

2024 届云南省会曲靖市会泽县第一中学高考数学试题三模试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $M\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 成中心对称，且与

点 M 相邻的一个最低点为 $N\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$ ，则对于下列判断：

- ① 直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；
- ② 点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心；
- ③ 函数 $y = 1$ 与 $y = f(x)$ $\left(-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{35\pi}{12}\right)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为 7π 。

其中正确的判断是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

2. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的最大值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，若圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则双曲线的离心率取值范围是 ()。

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

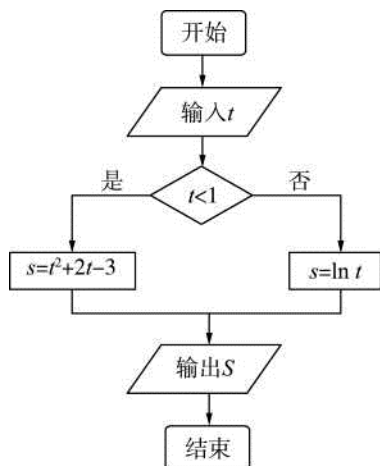
4. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是非零向量。若 $\left| \vec{a} \cdot \vec{c} \right| = \left| \vec{b} \cdot \vec{c} \right| = \frac{1}{2} \left| (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$ ，则 ()

- A. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ B. $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ C. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ D. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

5. 若复数 $z = (3 - i)(1 + i)$ ，则 $|z| =$ ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. 20

6. 执行如图所示的程序框图，如果输入 $t \in [-2, e^2]$ ，则输出 S 属于 ()



- A. $[-3, 2]$ B. $[-4, 2]$ C. $[0, 2]$ D. $[-3, e^2]$

7. 已知 $a = \log_{12} 13$, $b = \left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{13}{14}}$, $c = \log_{13} 14$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

8. 已知 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$, 则下列是等式 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 成立的必要不充分条件的是 ()

- A. $\sin \alpha > \sin \beta$ B. $\sin \alpha < \sin \beta$
C. $\cos \alpha > \cos \beta$ D. $\cos \alpha < \cos \beta$

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x + x$ ，则 $a = f(-2^{\frac{3}{2}})$, $b = f(\log_2 9)$, $c = f(\sqrt{5})$ 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

10. 甲在微信群中发了一个 6 元“拼手气”红包，被乙、丙、丁三人抢完，若三人均领到整数元，且每人至少领到 1 元，则乙获得“最佳手气”(即乙领到的钱数多于其他任何人)的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 在直角坐标系中，已知 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ ，若直线 $x + my - 1 = 0$ 上存在点 P ，使得 $|PA| = 2|PB|$ ，则正实数 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

12. 圆心为 $(2,1)$ 且和 x 轴相切的圆的方程是()

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设常数 $a \in \mathbb{R}$ ，如果 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x 项的系数为-80，那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 6$ ， $S_7 = 28$ ，则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{a_1 + a_n}{S_{n+4}}$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 某部门全部员工参加一项社会公益活动，按年龄分为 A 、 B 、 C 三组，其人数之比为 $5:3:2$ ，现用分层抽样的方法从总体中抽取一个容量为20的样本，若 C 组中甲、乙二人均被抽到的概率是 $\frac{1}{11}$ ，则该部门员工总人数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 某高中共有1800人，其中高一、高二、高三年级的人数依次成等差数列，现用分层抽样的方法从中抽取60人，那么高二年级被抽取的人数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

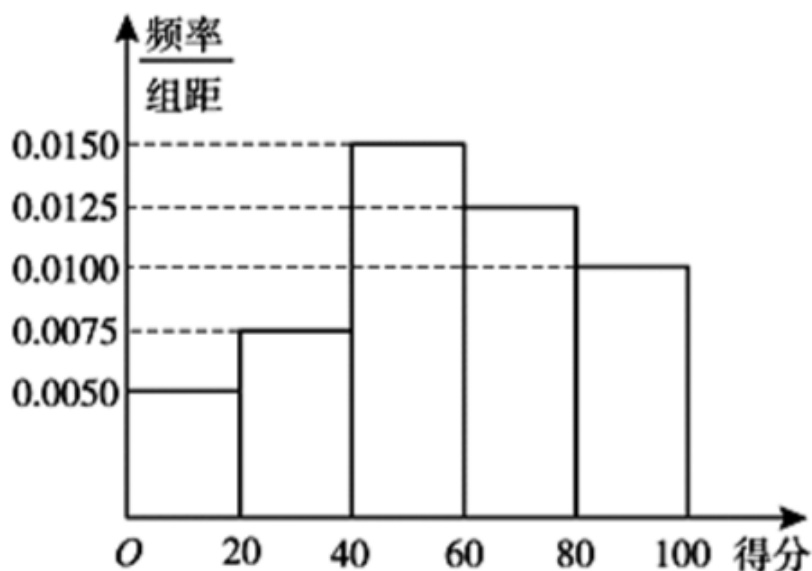
三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$ ，其中 $m \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $m > 0$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的最大值.

18. (12分) 为了加强环保知识的宣传，某学校组织了垃圾分类知识竞赛活动. 活动设置了四个箱子，分别写有“厨余垃圾”、“有害垃圾”、“可回收物”、“其它垃圾”；另有卡片若干张，每张卡片上写有一种垃圾的名称. 每位参赛选手从所有卡片中随机抽取20张，按照自己的判断将每张卡片放入对应的箱子中. 按规则，每正确投放一张卡片得5分，投放错误得0分. 比如将写有“废电池”的卡片放入写有“有害垃圾”的箱子，得5分，放入其它箱子，得0分. 从所有参赛选手中随机抽取20人，将他们的得分按照 $[0, 20]$ 、 $(20, 40]$ 、 $(40, 60]$ 、 $(60, 80]$ 、 $(80, 100]$ 分组，绘成频率分布直方图如图：



(1) 分别求出所抽取的 20 人中得分落在组 $[0, 20]$ 和 $(20, 40]$ 内的人数；

(2) 从所抽取的 20 人中得分落在组 $[0, 40]$ 的选手中随机选取 3 名选手，以 X 表示这 3 名选手中得分不超过 20 分的人数，求 X 的分布列和数学期望。

19. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 三内角 A 、 B 、 C 所对边的长分别为 a 、 b 、 c ，且 $3\sin^2 A + 3\sin^2 B = 4\sin A \sin B + 3\sin^2 C$ 。

(1) 求 $\cos C$ 的值；

(2) 若 $a=3$ ， $c=\sqrt{6}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

20. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求矩阵 N ；

(2) 求矩阵 N 的特征值。

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x \ln x$ ，函数 $g(x) = x + \frac{a}{x} - (\ln x)^2$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ ， x_0 是 $g(x)$ 的一个极值点，且 $g(x_0) = 2$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(2) 求实数 x_0 和 a 的值

(3) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

22. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2 \sin \theta$.

(1) 写出 C_1 的极坐标方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 已知点 M_1 、 M_2 的极坐标分别为 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $(2, 0)$, 直线 M_1M_2 与曲线 C_2 相交于 P , Q 两点, 射线 OP 与曲线 C_1 相交于点 A , 射线 OQ 与曲线 C_1 相交于点 B , 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

分析: 根据最低点, 判断 $A=3$, 根据对称中心与最低点的横坐标求得周期 T , 再代入最低点可求得解析式为

$f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 依次判断各选项的正确与否.

详解: 因为 $M\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 为对称中心, 且最低点为 $N\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$,

所以 $A=3$, 且 $T = 4 \times \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) = \pi$

由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

所以 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$, 将 $N\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$ 带入得

$\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{所以 } f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

由此可得①错误，②正确，③当 $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{35\pi}{12}$ 时， $0 \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 6\pi$ ，所以与 $y=1$ 有 6 个交点，设各个交点坐标

依次为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7\pi$ ，所以③正确

所以选 C

点睛：本题考查了根据条件求三角函数的解析式，通过求得的解析式进一步研究函数的性质，属于中档题。

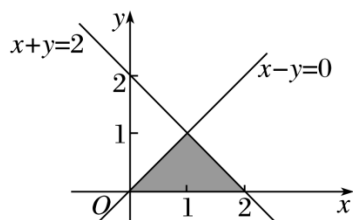
2、D

【解析】

作出 inequality 组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合即可得到结论。

【详解】

作出 inequality 组表示的平面区域如下图阴影部分所示，



$z = 2x + y$ 等价于 $y = -2x + z$ ，作直线 $y = -2x$ ，向上平移，

易知当直线经过点 $(2,0)$ 时 z 最大，所以 $z_{\max} = 2 \times 2 + 0 = 4$ ，故选 D。

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法。

3、B

【解析】

先求出双曲线的渐近线方程，可得则直线 $bx - ay + 2a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 d ，根据圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，可得 $d \geq 1$ ，解得即可。

【详解】

由题意，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

$\because P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，

则直线 $bx - ay + 4a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4a}{c}$ ，

∵圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则 $d \geq 1$ ，

$$\therefore \frac{4a}{c} \geq 1, \text{ 即 } e = \frac{c}{a} \leq 4, \text{ 又 } e > 1$$

故 e 的取值范围为 $(1, 4]$ ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了直线和双曲线的位置关系，以及两平行线间的距离公式，其中解答中根据圆与双曲线 C 的右支没有公共点得出 $d \geq 1$ 是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

4、D

【解析】

试题分析：由题意得：若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，则 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ；若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c}$ ，则由 $|\vec{a} \cdot \vec{c}| = |\vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{2} |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ 可知，

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，故 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ 也成立，故选D.

考点：平面向量数量积.

【思路点睛】几何图形中向量的数量积问题是近几年高考的又一热点，作为一类既能考查向量的线性运算、坐标运算、数量积及平面几何知识，又能考查学生的数形结合能力及转化与化归能力的问题，实有其合理之处.解决此类问题的常用方法是：①利用已知条件，结合平面几何知识及向量数量积的基本概念直接求解(较易)；②将条件通过向量的线性运算进行转化，再利用①求解(较难)；③建系，借助向量的坐标运算，此法对解含垂直关系的问题往往有很好效果.

5、B

【解析】

化简得到 $z = (3-i)(1+i) = 4+2i$ ，再计算模长得到答案.

【详解】

$$z = (3-i)(1+i) = 4+2i, \text{ 故 } |z| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了复数的运算，复数的模，意在考查学生的计算能力.

6、B

【解析】

由题意，框图的作用是求分段函数 $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$ 的值域，求解即得解.

【详解】

由题意可知，

框图的作用是求分段函数 $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$ 的值域，

当 $t \in [-2, 1), S \in [-4, 0)$;

当 $t \in [1, e^2], S \in [0, 2]$

综上: $S \in [-4, 2]$.

故选: B

【点睛】

本题考查了条件分支的程序框图，考查了学生逻辑推理，分类讨论，数学运算的能力，属于基础题.

7、D

【解析】

由指数函数的图像与性质易得 b 最小，利用作差法，结合对数换底公式及基本不等式的性质即可比较 a 和 c 的大小关系，进而得解.

【详解】

根据指数函数的图像与性质可知 $0 < b = \left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{13}{14}} < 1$,

由对数函数的图像与性质可知 $a = \log_{12} 13 > 1$, $c = \log_{13} 14 > 1$, 所以 b 最小;

而由对数换底公式化简可得 $a - c = \log_{12} 13 - \log_{13} 14$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lg 13}{\lg 12} - \frac{\lg 14}{\lg 13} \\ &= \frac{\lg^2 13 - \lg 12 \cdot \lg 14}{\lg 12 \cdot \lg 13} \end{aligned}$$

由基本不等式可知 $\lg 12 \cdot \lg 14 < \left[\frac{1}{2}(\lg 12 + \lg 14)\right]^2$, 代入上式可得

$$\begin{aligned}
& \frac{\lg^2 13 - \lg 12 \cdot \lg 14}{\lg 12 \cdot \lg 13} > \frac{\lg^2 13 - \left[\frac{1}{2} (\lg 12 + \lg 14) \right]^2}{\lg 12 \cdot \lg 13} \\
& = \frac{\lg^2 13 - \left(\frac{1}{2} \lg 168 \right)^2}{\lg 12 \cdot \lg 13} \\
& = \frac{\left(\lg 13 + \frac{1}{2} \lg 168 \right) \cdot \left(\lg 13 - \frac{1}{2} \lg 168 \right)}{\lg 12 \cdot \lg 13} \\
& = \frac{(\lg 13 + \lg \sqrt{168}) \cdot (\lg 13 - \lg \sqrt{168})}{\lg 12 \cdot \lg 13} > 0
\end{aligned}$$

所以 $a > c$,

综上可知 $a > c > b$,

故选: D.

【点睛】

本题考查了指数式与对数式的化简变形, 对数换底公式及基本不等式的简单应用, 作差法比较大小, 属于中档题.

8、D

【解析】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$, 利用导数分析出这两个函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数, 由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得出 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$, 分 $\alpha = 0$ 、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ 、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 三种情况讨论, 利用放缩法结合函数 $y = h(x)$ 的单调性推导出 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$ 或 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 再利用余弦函数的单调性可得出结论.

【详解】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$,

则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$, $f'(x) = \cos x - 2 < 0$,

所以, 函数 $y = f(x)$ 、 $y = h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 则 $h(x) > h(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$; 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $h(x) < 0$, $f(x) < 0$.

由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/348043060040006117>