

典例分析

例 3 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 3, a_4 + a_5 + a_6 = 24,$

则 $a_7 + a_8 + a_9 = ?$

S_6

$S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$

成等比数列

解法 1:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 3$$

S_3

$$aq^3 + a_1q^4 + a_1q^5 = 24 \quad (2)$$

(2) 可得 $q^2 = 8, q = 2$

(1)

S_6 将 $q=2$ 代入 (1) 式可得 a_1

$= 7$

解法 2:

S_3

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = q^3(a_1 + a_2 + a_3) = 24 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{(3)}{(2)} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

两式相除: 实现整体消元的目的

$$a_7 + a_8 + a_9 = 192$$

典例分析

例 4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq -1$ ，前 n 项和为 S_n ，证明：
 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列，并求这个数列的公比

证明：当 $q=1$ 时，

$$S_n = na_1$$

$$S_{2n} - S_n = 2na_1 - na_1 = na_1,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = 3na_1 - 2na_1 = na_1,$$

$\therefore S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列，公比为 1

当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1q^n(1-q^n)}{1-q} = q^n S_n,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = \frac{a_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q} = q^n (S_{2n} - S_n),$$

$$\frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} = q^n$$

$\therefore q^n$ 为常数,

$\therefore S, S_{2n}-S, S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列, 公比为 q^n

S_2





4.3.2 等比数列的 前 n 项和公式应用

复习引入

1. 等比数列前n项和公式:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ a_1(1-q^n) = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$$

消元方法:

约分或两式相除

2. 等比数列求和要考虑公比是否为1.

3. 等比数列求和的常用方法: 错位相减法.

4. 等比数列的片段和性质:

若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq -1$, 前 n 项和为 S_n ,
则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \dots$ 成等比数列, 其中公比为 q^n .

探究新知

思考：你能发现等比数列前n项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ (q≠1)的函数特征吗

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \Rightarrow S_n = -\frac{a_1}{1-q}q^n + \frac{a_1}{1-q}$$

$A = -\frac{a_1}{1-q}$, 则 $S = Af - A$. 即是n的指数型函数。

结构特点： q 的系数与常数项互为相反数。

当q=1 时 , $S=na$, 即S, 是n的正比例函数。

?

典例分析

例1 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3^n-2$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并判断 $\{a_n\}$ 是否是等比数列.

解: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 2) - (3^{n-1} - 2) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3^1 - 2 = 1$, 不满足上式.

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2 \times 3^{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

由于 $a_1=1, a_2=6, a_3=18$,

所以 a_1, a_2, a_3 不是等比数列, 即 $\{a_n\}$ 不是等比数列

思考: 还有其它方法判断 $\{a_n\}$ 是否是等比数列吗?

探究新知

思考：若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列， $S_{偶}$ ， $S_{奇}$ 分别是数列的偶数项和与奇数项和，则 $S_{偶}$ ， $S_{奇}$ 之间有什么关系？

(1) 若等比数列 $\{a_n\}$ 的项数有 $2n$ 项，则

$$S_{偶} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$$

$$S_{奇} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}$$

$$\Rightarrow S_{偶} = S_{奇}$$

偶

奇

(2) 若等比数列 $\{a_n\}$ 的项数有 $2n+1$ 项，则

$$S_{偶} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$$

$$S_{奇} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n+1}$$

$$= a_1 + (a_3 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n+1})$$

$$= a_1 + q(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$$

$$= a_1 + qS_{偶}$$

奇

偶

$$S_{奇} - a_1 = qS_{偶}$$

典例分析

例2 已知等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n$ 项，其和为 -240 ，且 $(a_1 + a_3 + \dots +$

$a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = 80$ ，求公比 q 。

解：由题意知 $S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = -240$ ， $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = 80$

$$\therefore S_{\text{奇}} = -80, S_{\text{偶}} = -160,$$

$$\therefore q = \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = 2.$$

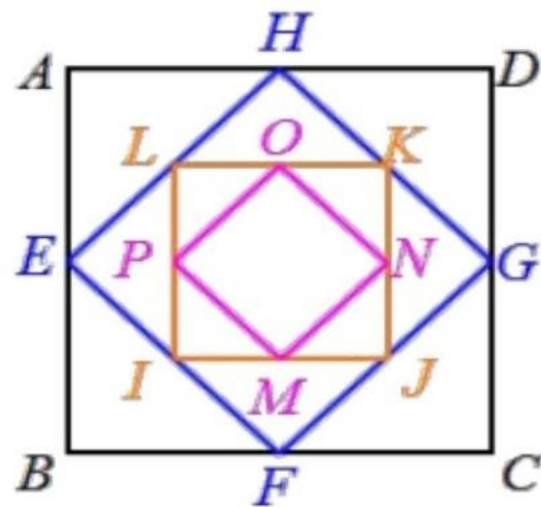
变式：若等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n$ 项，其公比为 2 ，其奇数项和比偶数

项和少 100 ，则数列 $\{a_n\}$ 的所有项之和为 300。

典例分析

例3 如图，正方形ABCD的边长为5cm，取正方形ABCD各边的中点E,F,G,H，作第2个正方形EFGH，然后再取正方形EFGH各边的中点I,J,K,L，作第3个正方形IJKL，依此方法一直继续下去。

- (1) 求从正方形ABCD开始，连续10个正方形的面积之和；
- (2) 如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于多少？



设 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n .

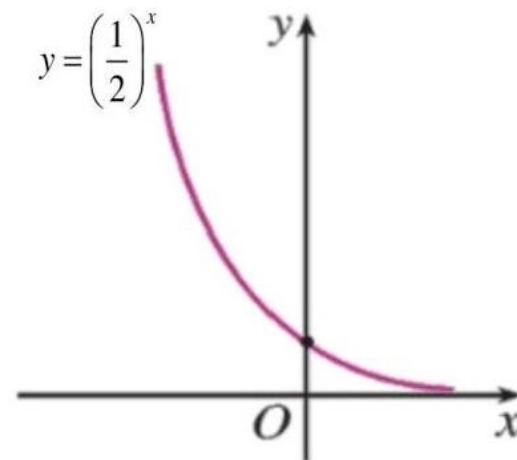
$$(1) S_{10} = \frac{25 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 50 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] = \frac{25575}{512}$$

所以, 前10个正方形的面积之和为 $\frac{25575}{512} \text{cm}^2$.

(2) 当 n 无限增大时, S_n 无限趋近于所有正方形的面积和 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

$$\text{而 } S_n = \frac{25 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 50 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

随着 n 的无限增大, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 将趋近于0, S_n 将趋近于50.
所以, 所有这些正方形的面积之和将趋近于50.



典例分析

例4 去年某地产生的生活垃圾为20万吨，其中14万吨垃圾以**填埋方式**处理，6万吨垃圾以**环保方式**处理. 预计**每年生活垃圾的总量递增5%**，同时，通过**环保方式**处理的垃圾量每年**增加1.5万吨**. 为了确定处理生活垃圾的预算，请你测算一下从今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量(精确到0.1万吨).

分析： 由题意可知，每年生活垃圾的总量构成等比数列，而每年以环保方式处理的垃圾量构成等差数列. 因此，可以利用等差数列、等比数列的知识进行计算.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/346113100223010141>