ 或 $t=-1$．

当 $t=3$ 时，$x^2-x=3$，则 $x^2-x+2020=2023$；

当 $t=-1$ 时，$x^2-x=-1$ 即 $x^2-x+1=0$ 时，$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1<0$，方程无解，此种情形不存在．

故答案是：2023．

【点睛】本题考查了换元法解一元二次方程．换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换．

11．（2022 秋·上海青浦·八年级校考期中）用配方法解一元二次方程：$2x^2+5x-1=0$

【答案】$x_1=-\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$，$x=-\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}$

【分析】先把二次项系数化 1，把常数项移到等是右边，加上一次项系数一半的平方，然后直接开平方即可．

【详解】解：二次项系数化为 1，得 $x^2+\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}=0$，

移项，得 $x^2+\dfrac{5}{2}x=\dfrac{1}{2}$，

配方，得 $x^2+\dfrac{5}{2}x+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$，

即 $\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{33}{16}$，

直接开平方，得 $x+\dfrac{5}{4}=\pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}$，

即 $x=-\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}$，

$x_1=-\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$，$x=-\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}$．

【点睛】本题考查利用配方法解一元二次方程，掌握配方法解一元二次方程的方法，会用配方法解方程是关键．

12．（2023 春·安徽合肥·八年级统考期末）用配方法解方程：$(x-3)(x+1)=1$．

【答案】$x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$

【分析】将一元二次方程整理成一般形式，再将常数项移到一元二次方程的右边，然后两边加上一次项系数一半的平方，最后按直接开平方法即可求解．

【详解】解：整理，得$x^2-2x-4=0$

移项，得$x^2-2x=4$

配方，得$(x-1)^2=5$

开平方，得$x-1=\pm\sqrt{5}$

∴$x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了用配方法解一元二次方程，解题的关键是把方程左边转化为完全平方式，右边变为常数项．

13．（2022 秋·上海徐汇·八年级上海市徐汇中学校考期中）解方程：$3x^2-2x-7=0$

【答案】$x_1=\dfrac{1+\sqrt{22}}{3}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{22}}{3}$

【分析】明确方程中未知数的二次项、一次项系数及常数项，运用求根公式求解．

【详解】解：$\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-7)=88$，

∴$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{88}}{2\times3}=\dfrac{1\pm\sqrt{22}}{3}$，

∴方程的解为$x_1=\dfrac{1+\sqrt{22}}{3}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{22}}{3}$．

【点睛】本题考查一元二次方程的求解，注意根据方程具体情况选用适当的方法求解是解题的关键．

14．（2022 秋·天津津南·九年级校考期中）选取最恰当的方法解方程：

(1)$(2x+1)^2=4$

(2)$3x^2-6x=48$

【答案】(1)$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{3}{2}$；

(2) $x_1=1+\sqrt{17}$，$x_2=1-\sqrt{17}$

【分析】（1）直接开平方把原方程化为两个一元一次方程，解一元一次方程即可得解；

（2）原方程先配方然后再开平方，最后化为一元一次方程求解即可．

【详解】（1）解：开方得：$2x+1=2$ 或 $2x+1=-2$，

解得：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{3}{2}$；

（2）解：原方程两边除以 3 得：

$x^2-2x=16$，

$\therefore x^2-2x+1=17$，即 $(x-1)^2=17$，

$\therefore x-1=\pm\sqrt{17}$，

$\therefore x_1=1+\sqrt{17}$，$x_2=1-\sqrt{17}$．

【点睛】本题考查解一元二次方程，熟练掌握配方法及直接开平方的解方程方法是解题关键．

15．（2023 春·黑龙江哈尔滨·八年级哈尔滨市萧红中学校考阶段练习）用指定的方法解下列方程

(1) $x^2+6x-16=0$（配方法）

(2) $x^2+10x+9=0$（公式法）

【答案】(1) $x_1=2$，$x_2=-8$；

(2) $x_1=-1$，$x_2=-9$．

【分析】（1）先配方，再两边都加上 25，再利用直接开平方法解方程即可；

（2）先计算 $\Delta=10^2-4\times1\times9=100-36=64$，再代入求根公式即可．

【详解】（1）解：$\because x^2+6x-16=0$，

配方得：$x^2+6x+9=25$，

$\therefore x+3=\pm5$，

解得：$x_1=2$，$x_2=-8$；

（2）$\because x^2+10x+9=0$，

$\therefore \Delta=10^2-4\times1\times9=100-36=64$，

$\therefore x=\frac{-10\pm8}{2}=-5\pm4$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=-9$．

【点睛】本题考查的是一元二次方程的解法，掌握配方法与公式法解一元二次方程是解本题的关键.

16．（2023 春·辽宁大连·八年级统考期末）解方程：

(1) $2x^2-3x+1=0$ （用公式法）

(2) $x^2-4x-7=0$ （用配方法）

【答案】(1) $x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{2}$

(2) $x_1=2+\sqrt{11}$，$x_2=2-\sqrt{11}$

【分析】（1）先利用根的判别式判定根的情况，然后再运用求根公式求解即可；

（2）先移项后配方，然后再利用直接开平方法求解即可．

【详解】（1）解：∵ $a=2$，$b=-3$，$c=1$

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=1>0$

∴ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{3\pm1}{2\times2}$

∴ $x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{2}$．

（2）解：$x^2-4x=7$．

$x^2-4x+4=7+4$．

$(x-2)^2=11$．

$x-2=\pm\sqrt{11}$

∴ $x_1=2+\sqrt{11}$，$x_2=2-\sqrt{11}$．

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程，灵活运用公式法和配方法解一元二次方程成为解答本题的关键．

17．（2022 秋·湖北荆州·九年级校考期中）请用指定方法解下列方程：

(1)公式法：$x^2+x-12=0$；

(2)因式分解法：$4x^2-144=0$．

【答案】(1) $x_1=3,x_2=-4$

(2) $x_1=6,x_2=-6$

【分析】（1）根据公式法求解即可；

（2）先提取公因式 4，再利用平方差公式求解．

【详解】（1）方程$x^2+x-12=0$中，$a=1,b=1,c=-12,\Delta=1^2-4\times1\times(-12)=49$，

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{-1\pm7}{2}$，

$\therefore x_1=3,x_2=-4$；

（2）方程$4x^2-144=0$可变形为：$4(x^2-36)=0$，

即$4(x-6)(x+6)=0$，

$\therefore x-6=0$或$x+6=0$，

$\therefore x_1=6,x_2=-6$．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法，属于基础题目，熟练掌握公式法和因式分解法解方程的方法是解题的关键．

18．（2023春·山东威海·八年级统考期末）按指定方法解方程：

$(1)(3x-1)^2=4(x+3)^2$；（因式分解法）

$(2)2x^2-3x-3=0$．（配方法）

【答案】$(1)x_1=-1,\ x_2=7$

$(2)x_1=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4},\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$

【分析】（1）利用因式分解法求解即可；

（2）利用配方法求解即可．

【详解】（1）解：$\because(3x-1)^2=4(x+3)^2$，

$\therefore(3x-1)^2-4(x+3)^2=0$，

$\therefore(3x-1)^2-[2(x+3)]^2=0$，

$\therefore[3x-1+2(x+3)][3x-1-2(x+3)]=0$，

整理得：$(5x+5)(x-7)=0$，

$\therefore x_1=-1,\ x_2=7$；

（2）解：$\because 2x^2-3x-3=0$，

$\therefore 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-3=0$，

$\therefore 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}-3=0$，

$\therefore 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{8}$，

$\therefore \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$，

$\therefore x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{33}}{4}$ 或 $x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{33}}{4}$，

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{33}}{4}$．

【点睛】本题考查了解一元二次方程，解一元二次方程常用的方法有：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法，解题时要根据方程的特点灵活选用合适的方法．

题型三　一元二次方程根的判别式

【例 6】（2023 春·山东济宁·八年级济宁学院附属中学校考期中）已知关于 x 的方程

$mx^2-(2m+1)x+2=0(m\neq 0)$．

(1)求证：无论 m 取何值，这个方程总有实数根；

(2)若等腰 $\triangle ABC$ 的底边长 $a=1$，另两边 b、c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长．

【答案】(1)见解析(2)5

【分析】（1）根据方程的系数结合根的判别式，即可得出 $\Delta=(2m-1)^2\geq 0$，由此即可证出：无论 m 取何值，这个方程总有实数根；

（2）根据等腰三角形的性质可得 $b=c$，则该方程有两个相等实数根，求出 m 的值，再根据三角形的三边关系及三角形的周长公式即可求出 ΔABC 的周长．

【详解】（1）证明：$\because \Delta=[-(2m+1)]^2-4m\times 2=4m^2-4m+1=(2m-1)^2\geq 0$，

$\therefore$ 无论 m 取何值，这个方程总有实数根；

（2）解：$\because$ 等腰 $\triangle ABC$ 的底边长 $a=1$，

$\therefore b=c$，

$\because$ b、c 恰好是这个方程的两个根，

$\therefore$ 该方程的根有两个相等实数根，

$\therefore \Delta=(2m-1)^2=0$

解得：$m=\frac{1}{2}$，

$\therefore$原方程为$\frac{1}{2}x^2-2x+2=0$，

解得：$x_1=x_2=2$．

$\because 2$、2、1能组成三角形，

$\therefore$该三角形的周长为$2+2+1=5$．

【点睛】本题考查了根的判别式、三角形三边关系、等腰三角形的性质以及解一元二次方程，解题的关键是熟练掌握当$b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根；当$b^2-4ac<0$时，方程没有实数根．

巩固训练

1．（2023·吉林·统考中考真题）一元二次方程$x^2-5x+2=0$根的判别式的值是（　）

A．33　B．23　C．17　D．$\sqrt{17}$

【答案】C

【分析】直接利用一元二次方程根的判别式$\triangle=b^2-4ac$求出答案．

【详解】解：$\because a=1$，$b=-5$，$c=2$，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times2=17$．

故选：C．

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的根的判别式，正确记忆公式是解题关键．

2．（2023春·北京昌平·八年级统考期末）下列方程中有两个不相等的实数根的方程是（　）

A．$x^2-4x+4=0$　B．$x^2-5x-1=0$　C．$x^2-2x+3=0$　D．$2x^2-x+2=0$

【答案】B

【分析】分别求出每一个方程的判别式Δ的值，找出$\Delta>0$的方程即可．

【详解】解：A、$\because \Delta=16-16=0$，$\therefore$方程有两个相等的实数根，故本选项不符合题意；

B、$\because \Delta=25-4\times1\times(-1)=29>0$，$\therefore$方程有两个不相等的实数根，故本选项符合题意；

C、$\because \Delta=4-4\times1\times3=-8<0$，$\therefore$方程没有实数根，故本选项不符合题意；

D、$\because \Delta=1-4\times2\times2=-15<0$，$\therefore$方程没有实数根，故本选项不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查了根的判别式，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：①当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；②当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根；③当$\Delta<0$时，方程无实数根．

3．（2022秋·天津滨海新·九年级校考期中）关于x的方程$x^2+(m+2)x+m=0$的根的情况是（　）

A．有两个不相等的实数根 B．有两个相等的实数根　C．没有实数根　D．无法确定

【答案】A

【分析】表示出根的判别式，判断判别式的正负即可确定出方程根的情况．

【详解】解：$x^2+(m+2)x+m=0$，

$\Delta=(m+2)^2-4\times1\times m=m^2+4>0$，

∴方程有两个不相等的实数根，

故选：A．

【点睛】此题考查了根的判别式，弄清根的判别式与方程根的关系是解本题的关键．

4．（2022秋·上海徐汇·八年级上海市徐汇中学校考期中）下列二次三项式在实数范围内一定能因式分解的是（　）

A．x^2+2x+3　B．x^2-2x-m^2　C．x^2-2x-m　D．$3x^2-4xy+5y^2$

【答案】B

【分析】转化一元二次方程根的判别式计算判断即可．

【详解】A．∵$x^2+2x+3=0$中，$\Delta=2^2-4\times1\times3<0$，

∴$x^2+2x+3=0$无实数根，

故x^2+2x+3在实数范围内不能因式分解，不符合题意；

B．∵$x^2-2x-m^2=0$中，$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-m^2)=4+4m^2>0$，

∴$x^2-2x-m^2=0$有两个不相等的实数根，

故x^2-2x-m^2在实数范围内能因式分解，符合题意；

C．∵$x^2-2x-m=0$中，$\Delta=(-2)^2-4\times1\times m=4+4m$，无法确定属性，

∴$x^2-2x-m=0$不一定有实数根，

故x^2-2x-m在实数范围内不一定能因式分解，不符合题意；

D．∵$3x^2-4xy+5y^2=0$中，$\Delta=(-4y)^2-4\times3\times5y^2=-44y^2<0$，

∴ $3x^2-4xy+5y^2=0$ 无实数根，

故 $3x^2-4xy+5y^2$ 在实数范围内不能因式分解，不符合题意；

故选 B ．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握根的判别式是解题的关键．

5．（2022 秋·山西临汾·九年级统考期末）关于 x 的方程 $ax^2+3x-2=0$ 有实数根，则 a 的取值范围是（　）

A．$a\geq-\frac{9}{8}$　B．$a\geq-\frac{9}{8}$ 且 $a\neq0$　C．$a>-\frac{9}{8}$　D．$a>-\frac{9}{8}$ 且 $a\neq0$

【答案】A

【分析】讨论：当 $a=0$ 时，方程化为一元一次方程，有一个实数解；当 $a\neq0$ 时，根据判别式的意义得到 $\Delta=3^2-4a\times(-2)\geq0$，解得 $a\geq-\frac{9}{8}$ 且 $a\neq1$，然后综合两种情况得到 a 的取值范围．

【详解】解：当 $a=0$ 时，方程化为 $3x-2=0$，

解得 $x=\frac{2}{3}$，

当 $a\neq0$ 时，$\Delta=3^2-4a\times(-2)\geq0$，

解得 $a\geq-\frac{9}{8}$，

综上所述，a 的取值范围为 $a\geq-\frac{9}{8}$ ．

故选：A ．

【点睛】本题考查了根的判别式 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根．

6．（2022 秋·河南南阳·九年级南阳市第三中学校考阶段练习）方程 $(1-2m)x^2-2\sqrt{m+3}\cdot x-1=0$ 有两个实数根，则 m 的取值范围（　）

A．$-3\leq m\leq4$ 且 $m\neq\frac{1}{2}$　B．$m\leq4$ 且 $m\neq\frac{1}{2}$ C．$-3\leq m<4$　D．$-3\leq m<4$ 且 $m\neq\frac{1}{2}$

【答案】A

【分析】由方程 $(1-2m)x^2-2\sqrt{m+3}\cdot x-1=0$ 有两个实数根，可得 $\begin{cases}1-2m\neq0\\m+3\geq0\\\Delta=\left(-2\sqrt{m+3}\right)^2-4(1-2m)\times(-1)\geq0\end{cases}$，再解不等式组即可得到答案．

【详解】解：∵方程 $(1-2m)x^2-2\sqrt{m+3}\cdot x-1=0$ 有两个实数根，

$\therefore \begin{cases} 1-2m \neq 0 \\ m+3 \geq 0 \\ \Delta = \left(-2\sqrt{m+3}\right)^2 - 4(1-2m)\times(-1) \geq 0 \end{cases}$，

解得：$-3 \leq m \leq 4$ 且 $m \neq \frac{1}{2}$，

故选 A

【点睛】本题考查的是一元二次方程的含义，一元二次方程根的判别式的含义，二次根式有意义的条件，理解题意，建立不等式组是解本题的关键．

7．（2023 春·浙江绍兴·八年级统考期末）已知 $a(a>1)$ 是关于 x 的方程 $x^2-bx+b-a=0$ 的实数根．下列说法：①此方程有两个不相等的实数根；②当 $a=t+1$ 时，一定有 $b=t-1$；③b 是此方程的根；④此方程有两个相等的实数根．上述说法中，正确的有（　）

A．①② B．②③ C．①③ D．③④

【答案】C

【分析】根据一元二次方程根的定义求出 $b=a$，以及根的判别式判断根的情况，进一步可得结论．

【详解】解：∵ $a(a>1)$ 是关于 x 的方程 $x^2-bx+b-a=0$ 的实数根，

∴ $a^2-ab+b-a=0$，

整理得，$(a-1)(a-b)=0$

∵ $a>1$，

∴ $a-1>0$，

∴ $a-b=0$，即 $b=a$；

① $\Delta=b^2-4\times1\times(b-a)=a^2-4\times1\times(a-a)=a^2>1$，

∴此方程有两个不相等的实数根，故①说法正确；

②∵ $b=a$，

∴当 $a=t+1$ 时，一定有 $b=t+1$，故②说法错误；

③∵ $a(a>1)$ 是关于 x 的方程 $x^2-bx+b-a=0$ 的实数根．且 $b=a$，

∴ b 也是关于 x 的方程 $x^2-bx+b-a=0$ 的实数根．故③说法正确；

④此方程有两个不相等的实数根，故④说法错误；

所以，正确的结论是①③，

故选：C．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解的意义，一元二次方程根的判别式，熟练掌握运用根的判别式判断根的情况是解答本题的关键．

8．（2023 秋·河南许昌·九年级许昌市第一中学校联考期末）对于实数 a，b，定义新运算：$a※b=ab^2-b$，若关于 x 的方程$1※x=k$有两个相等的实数根，则 k 的值是（　）

A．4　　B．–4　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

【答案】D

【分析】根据新定义得到$x^2-x-k=0$，再把方程化为一般式，然后根据根的判别式的意义得到$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-k)=1+4k=0$，再解方程即可．

【详解】解：∵ $a※b=ab^2-b$，

∴ $1※x=x^2-x=k$，

整理得$x^2-x-k=0$，

而关于 x 的方程$1※x=k$有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-k)=1+4k=0$，

解得$k=-\frac{1}{4}$．

故选 D．

【点睛】本题考查了根的判别式：一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根；当$\Delta<0$时，方程无实数根．

9．（湖北省荆州市 2022-2023 学年九年级上学期期中数学试题）对于实数 u、v 定义一种运算“*”为：$u*v=uv+v$．若关于 x 的方程$x*(a*x)=-\frac{1}{4}$有两个相等的实数根，求满足条件的实数 a 的值为　　．

【答案】0

【分析】由于定义一种运算定“*”为：$u*v=uv+v$，所以关于 x 的方程$x*(a*x)=-\frac{1}{4}$变为$(a+1)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}=0$，而此方程有两个相等的实数根，所以根据判别式和一元二次方程的一般形式的定义可以得到关于 a 的不等式组，解不等式组即可解决问题．

【详解】解：由 $x*(a*x)=-\frac{1}{4}$，得 $x(ax+x)+ax+x=-\frac{1}{4}$，

即 $(a+1)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}=0$，

∵关于 x 的方程 $x*(a*x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \begin{cases}\Delta=(a+1)^2-4(a+1)\times\frac{1}{4}=0\\ a+1\neq 0\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}(a+1-1)(a+1)=0\\ a\neq -1\end{cases}$，

解得 $a=0$ ．

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的判别式，解题时首先正确理解定义的运算法则得到关于 x 的方程，然后根据判别式和一元二次方程的定义得到不等式组解决问题．

10．（2023·贵州·统考中考真题）若一元二次方程 $kx^2-3x+1=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是　　．

【答案】$\frac{9}{4}$

【分析】利用一元二次方程根的判别式求解即可．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $kx^2-3x+1=0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \begin{cases}\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4k=0\\ k\neq 0\end{cases}$，

∴ $k=\frac{9}{4}$，

故答案为：$\frac{9}{4}$ ．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta=b^2-4ac=0$，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta=b^2-4ac<0$，则方程没有实数根．

11．（北京市石景山区 2022-2023 学年八年级下学期期末数学试题）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2kx+2k-1=0$ ．

(1)请判断这个方程根的情况；

(2)若该方程有一个根小于 1，求 k 的取值范围．

【答案】(1)有两个实数根

(2)$k<1$

【分析】（1）根据根的判别式即可求出答案；

（2）求出方程的两根，根据该方程有一个根小于 1 列出不等式，解不等式即可得到答案．

【详解】（1）解：根据题意得：

$\triangle=b^2-4ac=(-2k)^2-4(2k-1)=4k^2-8k+4=4(k^2-2k+1)=4(k-1)^2$，

∵无论 k 取何值时，$\triangle=4(k-1)^2\geq 0$，

∴原方程有两个实数根；

（2）解：∵ $x=\dfrac{2k\pm\sqrt{4(k-1)^2}}{2}=\dfrac{2k\pm 2(k-1)}{2}$，

$x_1=\dfrac{2k+2(k-1)}{2}=2k-1$；　$x_2=\dfrac{2k-2(k-1)}{2}=1$，

∵该方程有一个根小于 1，

∴ $2k-1<1$，

∴ $k<1$ ．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的情况，公式法解一元二次方程，解题的关键是熟练运用根的判别式．

12．（2022 秋·上海奉贤·八年级校考期中）已知关于 x 的方程 $(k+1)x^2-2(k-1)x+k-1=0$

(1)当 k 取什么值时，方程只有一个根？

(2)若方程有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围．

【答案】(1)$k=-1$

(2)$k<1$ 且 $k\neq -1$

【分析】（1）先根据方程只有一个根可知此方程是一元一次方程，故可得出 k 的值；

（2）根据方程有两个相等的实数根可知 $\begin{cases}k+1\neq 0\\ [-2(k-1)]^2-4(k+1)(k-1)>0\end{cases}$，由此即可得出 k 的取值范围．

【详解】（1）解：当 $k+1=0$ 时，得：$k=-1$，

此时 $-2(k-1)=-2\times(-1-1)=4\neq 0$，

则方程 $4x-2=0$ 为一元一次方程，它的根是 $x=\dfrac{1}{2}$，此时方程只有一个根，

∴当 $k=-1$ 时，方程只有一个根；

（2）∵关于x的方程$(k+1)x^2-2(k-1)x+k-1=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore \begin{cases} k+1\neq 0 \\ [-2(k-1)]^2-4(k+1)(k-1)>0 \end{cases}$，

解得：$k<1$且$k\neq -1$，

∴k的取值范围是$k<1$且$k\neq -1$．

【点睛】本题考查一元一次方程，一元二次方程的定义及根的判别式．一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$根的情况与判别式$\Delta=b^2-4ac$的关系：$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根．掌握一元二次方程根的情况与根的判别式的关系是解题的关键．

题型四　一元二次方程的实际应用

【例7】（北京市石景山区2022-2023学年八年级下学期期末数学试题）某工厂由于采用新技术，生产量逐月增加，原来月产量为2000件，两个月后增至月产量为3000件．若设月平均增长率为x，则下列所列的方程正确的是（　）

A．$2000(1+x)=3000$　B．$2000(1+x)^2=3000$

C．$2000(1+x\%)^2=3000$　D．$2000+2000(1+x)=3000$

【答案】B

【分析】利用两个月后的月产量＝原来的月产量$\times(1+$月产量的平均增长率$)^2$，即可列出关于x的一元二次方程，此题得解

【详解】解：根据题意得：$2000(1+x)^2=3000$．

故选：B．

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

【例8】（2022秋·山西吕梁·九年级校考阶段练习）某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的枝干，每个枝干又长出同样数目的小分支．已知1个主干长出的枝干和小分支的总数是72，则这种植物每个枝干长出小分支的个数是（　）

A．9　B．8　C．7　D．6

【答案】B

【分析】设这种植物每个支干长出的小分支个数是x，根据支干和小分支的总数是72，即可得出关于x的一元二次方程，解方程即可求解．

【详解】解：设这种植物每个支干长出的小分支个数是x，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/346103133150010151