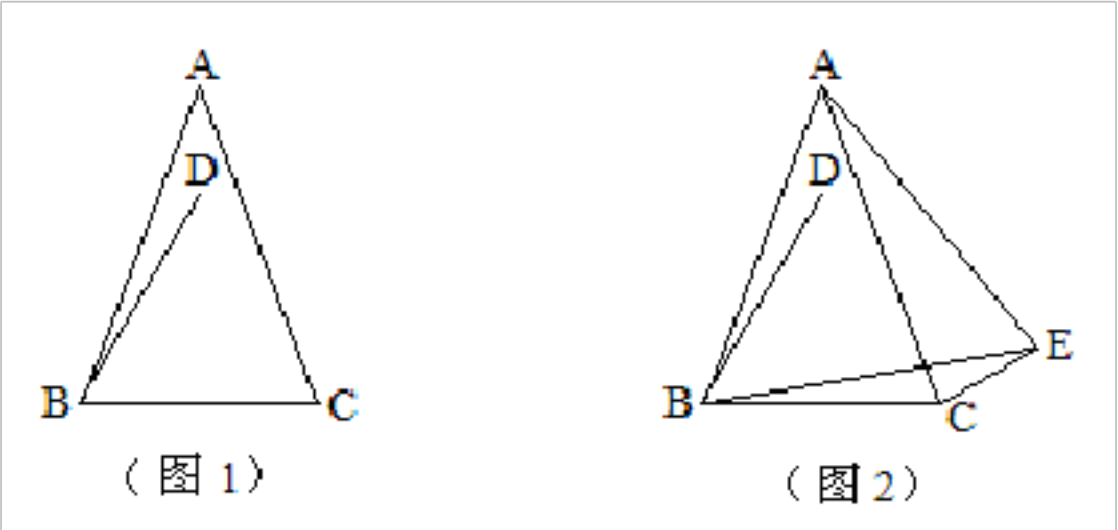


一、旋转

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=$ （ 0 60 ），将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD 。

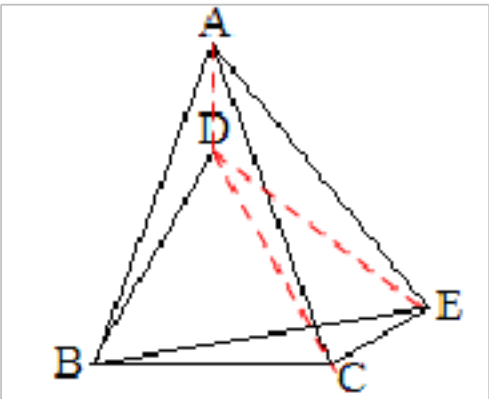


- (1) 如图 1，直接写出 $\angle ABD$ 的大小（用含 $\angle BAC$ 的式子表示）；
(2) 如图 2， $\angle BCE=150^\circ$ ， $\angle ABE=60^\circ$ ，判断 $\triangle ABE$ 的形状并加以证明；
(3) 在 (2) 的条件下，连结 DE ，若 $\angle DEC=45^\circ$ ，求 $\angle BAC$ 的值。

【答案】 (1) $30 + \frac{1}{2} \angle BAC$ (2) 见解析 (3) 30

【解析】解： (1) $30 + \frac{1}{2} \angle BAC$ 。

(2) $\triangle ABE$ 为等边三角形。证明如下：



连接 AD ， CD ， ED ，

$\because$ 线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD ，

$\therefore BC=BD$ ， $\angle DBC=60^\circ$ 。

又 $\because \angle ABE=60^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = 60^\circ - \angle DBE = \angle EBC = 30^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$ 且 $\triangle BCD$ 为等边三角形。

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中， $\because AB=AC$ ， $AD=AD$ ， $BD=CD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SSS)。 $\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$ 。

$\because \angle BCE=150^\circ$ ， $\therefore \angle BEC = 180^\circ - (30^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC) = 150^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$ 。 $\therefore \angle BEC = \angle BAD$ 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中， $\because \angle BEC = \angle BAD$ ， $\angle EBC = \angle ABD$ ， $BC=BD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC$ (AAS)。 $\therefore AB=BE$ 。

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形。

(3) $\because \angle BCD=60^\circ, \angle BCE=150^\circ, \therefore \angle DCE=150^\circ-60^\circ=90^\circ$ 。

又 $\because \angle DEC=45^\circ, \therefore \triangle DCE$ 为等腰直角三角形。

$\therefore DC=CE=BC$ 。

$\because \angle BCE=150^\circ, \therefore \angle EBC=\frac{(180^\circ-150^\circ)}{2}=15^\circ$ 。

而 $\angle EBC=30^\circ-\frac{1}{2}\times 15^\circ=15^\circ, \therefore \angle EBC=30^\circ$ 。

(1) $\because AB=AC, \angle BAC=120^\circ, \therefore \angle ABC=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$ 。

$\because$ 将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 $BD, \therefore \angle DBC=60^\circ$ 。

$\therefore \angle ABD=\angle ABC+\angle DBC=30^\circ+60^\circ=90^\circ$ 。

(2) 由 SSS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 由 AAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle EBC$, 即可根据有一个角等于 60° 的等腰三角

形是等边三角形的判定得出结论。

(3) 通过证明 $\triangle DCE$ 为等腰直角三角形得出 $\angle EBC=\frac{(180^\circ-150^\circ)}{2}=15^\circ$, 由 (1)

$\angle EBC=30^\circ-\frac{1}{2}\times 15^\circ=15^\circ$, 从

而 $30^\circ-\frac{1}{2}\times 15^\circ=15^\circ$, 解之即可。

2. (操作发现)

(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 先将三角板中的 60° 角与 $\angle ACB$ 重合, 再将三角板绕点 C 按顺时针方向旋转 (旋转角大于 0° 且小于 30°), 旋转后三角板的一直角边与 AB 交于点 D , 在三角板斜边上取一点 F , 使 $CF=CD$, 线段 AB 上取点 E , 使 $\angle DCE=30^\circ$, 连接 AF , EF 。

① 求 $\angle EAF$ 的度数;

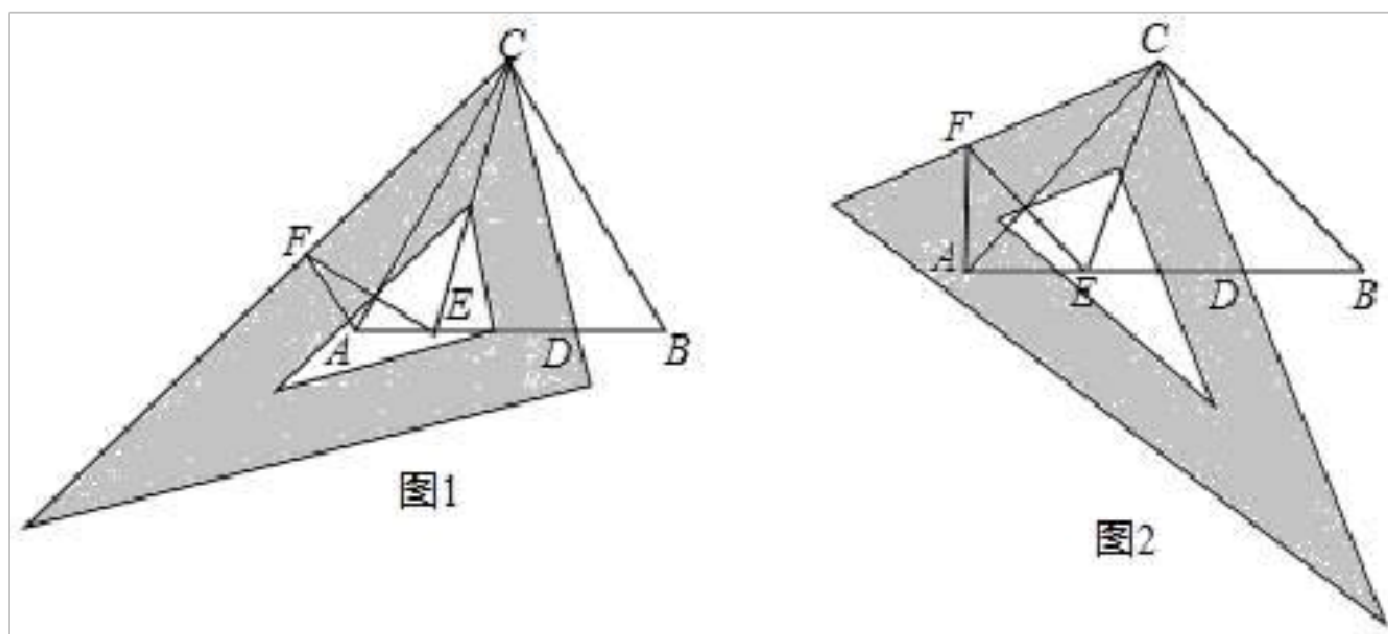
② DE 与 EF 相等吗? 请说明理由;

(类比探究)

(2) 如图 2, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, 先将三角板的 90° 角与 $\angle ACB$ 重合, 再将三角板绕点 C 按顺时针方向旋转 (旋转角大于 0° 且小于 45°), 旋转后三角板的一直角边与 AB 交于点 D , 在三角板另一直角边上取一点 F , 使 $CF=CD$, 线段 AB 上取点 E , 使 $\angle DCE=45^\circ$, 连接 AF , EF 。请直接写出探究结果:

① $\angle EAF$ 的度数;

② 线段 AE , ED , DB 之间的数量关系。



【答案】 (1) ① 120° ② $DE=EF$; (2) ① 90° ② $AE^2+DB^2=DE^2$

【解析】

试题分析：(1) ① 由等边三角形的性质得出 $AC=BC$, $\angle BAC=\angle B=60^\circ$, 求出 $\angle ACF=\angle BCD$, 证明 $\triangle ACF \cong \triangle BCD$, 得出 $\angle CAF=\angle B=60^\circ$, 求出 $\angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$;

② 证出 $\angle DCE=\angle FCE$, 由 SAS 证明 $\triangle DCE \cong \triangle FCE$, 得出 $DE=EF$ 即可;

(2) ① 由等腰直角三角形的性质得出 $AC=BC$, $\angle BAC=\angle B=45^\circ$, 证出 $\angle ACF=\angle BCD$, 由 SAS 证明 $\triangle ACF \cong \triangle BCD$, 得出 $\angle CAF=\angle B=45^\circ$, $AF=DB$, 求出 $\angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=90^\circ$;

② 证出 $\angle DCE=\angle FCE$, 由 SAS 证明 $\triangle DCE \cong \triangle FCE$, 得出 $DE=EF$; 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, 由勾股定理得出 $AE^2+AF^2=EF^2$, 即可得出结论.

试题解析：解：(1) ① $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AC=BC$, $\angle BAC=\angle B=60^\circ$. $\because \angle DCF=60^\circ$, $\therefore \angle ACF=\angle BCD$.

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\because AC=BC$, $\angle ACF=\angle BCD$, $CF=CD$, $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD$ (SAS), $\therefore \angle CAF=\angle B=60^\circ$, $\therefore \angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$;

② $DE=EF$. 理由如下:

$\because \angle DCF=60^\circ$, $\angle DCE=30^\circ$, $\therefore \angle FCE=60^\circ-30^\circ=30^\circ$, $\therefore \angle DCE=\angle FCE$. 在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FCE$ 中, $\because CD=CF$, $\angle DCE=\angle FCE$, $CE=CE$, $\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE$ (SAS), $\therefore DE=EF$;

(2) ① $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, $\therefore AC=BC$, $\angle BAC=\angle B=45^\circ$. $\because \angle DCF=90^\circ$, $\therefore \angle ACF=\angle BCD$. 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\because AC=BC$, $\angle ACF=\angle BCD$, $CF=CD$, $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD$ (SAS), $\therefore \angle CAF=\angle B=45^\circ$, $AF=DB$, $\therefore \angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=90^\circ$;

② $AE^2+DB^2=DE^2$, 理由如下:

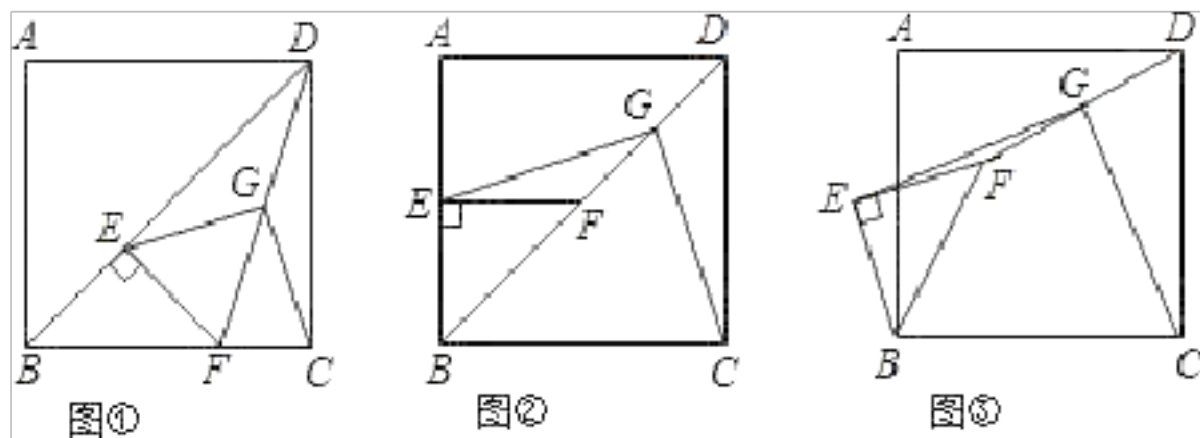
$\because \angle DCF=90^\circ$, $\angle DCE=45^\circ$, $\therefore \angle FCE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$, $\therefore \angle DCE=\angle FCE$. 在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FCE$ 中, $\because CD=CF$, $\angle DCE=\angle FCE$, $CE=CE$, $\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE$ (SAS), $\therefore DE=EF$. 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AE^2+AF^2=EF^2$, 又 $\because AF=DB$, $\therefore AE^2+DB^2=DE^2$.

3. 已知正方形 $ABCD$ 中, E 为对角线 BD 上一点, 过 E 点作 $EF \perp BD$ 交 BC 于 F , 连接 DF , G 为 DF 中点, 连接 EG , CG .

(1) 请问 EG 与 CG 存在怎样的数量关系, 并证明你的结论;

(2) 将图①中 $\triangle BEF$ 绕 B 点逆时针旋转 45° , 如图②所示, 取 DF 中点 G , 连接 EG , CG . 问 (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请说明理由.

(3) 将图①中 $\triangle BEF$ 绕B点旋转任意角度,如图③所示,再连接相应的线段,问(1)中的结论是否仍然成立?(请直接写出结果,不必写出理由)



【答案】(1) 证明见解析 (2) 证明见解析 (3) 结论仍然成立

【解析】

【分析】

(1) 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半,可证出 $CG=EG$.

(2) 结论仍然成立,连接AG,过G点作 $MN \perp AD$ 于M,与EF的延长线交于N点;再证明 $\triangle DAG \cong \triangle DCG$,得出 $AG=CG$;再证出 $\triangle DMG \cong \triangle FNG$,得到 $MG=NG$;再证明 $\triangle AMG \cong \triangle ENG$,得出 $AG=EG$;最后证出 $CG=EG$.

(3) 结论依然成立.

【详解】

(1) $CG=EG$.理由如下:

$\because$ 四边形ABCD是正方形, $\therefore \angle DCF=90^\circ$. 在 $Rt\triangle FCD$ 中, $\because G$ 为DF的中点, $\therefore CG=\frac{1}{2}FD$,

同理. 在 $Rt\triangle DEF$ 中, $EG=\frac{1}{2}FD$, $\therefore CG=EG$.

(2) (1) 中结论仍然成立,即 $EG=CG$.

证法一: 连接AG,过G点作 $MN \perp AD$ 于M,与EF的延长线交于N点.

在 $\triangle DAG$ 与 $\triangle DCG$ 中, $\because AD=CD$, $\angle ADG=\angle CDG$, $DG=DG$, $\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCG$ (SAS), $\therefore AG=CG$;

在 $\triangle DMG$ 与 $\triangle FNG$ 中, $\because \angle DGM=\angle FGN$, $FG=DG$, $\angle MDG=\angle NFG$, $\therefore \triangle DMG \cong \triangle FNG$ (ASA), $\therefore MG=NG$.

$\because \angle EAM=\angle AEN=\angle AMN=90^\circ$, $\therefore$ 四边形AENM是矩形,在矩形AENM中, $AM=EN$. 在 $\triangle AMG$ 与 $\triangle ENG$ 中, $\because AM=EN$, $\angle AMG=\angle ENG$, $MG=NG$, $\therefore \triangle AMG \cong \triangle ENG$ (SAS), $\therefore AG=EG$, $\therefore EG=CG$.

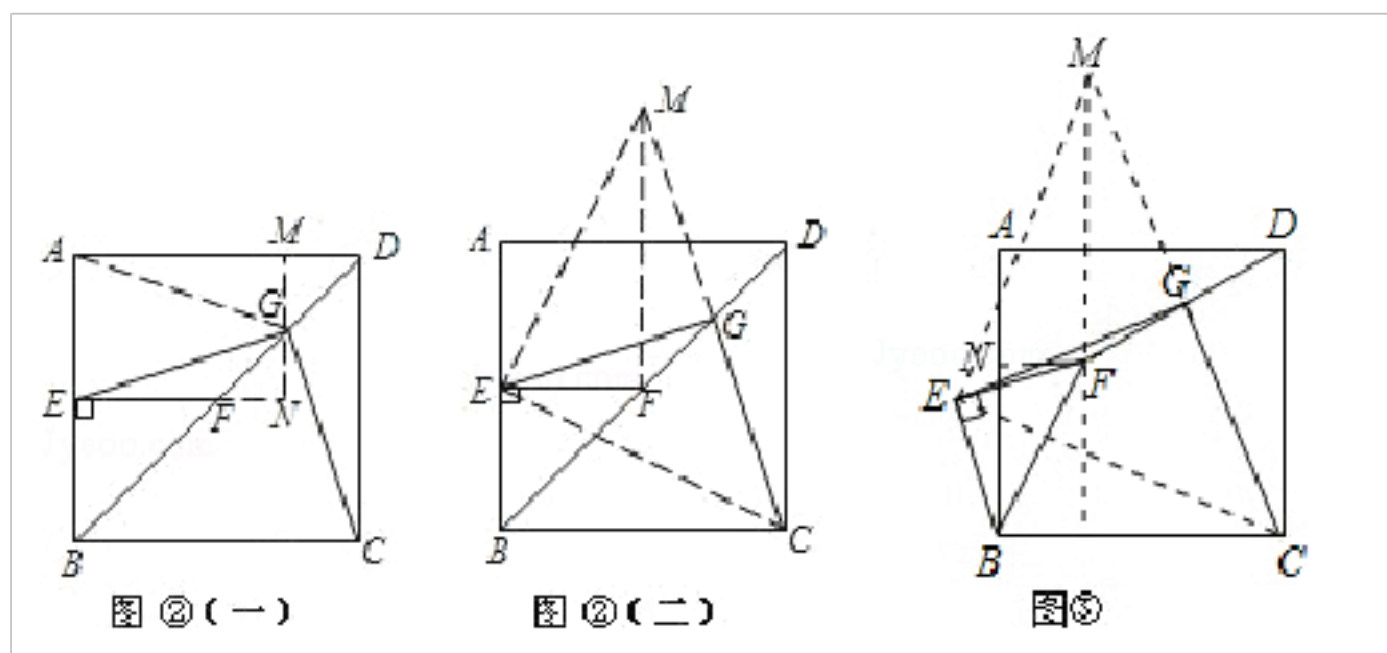
证法二: 延长CG至M,使 $MG=CG$,连接MF,ME,EC. 在 $\triangle DCG$ 与 $\triangle FMG$ 中, $\because FG=DG$, $\angle MGF=\angle CGD$, $MG=CG$, $\therefore \triangle DCG \cong \triangle FMG$, $\therefore MF=CD$, $\angle FMG=\angle DCG$, $\therefore MF \parallel CD \parallel AB$, $\therefore EF \perp MF$.

在 $Rt\triangle MFE$ 与 $Rt\triangle CBE$ 中, $\because MF=CB$, $\angle MFE=\angle EBC=90^\circ$, $EF=BE$, $\therefore \triangle MFE \cong \triangle CBE$, $\therefore \angle MEF=\angle CEB$, $\therefore \angle MEC=\angle MEF+\angle FEC=\angle CEB+\angle CEF=90^\circ$, $\therefore \triangle MEC$ 为直角三角形.

$\because MG=CG$, $\therefore EG=\frac{1}{2}MC$, $\therefore EG=CG$.

(3) (1) 中的结论仍然成立.理由如下:

过 F 作 CD 的平行线并延长 CG 交于 M 点，连接 EM、EC，过 F 作 FN 垂直于 AB 于 N。
 由于 G 为 FD 中点，易证 $\triangle CDG \cong \triangle MFG$ ，得到 $CD=FM$ ，又因为 $BE=EF$ ，易证 $\angle EFM = \angle EBC$ ，则 $\triangle EFM \cong \triangle EBC$ ， $\angle FEM = \angle BEC$ ， $EM = EC$
 $\because \angle FEC + \angle BEC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle FEC + \angle FEM = 90^\circ$ ，即 $\angle MEC = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle MEC$ 是等腰直角三角形。
 $\because G$ 为 CM 中点， $\therefore EG = CG$ ， $EG \perp CG$

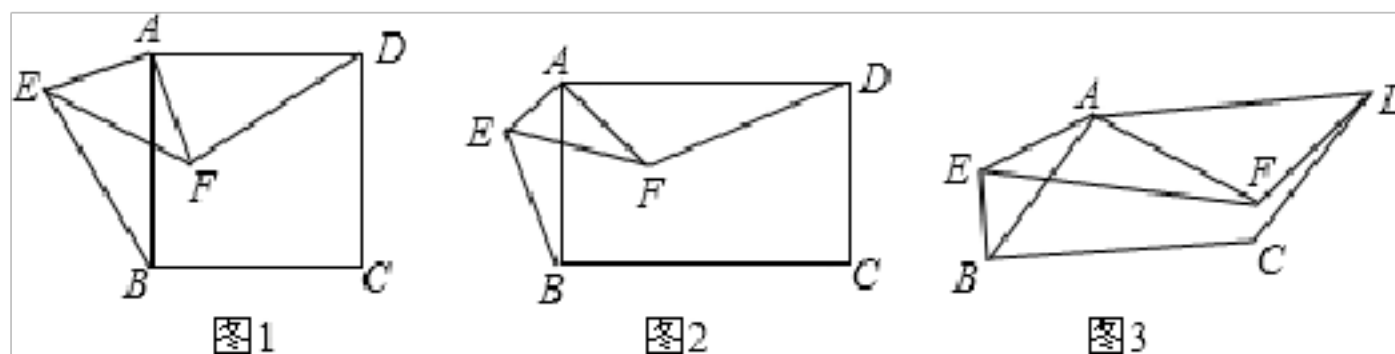


【点睛】

本题是四边形的综合题。（1）关键是利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半解答；
 （2）关键是利用了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质、全等三角形的判定和性质解答。

4. 如图所示，

- (1) 正方形 ABCD 及等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ 有公共顶点 A， $\angle EAF = 90^\circ$ ，连接 BE、DF。将 $\text{Rt}\triangle AEF$ 绕点 A 旋转，在旋转过程中，BE、DF 具有怎样的数量关系和位置关系？结合图(1)给予证明；
- (2) 将(1)中的正方形 ABCD 变为矩形 ABCD，等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ 变为 $\text{Rt}\triangle AEF$ ，且 $AD = kAB$ ， $AF = kAE$ ，其他条件不变。(1)中的结论是否发生变化？结合图(2)说明理由；
- (3) 将(2)中的矩形 ABCD 变为平行四边形 ABCD，将 $\text{Rt}\triangle AEF$ 变为 $\triangle AEF$ ，且 $\angle BAD = \angle EAF = \alpha$ ，其他条件不变。(2)中的结论是否发生变化？结合图(3)，如果不变，直接写出结论；如果变化，直接用 k 表示出线段 BE、DF 的数量关系，用 α 表示出直线 BE、DF 形成的锐角 β 。



【答案】（1） $DF = BE$ 且 $DF \perp BE$ ，证明见解析；（2）数量关系改变，位置关系不变，即 $DF = kBE$ ， $DF \perp BE$ ；（3）不改变。 $DF = kBE$ ， $\beta = 180^\circ - \alpha$

【解析】

【分析】

（1）根据旋转的过程中线段的长度不变，得到 $AF = AE$ ，又 $\angle BAE$ 与 $\angle DAF$ 都与 $\angle BAF$ 互余，所以 $\angle BAE = \angle DAF$ ，所以 $\triangle FAD \cong \triangle EAB$ ，因此 BE 与 DF 相等，延长 DF 交 BE 于 G，

根据全等三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360° 求出 $\angle EGF = 90^\circ$ ，所以 $DF \perp BE$ ；

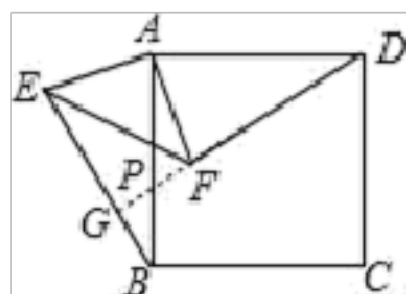
(2) 等同 (1) 的方法，因为矩形的邻边不相等，但根据题意，可以得到对应边成比例，所以 $\triangle FAD \sim \triangle EAB$ ，所以 $DF = kBE$ ，同理，根据相似三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360° 求出 $\angle EHF = 90^\circ$ ，所以 $DF \perp BE$ ；

(3) 与 (2) 的证明方法相同，但根据相似三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360° 求出 $\angle EAF + \angle EHF = 180^\circ$ ，所以 DF 与 BE 的夹角 $\beta = 180^\circ - \alpha$ 。

【详解】

(1) DF 与 BE 互相垂直且相等。

证明：延长 DF 分别交 AB 、 BE 于点 P 、 G



在正方形 $ABCD$ 和等腰直角 $\triangle AEF$ 中

$AD = AB$ ， $AF = AE$ ，

$\angle BAD = \angle EAF = 90^\circ$

$\therefore \angle FAD = \angle EAB$

$\therefore \triangle FAD \cong \triangle EAB$

$\therefore \angle AFD = \angle AEB$ ， $DF = BE$

$\because \angle AFD + \angle AFG = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle AEG + \angle AFG = 180^\circ$ ，

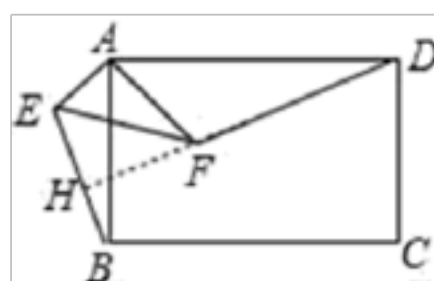
$\because \angle EAF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EGF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore DF \perp BE$

(2) 数量关系改变，位置关系不变。 $DF = kBE$ ， $DF \perp BE$ 。

延长 DF 交 EB 于点 H ，



$\because AD = kAB$ ， $AF = kAE$

$\therefore \frac{AD}{AB} = k$ ， $\frac{AF}{AE} = k$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$

$\because \angle BAD = \angle EAF = \alpha$

$\therefore \angle FAD = \angle EAB$

$\therefore \triangle FAD \sim \triangle EAB$

$$\therefore \frac{DF}{BE} = \frac{AF}{AE} = k$$

$$\therefore DF = kBE$$

$$\because \triangle FAD \sim \triangle EAB,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle AEB,$$

$$\because \angle AFD + \angle AFH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEH + \angle AFH = 180^\circ,$$

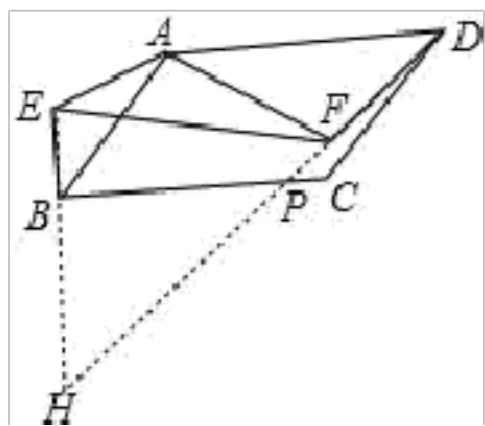
$$\because \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore DF \perp BE$$

(3) 不改变. $DF = kBE$, $\beta = 180^\circ - \alpha$.

延长 DF 交 EB 的延长线于点 H ,



$$\because AD = kAB, AF = kAE$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = k, \frac{AF}{AE} = k$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$$

$$\because \angle BAD = \angle EAF = \alpha$$

$$\therefore \angle FAD = \angle EAB$$

$$\therefore \triangle FAD \sim \triangle EAB$$

$$\therefore \frac{DF}{BE} = \frac{AF}{AE} = k$$

$$\therefore DF = kBE$$

由 $\triangle FAD \sim \triangle EAB$ 得 $\angle AFD = \angle AEB$

$$\because \angle AFD + \angle AFH = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AEB + \angle AFH = 180^\circ$$

$\because$ 四边形 $AEHF$ 的内角和为 360° ,

$$\therefore \angle EAF + \angle EHF = 180^\circ$$

$$\because \angle EAF = \alpha, \angle EHF = \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta = 180^\circ \therefore \beta = 180^\circ - \alpha$$

【点睛】

本题 (1) 中主要利用三角形全等的判定和性质以及正方形的性质进行证明; (2) (3) 利用相似三角形的判定和性质证明, 要解决本题, 证明三角形全等和三角相似是解题的关

键，也是难点所在.

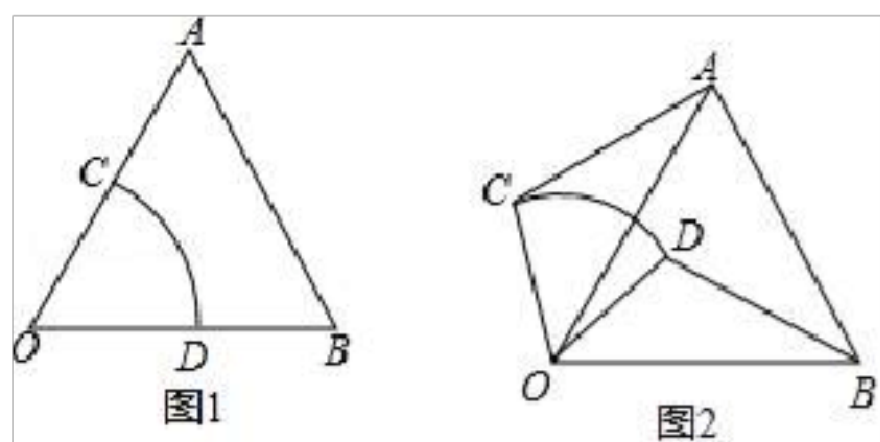
5. 在等边 $\triangle AOB$ 中，将扇形 COD 按图 1 摆放，使扇形的半径 OC、OD 分别与 OA、OB 重合， $OA=OB=2$ ， $OC=OD=1$ ，固定等边 $\triangle AOB$ 不动，让扇形 COD 绕点 O 逆时针旋转，线段 AC、BD 也随之变化，设旋转角为 α . ($0<\alpha\leq 360^\circ$)

(1) 当 $OC\parallel AB$ 时，旋转角 $\alpha=$ _____度；

发现：(2) 线段 AC 与 BD 有何数量关系，请仅就图 2 给出证明.

应用：(3) 当 A、C、D 三点共线时，求 BD 的长.

拓展：(4) P 是线段 AB 上任意一点，在扇形 COD 的旋转过程中，请直接写出线段 PC 的最大值与最小值.



【答案】 (1) 60 或 240； (2) $AC=BD$ 理由见解析； (3) $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ ； (4) PC 的

最大值=3，PC 的最小值= $\sqrt{3}-1$.

【解析】

分析：(1) 如图 1 中，易知当点 D 在线段 AD 和线段 AD 的延长线上时， $OC\parallel AB$ ，此时旋转角 $\alpha=60^\circ$ 或 240° .

(2) 结论： $AC=BD$. 只要证明 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$ 即可.

(3) 在图 3、图 4 中，分别求解即可.

(4) 如图 5 中，由题意，点 C 在以 O 为圆心，1 为半径的 $\odot O$ 上运动，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于 H，直线 OH 交 $\odot O$ 于 C' 、 C'' ，线段 CB 的长即为 PC 的最大值，线段 $C'H$ 的长即为 PC 的最小值. 易知 PC 的最大值=3，PC 的最小值= $\sqrt{3}-1$.

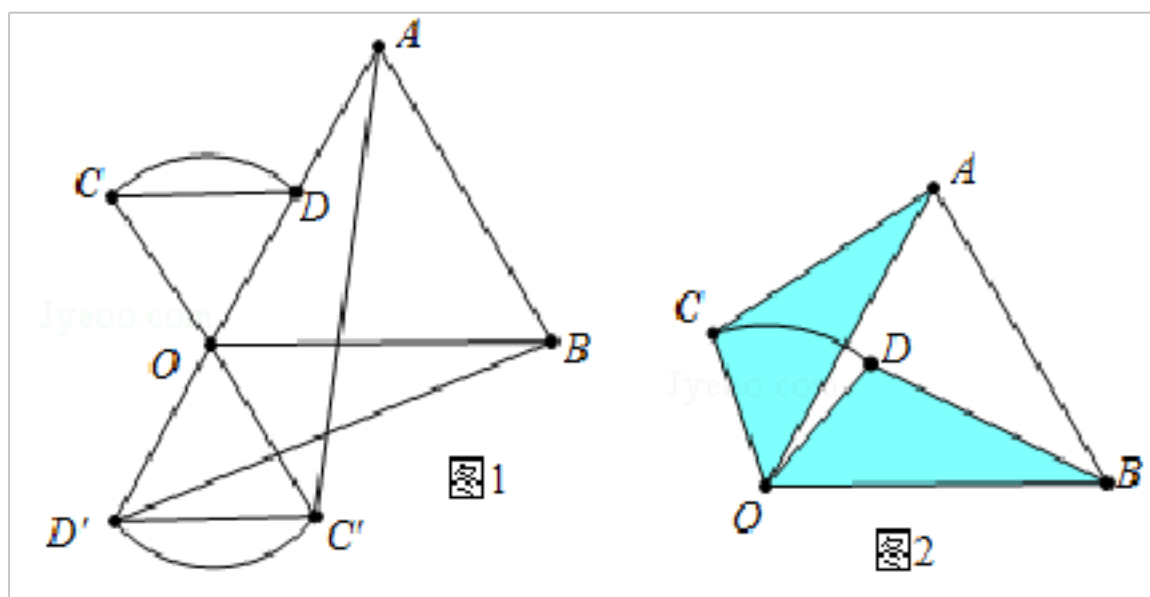
详解：(1) 如图 1 中， $\because\triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore\angle AOB=\angle COD=60^\circ$ ， $\therefore$ 当点 D 在线段 AD 和线段 AD 的延长线上时， $OC\parallel AB$ ，此时旋转角 $\alpha=60^\circ$ 或 240° .

故答案为 60 或 240；

(2) 结论： $AC=BD$ ，理由如下：

如图 2 中， $\because\angle COD=\angle AOB=60^\circ$ ， $\therefore\angle COA=\angle DOB$. 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，

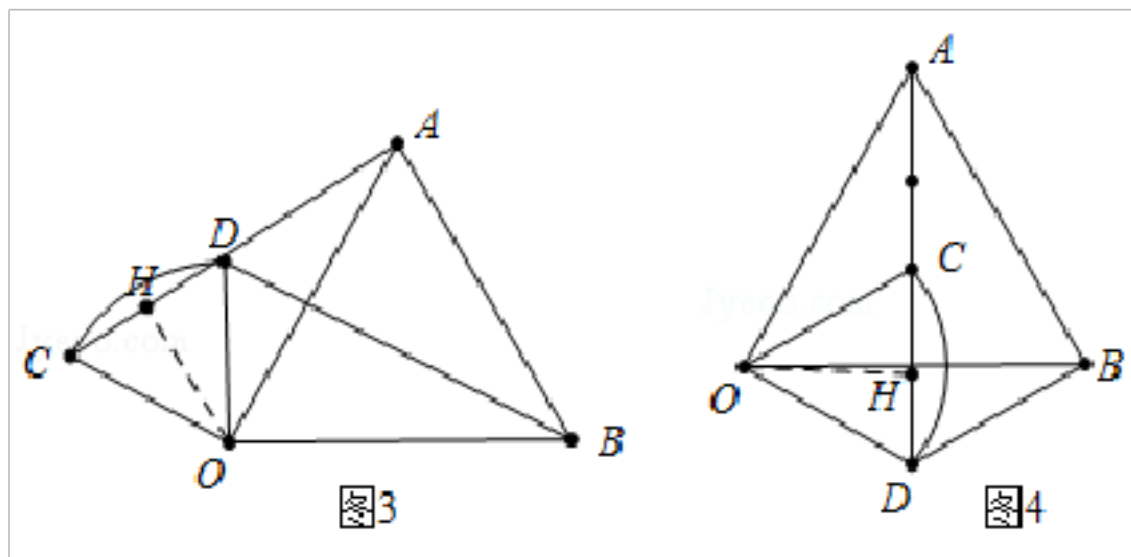
$OA=OB$
 $\angle COA=\angle DOB$ ， $\therefore\triangle AOC\cong\triangle BOD$ ， $\therefore AC=BD$ ；
 $OC=OD$



(3) ① 如图 3 中, 当 A、C、D 共线时, 作 $OH \perp AC$ 于 H.

在 $\text{Rt}\triangle COH$ 中, $\because OC=1, \angle COH=30^\circ, \therefore CH=HD=\frac{1}{2}, OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle AOH$ 中,
 $AH=\sqrt{OA^2 - OH^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}, \therefore BD=AC=CH+AH=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

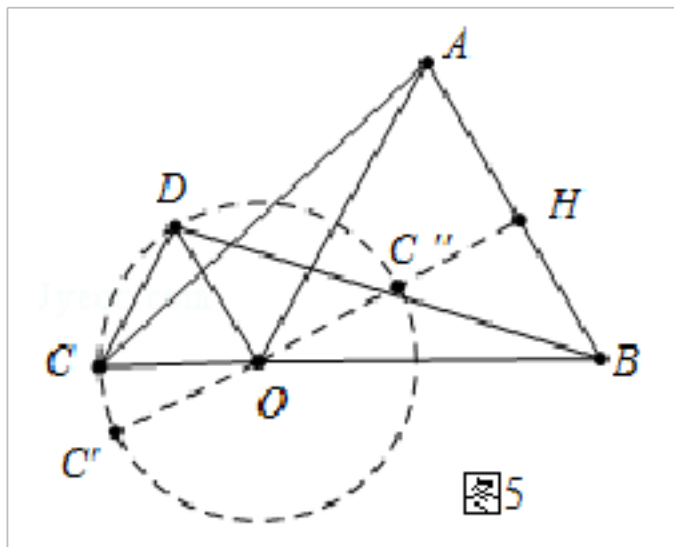
如图 4 中, 当 A、C、D 共线时, 作 $OH \perp AC$ 于 H.



易知 $AC=BD=AH - CH=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

综上所述: 当 A、C、D 三点共线时, BD 的长为 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$;

(4) 如图 5 中, 由题意, 点 C 在以 O 为圆心, 1 为半径的 $\odot O$ 上运动, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H, 直线 OH 交 $\odot O$ 于 C', C'' , 线段 CB 的长即为 PC 的最大值, 线段 $C'H$ 的长即为 PC 的最小值. 易知 PC 的最大值=3, PC 的最小值= $\sqrt{3}-1$.

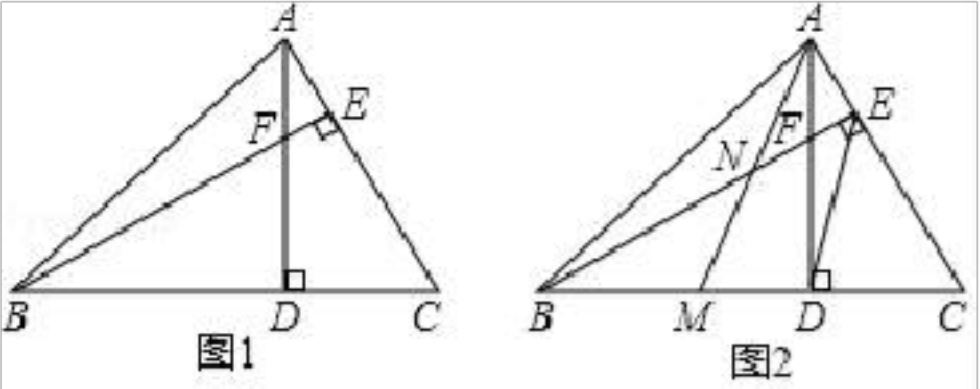


点睛: 本题考查了圆综合题、旋转变换、等边三角形的性质、全等三角形的判定和性质、

勾股定理、圆上的点到直线的距离的最值问题等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，利用辅助圆解决最值问题，属于中考压轴题.

6. 如图 1，在锐角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=45^\circ$ ，高线 AD 、 BE 相交于点 F .

- (1) 判断 BF 与 AC 的数量关系并说明理由；
- (2) 如图 2，将 $\triangle ACD$ 沿线段 AD 对折，点 C 落在 BD 上的点 M ， AM 与 BE 相交于点 N ，当 $DE \parallel AM$ 时，判断 NE 与 AC 的数量关系并说明理由.



【答案】 (1) $BF=AC$ ，理由见解析； (2) $NE=\frac{1}{2}AC$ ，理由见解析.

【解析】

试题分析： (1) 如图 1，证明 $\triangle ADC \cong \triangle BDF$ (AAS)，可得 $BF=AC$ ；

(2) 如图 2，由折叠得： $MD=DC$ ，先根据三角形中位线的推论可得： $AE=EC$ ，由线段垂直平分线的性质得： $AB=BC$ ，则 $\angle ABE = \angle CBE$ ，结合 (1) 得： $\triangle BDF \cong \triangle ADM$ ，则 $\angle DBF = \angle MAD$ ，最后证明 $\angle ANE = \angle NAE = 45^\circ$ ，得 $AE=EN$ ，所以 $EN = \frac{1}{2}AC$.

试题解析：

(1) $BF=AC$ ，理由是：

如图 1， $\because AD \perp BC$ ， $BE \perp AC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle AEF = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABC = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AD = BD$ ，

$\because \angle AFE = \angle BFD$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle EBC$ ，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDF$ 中，

$$\begin{array}{l} \angle DAC = \angle DBF \\ \angle ADC = \angle BDF \\ AD = BD \end{array}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDF$ (AAS)，

$\therefore BF=AC$ ；

(2) $NE = \frac{1}{2}AC$ ，理由是：

如图 2，由折叠得：MD=DC，

$\because DE \parallel AM$ ，

$\therefore AE=EC$ ，

$\because BE \perp AC$ ，

$\therefore AB=BC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ，

由（1）得： $\triangle ADC \cong \triangle BDF$ ，

$\because \triangle ADC \cong \triangle ADM$ ，

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADM$ ，

$\therefore \angle DBF = \angle MAD$ ，

$\because \angle DBA = \angle BAD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DBA - \angle DBF = \angle BAD - \angle MAD$ ，

即 $\angle ABE = \angle BAN$ ，

$\because \angle ANE = \angle ABE + \angle BAN = 2 \angle ABE$ ，

$\angle NAE = 2 \angle NAD = 2 \angle CBE$ ，

$\therefore \angle ANE = \angle NAE = 45^\circ$ ，

$\therefore AE=EN$ ，

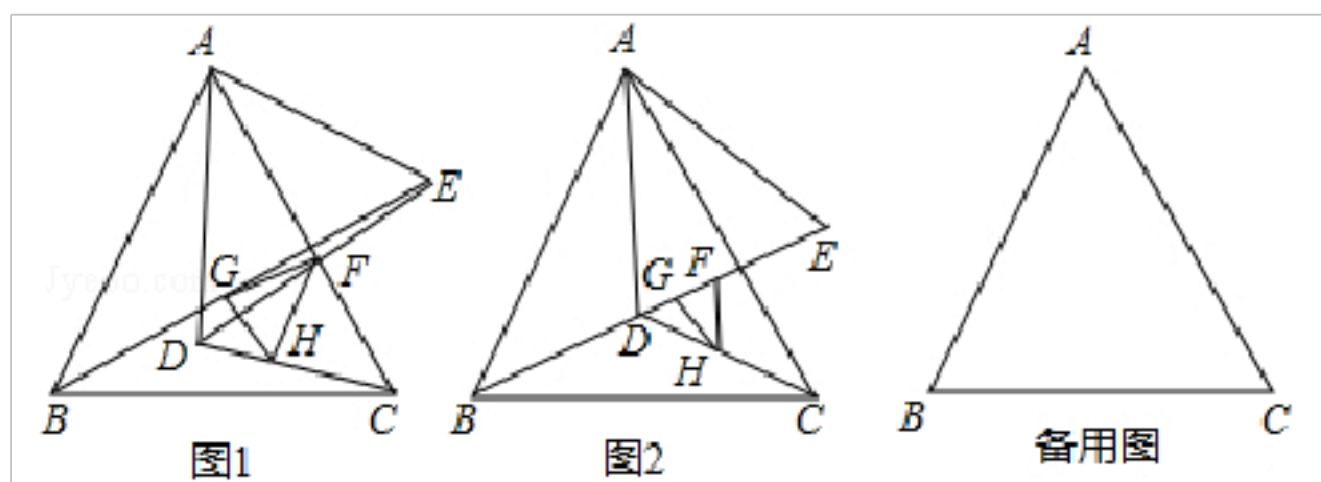
$\therefore EN = \frac{1}{2} AC$ 。

7. 已知： $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形，连接 BE，CD，点 F，G，H 分别为 DE，BE，CD 中点。

（1）当 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转时，如图 1，则 $\triangle FGH$ 的形状为___，说明理由；

（2）在 $\triangle ADE$ 旋转的过程中，当 B，D，E 三点共线时，如图 2，若 $AB=3$ ， $AD=2$ ，求线段 FH 的长；

（3）在 $\triangle ADE$ 旋转的过程中，若 $AB=a$ ， $AD=b$ （ $a>b>0$ ），则 $\triangle FGH$ 的周长是否存在最大值和最小值，若存在，直接写出最大值和最小值；若不存在，说明理由。



【答案】（1） $\triangle FGH$ 是等边三角形；（2） $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ；（3） $\triangle FGH$ 的周长最大值为 $\frac{3}{2}$

$(a+b)$ ，最小值为 $\frac{3}{2}(a-b)$ 。

【解析】

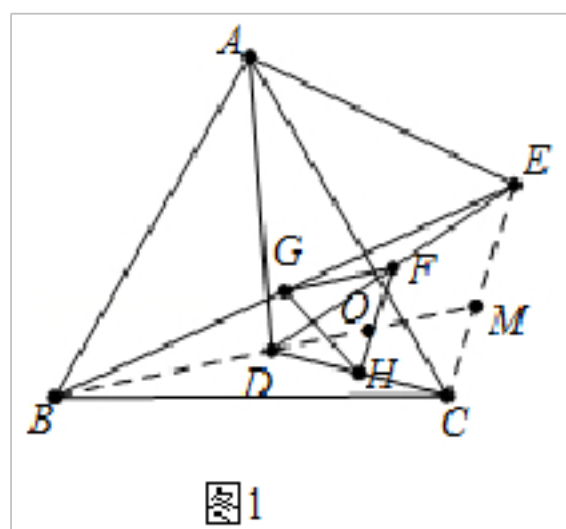
试题分析：（1）结论：△FGH 是等边三角形．理由如下：根据三角形中位线定理证明 FG=FH，再想办法证明∠GFH=60°即可解决问题；、

（2）如图 2 中，连接 AF、EC．在 Rt△AFE 和 Rt△AFB 中，解直角三角形即可；

（3）首先证明△GFH 的周长=3GF= $\frac{3}{2}$ BD，求出 BD 的最大值和最小值即可解决问题；

试题解析：解：（1）结论：△FGH 是等边三角形．理由如下：

如图 1 中，连接 BD、CE，延长 BD 交 CE 于 M，设 BM 交 FH 于点 O．



∵△ABC 和△ADE 均为等边三角形，∴AB=AC，AD=AE，∠BAC=∠DAE，∴∠BAD=∠CAE，

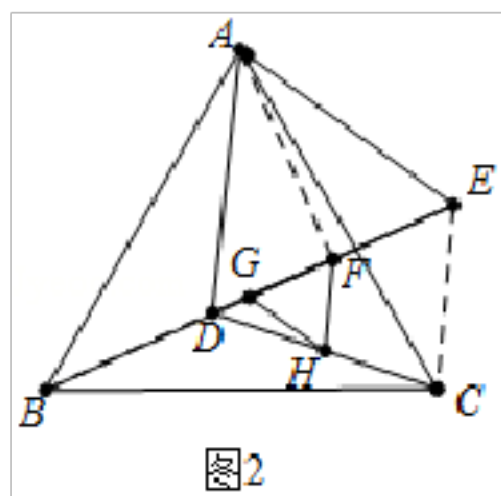
∴△BAD≌△CAE，∴BD=CE，∠ADB=∠AEC，∵EG=GB，EF=FD，∴FG= $\frac{1}{2}$ BD，GF∥BD，

∵DF=EF，DH=HC，∴FH= $\frac{1}{2}$ EC，FH∥EC，∴FG=FH，∵∠ADB+∠ADM=180°，

∴∠AEC+∠ADM=180°，∴∠DMC+∠DAE=180°，∴∠DME=120°，∴∠BMC=60°

∴∠GFH=∠BOH=∠BMC=60°，∴△GHF 是等边三角形，故答案为：等边三角形．

（2）如图 2 中，连接 AF、EC．



易知 AF⊥DE，在 Rt△AEF 中，AE=2，EF=DF=1，∴AF= $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ，在 Rt△ABF 中，

BF= $\sqrt{AB^2-AF^2}=\sqrt{6}$ ，∴BD=CE=BF-DF= $\sqrt{6}-1$ ，∴FH= $\frac{1}{2}$ EC= $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ．

（3）存在．理由如下．

由（1）可知，△GFH 是等边三角形，GF= $\frac{1}{2}$ BD，∴△GFH 的周长=3GF= $\frac{3}{2}$ BD，在△ABD

中，AB=a，AD=b，∴BD 的最小值为 a-b，最大值为 a+b，∴△FGH 的周长最大值为 $\frac{3}{2}$

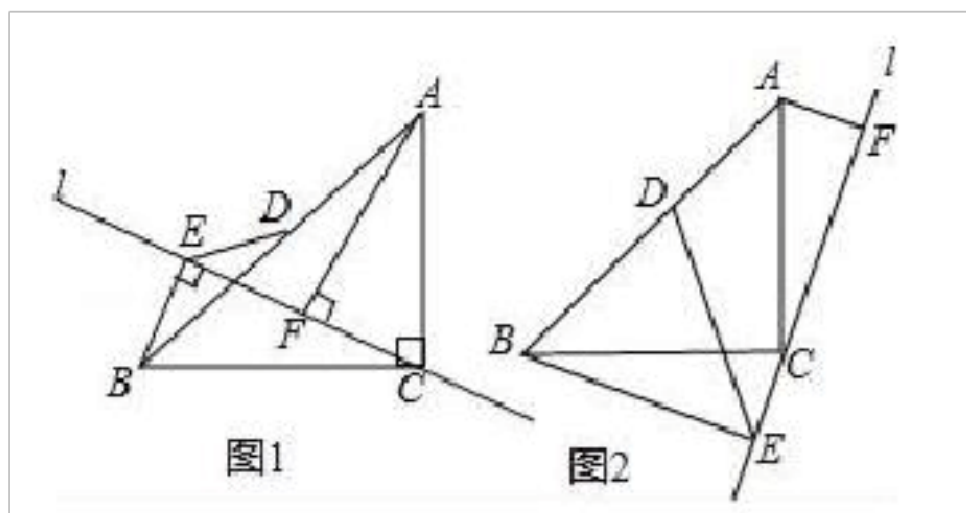
$(a+b)$ ，最小值为 $\frac{3}{2}(a-b)$ 。

点睛：本题考查等边三角形的性质、全等三角形的判定和性质、解直角三角形、三角形的三边关系、三角形的中位线的宽等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，正确寻找全等三角形解决问题，学会利用三角形的三边关系解决最值问题，属于中考压轴题。

8. 如图 1， $\triangle ABC$ 中， $CA=CB$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，直线 l 经过点 C ， $AF \perp l$ 于点 F ， $BE \perp l$ 于点 E 。

(1) 求证： $\triangle ACF \cong \triangle CBE$ ；

(2) 将直线旋转到如图 2 所示位置，点 D 是 AB 的中点，连接 DE 。若 $AB=4\sqrt{2}$ ， $\angle CBE=30^\circ$ ，求 DE 的长。



【答案】(1) 答案见解析；(2) $\sqrt{2}$ $\sqrt{6}$

【解析】

试题分析：(1) 根据垂直的定义得到 $\angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle EBC = \angle CAF$ ，即可得到结论；

(2) 连接 CD ， DF ，证得 $\triangle BCE \cong \triangle ACF$ ，根据全等三角形的性质得到 $BE = CF$ ， $CE = AF$ ，证得 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质得到 $EF = \sqrt{2} DE$ ， $EF = CE + BE$ ，进而得到 DE 的长。

试题解析：解：(1) $\because BE \perp CE$ ， $\therefore \angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EBC + \angle BCE = \angle BCE + \angle ACF = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EBC = \angle CAF$ 。 $\because AF \perp l$ 于点 F ， $\therefore \angle AFC = 90^\circ$ 。

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ACF$ 中， $\because \begin{matrix} \angle AFC & \angle BEC & 90 \\ \angle EBC & \angle CAF \\ BC & AC \end{matrix}$ ， $\therefore \triangle ACF \cong \triangle CBE$ (AAS)；

(2) 如图 2，连接 CD ， DF 。 $\because BE \perp CE$ ， $\therefore \angle BEC = \angle ACB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EBC + \angle BCE = \angle BCE + \angle ACF = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EBC = \angle CAF$ 。 $\because AF \perp l$ 于点 F ， $\therefore \angle AFC = 90^\circ$ 。

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CAF$ 中， $\because \begin{matrix} \angle AFC & \angle BEC & 90 \\ \angle EBC & \angle CAF \\ BC & AC \end{matrix}$ ， $\therefore \triangle BCE \cong \triangle CAF$ (AAS)；

$\therefore BE = CF$ 。 $\because$ 点 D 是 AB 的中点， $\therefore CD = BD$ ， $\angle CDB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CBD = \angle ACD = 45^\circ$ ，而

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/348014047053006135>