第五节 极限的存在准则

一、夹逼准则

二、单调有界收敛准则



一、准则I (夹逼准则)

1、（数列情况） 设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $y_n \le x_n \le z_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

2、（函数情况） 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足:

(1) 在 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ $(|x| > X)$, $g(x) \le f(x) \le h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A;$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A.$

（6种情况）

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$，当 $n > N_0$ 时，$y_n \le x_n \le z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

证：由条件 (2)，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，

当$n > N_1$时，$|y_n - a| < \varepsilon$，$\Rightarrow a - \varepsilon < y_n$

当$n > N_2$时，$|z_n - a| < \varepsilon$，$\Rightarrow z_n < a + \varepsilon$

取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$，则当$n > N$ 时，有

$$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$，得证！

注：准则中极限值a 或A为 $-\infty$或$+\infty$ 时结论仍然成立！

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because\quad n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot n$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1,$

适当放缩

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1,$ 由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

练习：

$$(1)\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=1$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{2}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1/2$$

(1) $$n\cdot\frac{n}{n^2+n}<n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)<\frac{n}{n^2+1}\cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

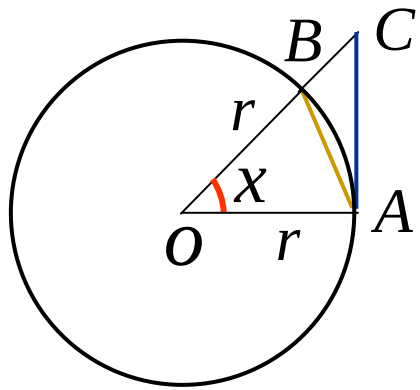
(2) $$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n\pi}<\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{2}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\pi}=\frac{1}{2}$$

例2.证明：

第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

证：$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，如右图：



$$S_{\Delta AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\Delta AOC}$$

即 $\dfrac{1}{2}r^2\sin x<\dfrac{1}{2}r^2x<\dfrac{1}{2}r^2\tan x$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\ 得\ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\ \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$，由夹逼准则即证！

第一个重要极限 $\lim \dfrac{\sin \square}{\square} = 1$

完全一样的无穷小，

如果不一样，要变变分母。

例3.求下列极限.

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \qquad (2)\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}$$

解：$(1)\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\boxed{3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\boxed{3x}}{\boxed{3x}}\cdot 3 = 3$

$$(2)\lim_{x\to\infty} x\sin\boxed{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\boxed{\frac{2}{x}}}{\boxed{\frac{2}{x}}}\cdot 2 = 2$$

例4.求下列极限.

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

$$(2)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1\quad(\text{或令}t=\arcsin x\to 0)$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

注： 当$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\qquad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

注： 当$x\to 0$时，$x\sim \sin x\sim \arcsin x\sim \tan x\sim \arctan x$

$$1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}\qquad \sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x$$

如： 当$x\to 0^+$时，$1-\cos\sqrt{x}\sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2}=\frac{x}{2}$

$$\sqrt{1-\cos x}\sim \sqrt{\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$1-\sqrt{\cos x}$$

当$x\to 1$时，$\arcsin(x-1)\sim x-1$

$$\sqrt{x}-1=\sqrt{1+(x-1)}-1\sim \frac{x-1}{2}$$

例5. 求下列极限.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \qquad (2)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}$$

解：(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$ 和差代换慎用！

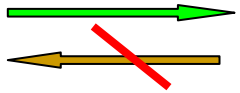
$$(1)\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/3}{x^2/2}=\frac{2}{3}$$

当$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim\tan x$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \qquad (1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$$

二、单调有界收敛准则

数列$\{x_n\}$收敛  数列$\{x_n\}$有界

如果数列$\{x_n\}$满足条件

$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$，单调增加

$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$，单调减少

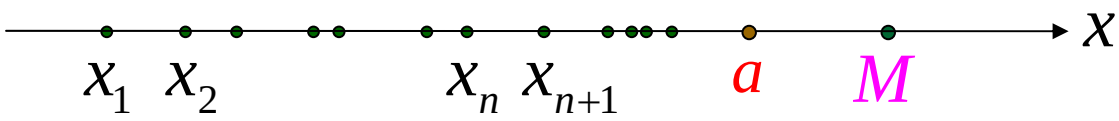
} 单调数列

准则II 单调有界数列一定收敛.

二、单调有界收敛准则

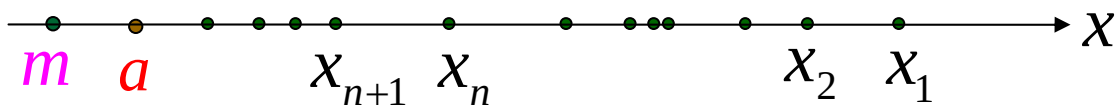
准则II（单调有界准则）

(1) 单调增（除有限项外）有上界数列必收敛;



注: 极限值即为最小的上界.

(2) 单调减（除有限项外）有下界数列必收敛.



注: 极限值即为最大的下界.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/347166044121006053