2024届高三新高考改革数学适应性练习（九省联考题型）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\in \mathrm{N} \mid y=\log_2(4-x)\}$, $B=\{y \mid y=|x-1|, x\in A\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$

C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2\}$

2．在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{5}=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{4}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}}{3}$，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$（　）

A．$9:7:8$　　B．$\sqrt{9}:\sqrt{7}:\sqrt{8}$　　C．$6:8:7$　　D．$\sqrt{6}:\sqrt{8}:\sqrt{7}$

3．过点 $M(0,5)$ 作圆 $C:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的两条切线 l_1,l_2 与圆 C 分别切于 A，B 两点，则直线 AB 的方程为（　）

A．$2x+3y-11=0$　　B．$2x-3y-11=0$　　C．$2x+3y-9=0$　　D．$2x-3y-9=0$

4．某公司安排6位员工在“元旦(1月1日至1月3日)”假期值班，每天安排2人，每人值班1天，则6位员工中甲不在1日值班的概率为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{5}{6}$

5．我国古代有一种容器叫“方斗”，“方斗”的形状是一种上大下小的正四棱台（两个底面都是正方形的四棱台），如果一个方斗的容积为28升（一升为一立方分米），上底边长为4分米，下底边长为2分米，则该方斗的外接球的表面积为（　）

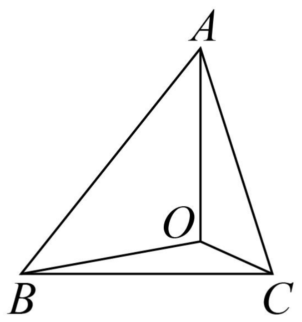
A．$32\pi\mathrm{dm}^2$　　B．$33\pi\mathrm{dm}^2$

C．$34\pi\mathrm{dm}^2$　　D．$35\pi\mathrm{dm}^2$

6．已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$，且 $a_1=2$.设 $b_n={a_n}^2-a_n$，且 S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 S_n 的整数部分为（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．奔驰定理：已知点 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点，若 $\triangle BOC,\triangle AOC,\triangle AOB$ 的面积分别记为 S_1,S_2,S_3，则 $S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$．“奔驰定理”是平面向量中一个非常优美的结论，因为这个定理对应的图形与“奔驰”轿车的logo很相似，故形象地称其为“奔驰定理”．如图，已知 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\cos C=$（　）



A．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

8．已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-2ax-ax\cos x$，$\forall x\geq 0$，$f\left(x\right)\leq 0$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　C．$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{3}\right]$

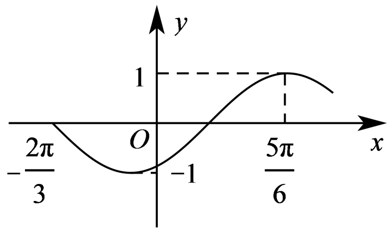
二、多选题

9．已知甲、乙两组数据分别为：20，21，22，23，24，25 和 a，23，24，25，26，27，若乙组数据的平均数比甲组数据的平均数大 3，则（　）

A．甲组数据的第 70 百分位数为 23　　B．甲、乙两组数据的极差相同

C．乙组数据的中位数为 24.5　　D．甲、乙两组数据的方差相同

10．函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的部分图像如图所示，下列说法正确的是（　）



A．$f(x)$ 图像的一条对称轴可能为直线 $x=\frac{4\pi}{3}$

B．函数 $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

C．$f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 对称

D．$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{17\pi}{6},\frac{23\pi}{6}\right]$ 上单调递增

11．已知定义在 $(0,+\infty)$ 的函数 $f\left(x\right)$ 满足：①对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒有 $xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=x$；②对任意的正数 m，n 恒有 $f\left(mn\right)=nf\left(m\right)+mf\left(n\right)+mn$．则下列结论中正确的有（　）

A．$f\left(1\right)=-1$

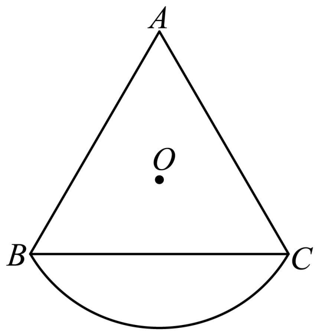
B．过点$\left(\mathrm{e}, f\left(\mathrm{e}\right)\right)$的切线方程$y=x-1$

C．对$\forall x\in(0,+\infty)$，不等式$f\left(x\right)\geq x-\mathrm{e}$恒成立

D．若x_0为函数$y=f\left(x\right)+x^2$的极值点，则$f\left(x_0\right)+3x_0>0$

三、填空题

12．某班设计了一个“水滴状”班徽（如图），徽章由等腰三角形ABC，及以弦BC和劣弧BC所围成的弓形所组成，劣弧BC所在的圆为三角形的外接圆，若$\angle A=\alpha,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，外接圆半径为1，则该图形的面积为____________．



13．若直线$y=kx+b\left(b<0\right)$是曲线$y=\mathrm{e}^{x-2}$的切线，也是曲线$y=\ln x$的切线，则$b=$________．

14．在空间直角坐标系中，定义点$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$和点$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$两点之间的“直角距离”$d_{(A,B)}=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+\left|z_1-z_2\right|$．若A和$B$两点之间的距离是$\sqrt{3}$，则A和$B$两点之间的“直角距离”的取值范围是______．

四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知该三角形的面积$S=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\sin A$．

(1)求角A的大小；

(2)若$a=4$时，求$\triangle ABC$面积的最大值．

16．中医药学是中国古代科学的瑰宝，也是打开中华文明宝库的钥匙.为了调查某地市民对中医药文化的了解程度，某学习小组随机向该地100位不同年龄段的市民发放了有关中医药文化的调查问卷，得到的数据如下表所示：

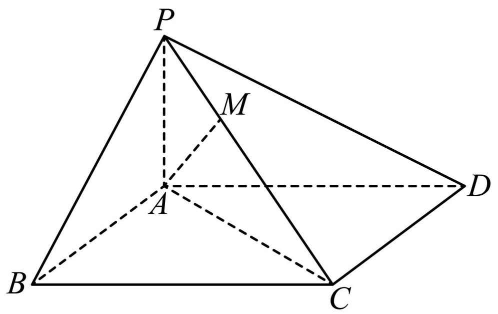
成绩 人数 年龄段	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
31 岁~40 岁	4	8	13	9	6
41 岁~50 岁	2	8	10	22	18

规定成绩在$[0,60)$内代表对中医药文化了解程度低，成绩在$[60,100]$内代表对中医药文化了解程度高.

(1)从这 100 位市民中随机抽取 1 人，求抽到对中医药文化了解程度高的市民的频率；

(2)将频率视为概率，现从该地 41 岁~50 岁年龄段的市民中随机抽取 3 人，记 X 为对中医药文化了解程度高的人数，求 X 的分布列和期望.

17．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 6 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$PB=PD$，$PA\perp AC$.



(1)证明：$BD\perp$平面PAC；

(2)若$PA=3$，M为棱PC上一点，满足$\overrightarrow{CM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CP}$，求点A到平面$MBD$的距离.

18．已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$的左、右顶点分别为 A、B，曲线 C 是以 A、B 为短轴的两端点且离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆，设点 P 在第一象限且在双曲线上，直线 AP 与椭圆相交于另一点 T.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)设点 P、T 的横坐标分别为 x_1，x_2，证明：$x_1x_2=1$；

(3)设△TAB 与△POB（其中 O 为坐标原点）的面积分别为 S_1 与 S_2，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 10$，求$S_1^2-S_2^2$的取值范围.

19．对于项数为m的有穷数列$\{a_n\}$，设b_n为$a_1,a_2,\cdots,a_n\left(n=1,2,\cdots,m\right)$中的最大值，称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的控制数列.例如数列 3，5，4，7 的控制数列是 3，5，5，7.

(1)若各项均为正整数的数列$\{a_n\}$的控制数列是 2，3，4，6，6，写出所有的$\{a_n\}$；

(2)设$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的控制数列，满足$a_n+b_{m-n+1}=C$（C为常数，$n=1,2,\cdots,m$）.证明：$b_n=a_n\left(n=1,2,\cdots,m\right)$.

(3)考虑正整数$1,2,\cdots,m$的所有排列，将每种排列都视为一个有穷数列$\{c_n\}$.是否存在数列$\{c_n\}$，使它的控制数列为等差数列？若存在，求出满足条件的数列$\{c_n\}$的个数；若不存在，请说明理由.

参考答案：

1．B

【分析】由函数有意义求得集合 A，进而求出集合 B，再利用交集的定义求解即得.

【详解】由 $4-x>0$，得 $x<4$，又 $x\in\mathbf{N}$，因此 $A=\{0,1,2,3\},B=\{0,1,2\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

故选：B

2．B

【分析】本题可设 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{5}=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{4}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}}{3}=t\left(t<0\right)$，然后利用向量的数量积公式以及余弦定理得出 $AB^2+BC^2-AC^2=-10t$、$AC^2+BC^2-AB^2=-8t$、$AB^2+AC^2-BC^2=-6t$，最后通过求出 BC、AC、AB 即可得出结果.

【详解】设 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{5}=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{4}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}}{3}=t\left(t<0\right)$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=5t$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4t$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=3t$，

即 $-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos B=5t$，$-\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\cos C=4t$，$-\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos A=3t$，

结合余弦定理易知，

$AB^2+BC^2-AC^2=-10t$，$AC^2+BC^2-AB^2=-8t$，$AB^2+AC^2-BC^2=-6t$，

联立 $\begin{cases}AB^2+BC^2-AC^2=-10t\\AC^2+BC^2-AB^2=-8t\\AB^2+AC^2-BC^2=-6t\end{cases}$，解得 $BC=3\sqrt{-t}$，$AC=\sqrt{-7t}$，$AB=2\sqrt{-2t}$，

则 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\sqrt{9}:\sqrt{7}:\sqrt{8}$，

故选：B.

3．A

【分析】将 $C:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 化为标准方程，根据题意可知点 A，B 在以 MC 为直径的圆上，由此得到以 MC 为直径的圆的方程，两圆方程相减可得答案.

【详解】由题意可得圆 $C:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的标准方程为：

$(x+2)^2+(y-2)^2=9,①$，圆心为 $C(-2,2)$，

过点 $M(0,5)$ 作圆 $C:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的两条切线 l_1,l_2 与圆 C 分别切于 A，B 两点，则 $MA\perp CA,MB\perp CB$，

故点 A，B 在以 MC 为直径的圆上，

而以 MC 为直径的圆的方程为：$(x+1)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{13}{4}$,②　，

①－②　得 $2x+3y-11=0$

即直线 AB 的方程为 $2x+3y-11=0$，

故选：A.

4．B

【分析】先求出将6位员工平均分成三组在 1 月 1 日至 1 月 3 日值班包含的基本事件的总数，再计算6位员工中甲不在1日值班包含的基本事件的总数，由古典概率公式即可求解.

【详解】该公司安排6位员工在“元旦(1 月 1 日至 1 月 3 日)”假期值班，每天安排2 人，每人值班 1 天，基本事件总数 $n=\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2$，

6位员工中甲不在1日值班包含的基本事件个数 $m=\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2$，

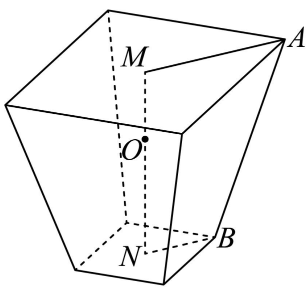
所以6位员工中甲不在1日值班的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

5．B

【分析】根据“方斗”的形状可确定该方斗的外接球的球心，再由方斗的容积以及勾股定理可求得外接球半径为 R，即可得外接球的表面积.

【详解】如下图所示：



外接球球心为高线 MN 上的点 O，满足 $OA=OB$，

由方斗的容积为 28 升，可得 $28=\frac{1}{3}\left(4+16+\sqrt{4\times16}\right)\cdot MN$，解得 $MN=3$.

设外接球半径为 $R,OM=x$，则 $ON=3-x$.

由上底边长为 4 分米，下底边长为 2 分米可得 $AM=2\sqrt{2},NB=\sqrt{2}$；

由勾股定理可得 $x^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=\left(3-x\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

即 $R^2=OA^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2\sqrt{2})^2=\frac{33}{4}$，

所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=33\pi$.

故选：B.

6．A

【分析】将 $a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$ 整理变形可得到 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，利用等比数列的通项公式可得 a_n，进而可得 b_n，判断出 S_n 的单调性可得 S_n 的最小值，再利用 $b_n<\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)}$ 可得 S_n 的最大值，进而可得 S_n 的整数部分.

【详解】由 $a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$ 得 $2a_n-2a_na_{n+1}=a_{n+1}-a_na_{n+1}$，且 $a_1=2\neq 0$，

故 $a_n>1\neq 0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

再将等式两边同除以 $a_{n+1}a_n$，得 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

由 $a_1=2$ 得 $\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$\therefore\frac{1}{a_n}-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，即 $a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$，

故 $a_n^2-a_n=a_n\left(a_n-1\right)=\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)^2}=b_n$.

又 $S_{n+1}-S_n=b_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\left(2^{n+1}-1\right)^2}>0$，故 S_n 是关于 n 的递增数列，

故 $S_n\geq S_1=b_1=a_1^2-a_1=2^2-2=2$；

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=a_n\left(a_n-1\right)=\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)^2}<\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)}$

$=\frac{2^{n-1}}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}\ \frac{1}{2^n-1}$,

故 $S_n < \frac{2}{(2^1-1)^2} + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\right) = 3-\frac{1}{2^n-1} < 3$.

综上有 $2 \le S_n < 3$.

$\therefore S_n$ 的整数部分为 2

故选：A.

7．B

【分析】延长CO交 AB 于点 P，则利用垂心的性质结合三角形面积的求法可得 $S_1:S_2:S_3 = \tan A:\tan B:\tan C$，再利用 $S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 和 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 可得 $\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，不妨设 $\tan A=k,\tan B=2k,\tan C=3k$，利用 $\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$ 可求出 k 的值，从而可求出 $\cos C$ 的值.

【详解】延长CO交 AB 于点 P，

$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，$\therefore OP\perp AB$，

$\therefore S_1:S_2=\left(\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BP\right):\left(\frac{1}{2}OC\cdot AP\right)$

$=BP:AP=(OP\tan\angle POB):(OP\tan\angle POA)$

$=\tan\angle COB:\tan\angle COA=\tan(\pi-A):\tan(\pi-B)=\tan A:\tan B$.

同理可得 $S_1:S_3=\tan A:\tan C$，$\therefore S_1:S_2:S_3=\tan A:\tan B:\tan C$.

又 $S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

$\therefore \tan A\cdot\overrightarrow{OA}+\tan B\cdot\overrightarrow{OB}+\tan C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

又 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

$\therefore \tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$.

不妨设 $\tan A=k,\tan B=2k,\tan C=3k$，其中 $k\neq 0$.

$\because \tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，

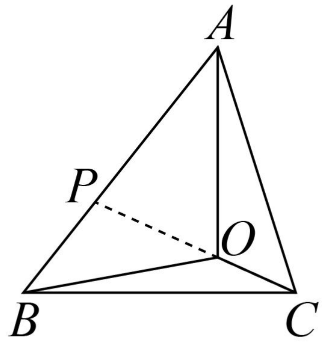
$\therefore k=-\frac{2k+3k}{1-2k\cdot 3k}$，解得 $k=\pm 1$.

当 $k=-1$ 时，此时 $\tan A<0,\tan B<0,\tan C<0$，则 A，B，C 都是钝角，不合题意，舍掉.

故 $k=1$，则 $\tan C=3>0$，故 C 为锐角，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{\sin C}{\cos C}=3 \\ \sin^2 C+\cos^2 C=1 \end{cases}$，解得 $\cos C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故选：B．



【点睛】关键点点睛：此题考查向量的线性运算，考查三角函数恒等变换公式的应用，解题的关键是利用垂心的性质得 $S_1:S_2:S_3=\tan A:\tan B:\tan C$，再结合已知条件得 $\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，设 $\tan A=k,\tan B=2k,\tan C=3k$，再利用两角和的正切公式可得 k，从而可求得结果，考查计算能力和转化思想，属于较难题.

8．C

【分析】依题意可得 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\le ax$ 对 $\forall x\ge 0$ 恒成立，记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，即 $g(x)\le 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，利用导数说明函数的单调性，分 $a\ge\dfrac{1}{3}$、$0<a<\dfrac{1}{3}$、$a\le 0$ 三种情况讨论，即可求出参数的取值范围.

【详解】$\forall x\ge 0$，$f(x)\le 0$ 等价于 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\le ax$，

记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，即 $g(x)\le 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$g'(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a=-3\left(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}-a$.

当 $\dfrac{1}{3}-a\le 0$ 即 $a\ge\dfrac{1}{3}$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x\ge 0$ 时，$g(x)\le g(0)=0$ 即 $f(x)\le 0$ 恒成立；

当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，记 $h(x)=\dfrac{\sin x}{3}-ax$，则 $h'(x)=\dfrac{\cos x}{3}-a$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)=\dfrac{\cos x}{3}-a$ 单调递减，又 $h'(0)=\dfrac{1}{3}-a>0$，$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-a<0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，