

一、旋转

1. 操作与证明：如图 1，把一个含 45° 角的直角三角板 ECF 和一个正方形 $ABCD$ 摆放在一起，使三角板的直角顶点和正方形的顶点 C 重合，点 E 、 F 分别在正方形的边 CB 、 CD 上，连接 AF 。取 AF 中点 M ， EF 的中点 N ，连接 MD 、 MN 。

(1) 连接 AE ，求证： $\triangle AEF$ 是等腰三角形；

猜想与发现：

(2) 在 (1) 的条件下，请判断 MD 、 MN 的数量关系和位置关系，得出结论。

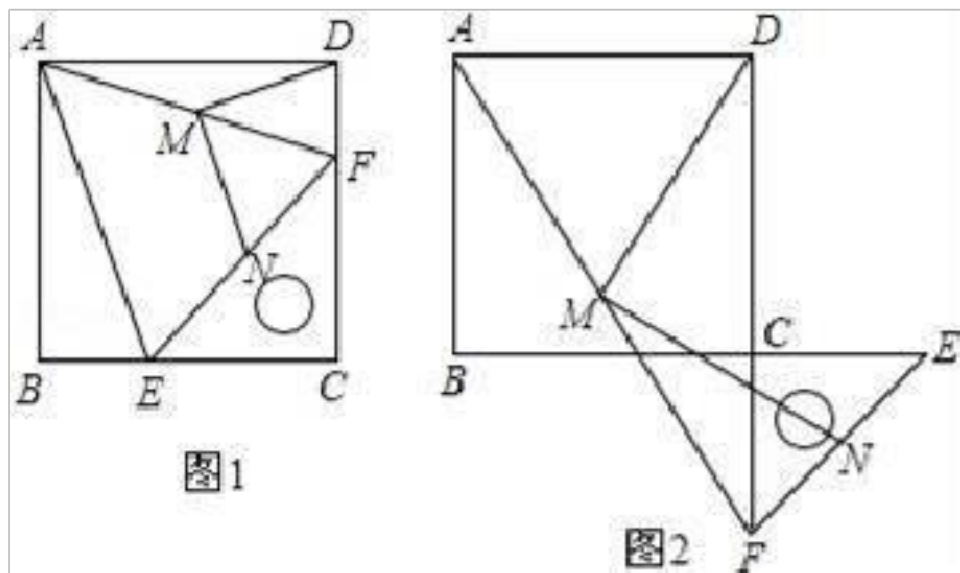
结论 1： DM 、 MN 的数量关系是；

结论 2： DM 、 MN 的位置关系是；

拓展与探究：

(3) 如图 2，将图 1 中的直角三角板 ECF 绕点 C 顺时针旋转 180° ，其他条件不变，则

(2) 中的两个结论还成立吗？若成立，请加以证明；若不成立，请说明理由。



【答案】(1) 证明参见解析；(2) 相等，垂直；(3) 成立，理由参见解析。

【解析】

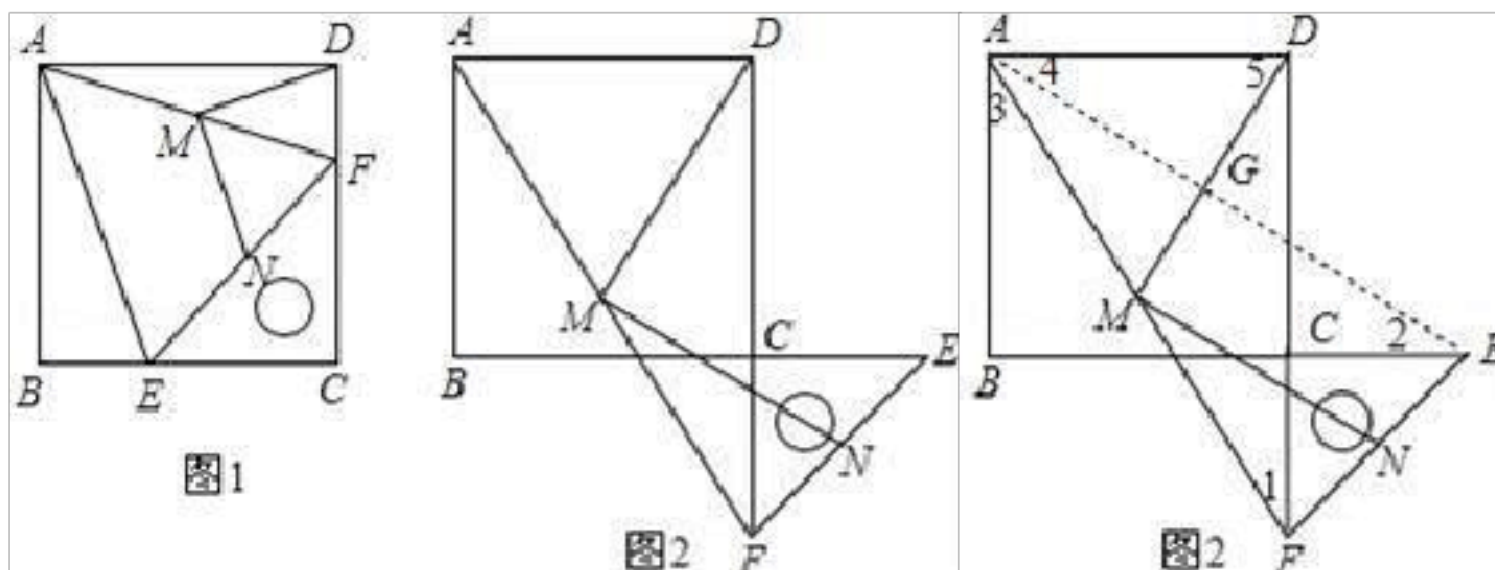
试题分析：(1) 根据正方形的性质以及等腰直角三角形的知识证明出 $CE=CF$ ，继而证明出 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，得到 $AE=AF$ ，从而证明出 $\triangle AEF$ 是等腰三角形；(2) DM 、 MN 的数量关系是相等，利用直角三角形斜边中线等于斜边一半和三角形中位线定理即可得出结论。位置关系是垂直，利用三角形外角性质和等腰三角形两个底角相等性质，及全等三角形对应角相等即可得出结论；(3) 成立，连接 AE ，交 MD 于点 G ，标记出各个角，首先证明出

$MN \parallel AE$ ， $MN = \frac{1}{2}AE$ ，利用三角形全等证出 $AE=AF$ ，而 $DM = \frac{1}{2}AF$ ，从而得到 DM ， MN 数量相等的结论，再利用三角形外角性质和三角形全等，等腰三角形性质以及角角之间的数量关系得到 $\angle DMN = \angle DGE = 90^\circ$ 。从而得到 DM 、 MN 的位置关系是垂直。

试题解析：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $\therefore AB=AD=BC=CD$ ， $\angle B=\angle ADF=90^\circ$ ， $\because \triangle CEF$ 是等腰直角三角形， $\angle C=90^\circ$ ， $\therefore CE=CF$ ， $\therefore BC-CE=CD-CF$ ，即 $BE=DF$ ， $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ ， $\therefore AE=AF$ ， $\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形；(2) DM 、 MN 的数量关系是相等， DM 、 MN 的位置关系是垂直； $\because$ 在 $Rt\triangle ADF$ 中 DM 是斜边 AF 的中线， $\therefore AF=2DM$ ， $\because MN$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线， $\therefore AE=2MN$ ， $\because AE=AF$ ， $\therefore DM=MN$ ； $\because \angle DMF = \angle DAF + \angle ADM$ ， $AM=MD$ ， $\therefore \angle FMN = \angle FAE$ ， $\angle DAF = \angle BAE$ ， $\therefore \angle ADM = \angle DAF = \angle BAE$ ，

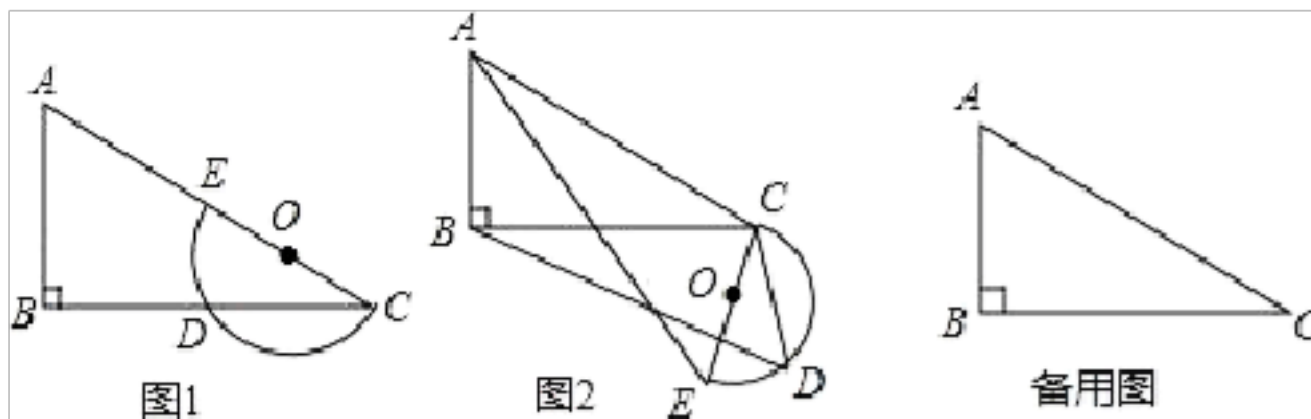
$\therefore \angle DMN = \angle FMN + \angle DMF = \angle DAF + \angle BAE + \angle FAE = \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore DM \perp MN$; (3) (2) 中的两个结论还成立, 连接 AE, 交 MD 于点 G, $\because$ 点 M 为 AF 的中点, 点 N 为 EF 的中点,

$\therefore MN \parallel AE$, $MN = \frac{1}{2}AE$, 由已知得, $AB=AD=BC=CD$, $\angle B = \angle ADF$, $CE=CF$, 又 $\because BC+CE=CD+CF$, 即 $BE=DF$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$, $\therefore AE=AF$, 在 $Rt\triangle ADF$ 中, $\because$ 点 M 为 AF 的中点, $\therefore DM = \frac{1}{2}AF$, $\therefore DM=MN$, $\because \triangle ABE \cong \triangle ADF$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\because AB \parallel DF$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$, 同理可证: $\angle 2 = \angle 4$, $\therefore \angle 3 = \angle 4$, $\because DM=AM$, $\therefore \angle MAD = \angle 5$, $\therefore \angle DGE = \angle 5 + \angle 4 = \angle MAD + \angle 3 = 90^\circ$, $\because MN \parallel AE$, $\therefore \angle DMN = \angle DGE = 90^\circ$, $\therefore DM \perp MN$. 所以 (2) 中的两个结论还成立.



考点: 1.正方形的性质; 2.全等三角形的判定与性质; 3.三角形中位线定理; 4.旋转的性质.

2. 平面上, $Rt\triangle ABC$ 与直径为 CE 的半圆 O 如图 1 摆放, $\angle B = 90^\circ$, $AC = 2CE = m$, $BC = n$, 半圆 O 交 BC 边于点 D, 将半圆 O 绕点 C 按逆时针方向旋转, 点 D 随半圆 O 旋转且 $\angle ECD$ 始终等于 $\angle ACB$, 旋转角记为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)



(1) 当 $\alpha = 0^\circ$ 时, 连接 DE, 则 $\angle CDE = \underline{\quad\quad}^\circ$, $CD = \underline{\quad\quad}$;

(2) 试判断: 旋转过程中 $\frac{BD}{AE}$ 的大小有无变化? 请仅就图 2 的情形给出证明;

(3) 若 $m = 10$, $n = 8$, 当 $\alpha = \angle ACB$ 时, 求线段 BD 的长;

(4) 若 $m = 6$, $n = 4\sqrt{2}$, 当半圆 O 旋转至与 $\triangle ABC$ 的边相切时, 直接写出线段 BD 的长.

【答案】 (1) 90° , $\frac{n}{2}$; (2) 无变化; (3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$; (4) $BD = 2\sqrt{10}$ 或 $\frac{2\sqrt{114}}{3}$.

【解析】

试题分析：（1）① 根据直径的性质，由 $DE \parallel AB$ 得 $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA}$ 即可解决问题．② 求出 BD 、 AE 即可解决问题．

（2）只要证明 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ 即可．

（3）求出 AB 、 AE ，利用 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ 即可解决问题．

（4）分类讨论：① 如图 5 中，当 $\alpha = 90^\circ$ 时，半圆与 AC 相切，② 如图 6 中，当 $\alpha = 90^\circ \angle ACB$ 时，半圆与 BC 相切，分别求出 BD 即可．

试题解析：（1）解：① 如图 1 中，当 $\alpha = 0^\circ$ 时，连接 DE ，则

$\angle CDE = 90^\circ$ ． $\because \angle CDE = \angle B = 90^\circ$ ， $\therefore DE \parallel AB$ ， $\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$ ． $\because BC = n$ ， $\therefore CD = \frac{1}{2}n$ ．故答

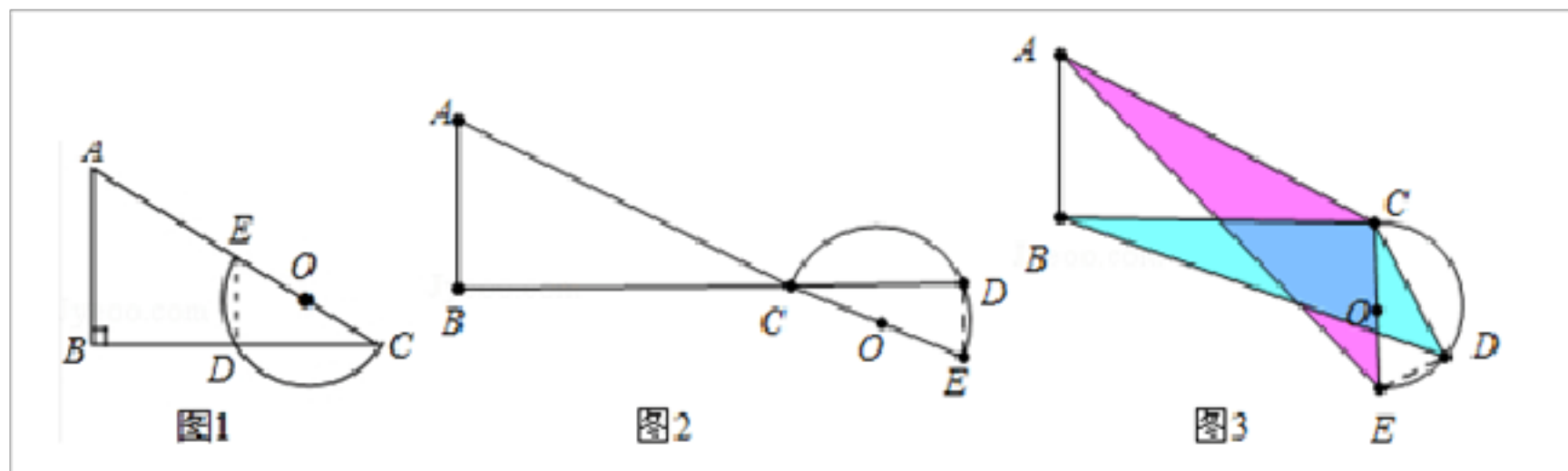
案为 90° ， $\frac{1}{2}n$ ．

② 如图 2 中，当 $\alpha = 180^\circ$ 时， $BD = BC + CD = \frac{3}{2}n$ ， $AE = AC + CE = \frac{3}{2}m$ ， $\therefore \frac{BD}{AE} = \frac{n}{m}$ ．故答案为

$\frac{n}{m}$ ．

（2）如图 3 中， $\because \angle ACB = \angle DCE$ ， $\therefore \angle ACE = \angle BCD$ ． $\because \frac{CD}{CE} = \frac{BC}{AC} = \frac{n}{m}$ ，

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BCD$ ， $\therefore \frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{n}{m}$ ．



（3）如图 4 中，当 $\alpha \neq \angle ACB$ 时．在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\because AC = 10$ ， $BC = 8$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6$ ．在 $Rt\triangle ABE$ 中， $\because AB = 6$ ， $BE = BC - CE = 3$ ，

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ ，由（2）可知 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ ， $\therefore \frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AC}$ ，

$\therefore \frac{BD}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{10}$ ， $\therefore BD = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ．故答案为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ．

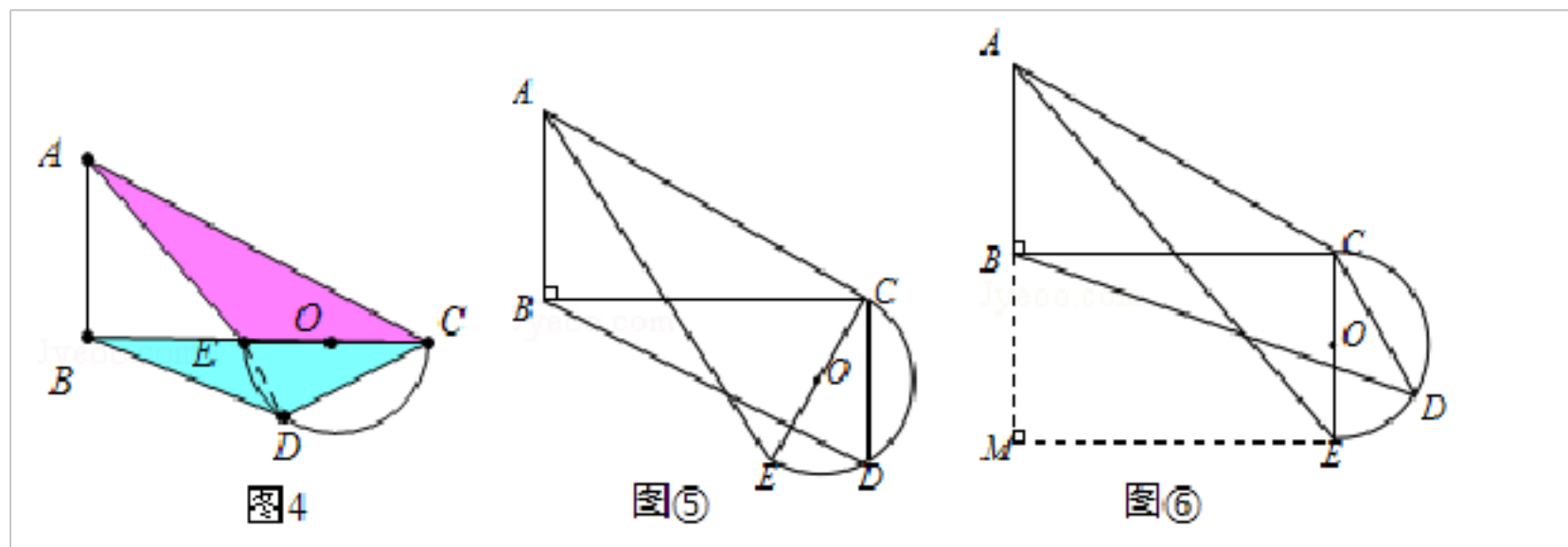
（4） $\because m = 6$ ， $n = 4\sqrt{2}$ ， $\therefore CE = 3$ ， $CD = 2\sqrt{2}$ ， $AB = \sqrt{CA^2 - BC^2} = 2$ ，① 如图 5 中，当 $\alpha = 90^\circ$ 时，半圆与 AC 相切．在 $Rt\triangle DBC$ 中， $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$ ．

② 如图 6 中，当 $\alpha = 90^\circ \angle ACB$ 时，半圆与 BC 相切，作 $EM \perp AB$ 于

M ． $\because \angle M = \angle CBM = \angle BCE = 90^\circ$ ， $\therefore$ 四边形 $BCME$ 是矩形， $\therefore BM = EC = 3$ ， $ME = 4\sqrt{2}$ ，

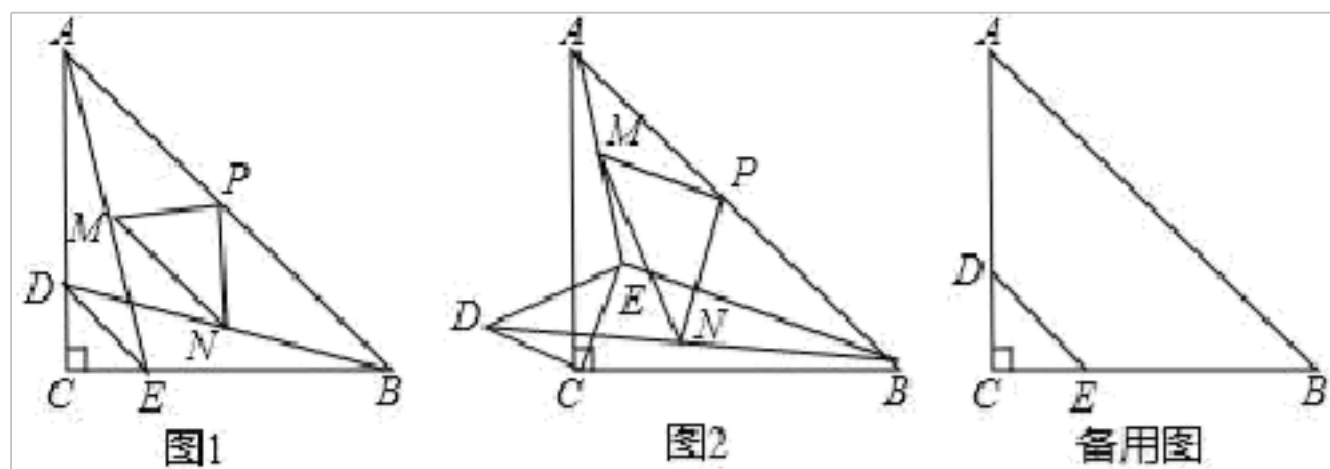
$\therefore AM = 5$, $AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \sqrt{57}$, 由 (2) 可知 $\frac{DB}{AE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\therefore BD = \frac{2\sqrt{114}}{3}$.

故答案为 $2\sqrt{10}$ 或 $\frac{2\sqrt{114}}{3}$.



点睛：本题考查了圆的有关知识，相似三角形的判定和性质、勾股定理等知识，正确画出图形是解决问题的关键，学会分类讨论的思想，本题综合性比较强，属于中考压轴题。

3. 如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$. 点 D 、 E 分别在 AC 、 BC 边上， $DC = EC$ ，连接 DE 、 AE 、 BD . 点 M 、 N 、 P 分别是 AE 、 BD 、 AB 的中点，连接 PM 、 PN 、 MN .



(1) PM 与 BE 的数量关系是_____， BE 与 MN 的数量关系是_____.

(2) 将 $\triangle DEC$ 绕点 C 逆时针旋转到如图 2 的位置，判断 (1) 中 BE 与 MN 的数量关系结论是否仍然成立，如果成立，请写出证明过程，若不成立，请说明理由；

(3) 若 $CB = 6$ ， $CE = 2$ ，在将图 1 中的 $\triangle DEC$ 绕点 C 逆时针旋转一周的过程中，当 B 、 E 、 D 三点在一条直线上时，求 MN 的长度.

【答案】 (1) $PM = \frac{1}{2}BE$, $BE = \sqrt{2}MN$; (2) 成立，理由见解析； (3) $MN = \sqrt{17} - 1$ 或 $\sqrt{17} + 1$

【解析】

【分析】

(1) 如图 1 中，只要证明 $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形，再利用三角形的中位线定理即可解决问题；

(2) 如图 2 中，结论仍然成立，连接 AD 、延长 BE 交 AD 于点 H . 由 $\triangle ECB \cong \triangle DCA$ ，推出 $BE \perp AD$ ， $\angle DAC = \angle EBC$ ，即可推出 $BH \perp AD$ ，由 M 、 N 、 P 分别 AE 、

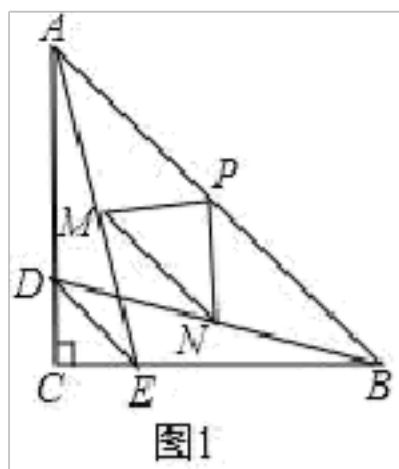
BD、AB 的中点，推出 $PM \parallel BE$ ， $PM = \frac{1}{2}BE$ ， $PN \parallel AD$ ， $PN = \frac{1}{2}AD$ ，推出

$PM = PN$ ， $\angle MPN = 90^\circ$ ，可得 $BE = 2PM = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}MN = \sqrt{2}MN$ ；

(3) 有两种情形分别求解即可.

【详解】

(1) 如图 1 中，



$\because AM = ME$ ， $AP = PB$ ，

$\therefore PM \parallel BE$ ， $PM = \frac{1}{2}BE$ ，

$\because BN = DN$ ， $AP = PB$ ，

$\therefore PN \parallel AD$ ， $PN = \frac{1}{2}AD$ ，

$\because AC = BC$ ， $CD = CE$ ，

$\therefore AD = BE$ ，

$\therefore PM = PN$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore AC \perp BC$ ，

$\therefore PM \parallel BC$ ， $PN \parallel AC$ ，

$\therefore PM \perp PN$ ，

$\therefore \triangle PMN$ 的等腰直角三角形，

$\therefore MN = \sqrt{2}PM$ ，

$\therefore MN = \sqrt{2} \times \frac{1}{2}BE$ ，

$\therefore BE = \sqrt{2}MN$ ，

故答案为 $PM = \frac{1}{2}BE$ ， $BE = \sqrt{2}MN$ 。

(2) 如图 2 中，结论仍然成立.

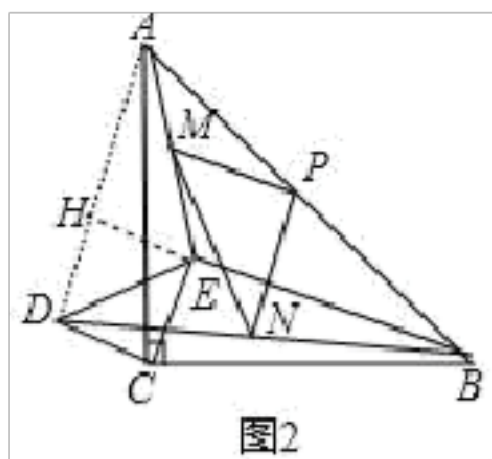


图2

理由：连接 AD、延长 BE 交 AD 于点 H.

∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形，

∴ $CD = CE$, $CA = CB$, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$,

∴ $\angle ACB - \angle ACE = \angle DCE - \angle ACE$,

∴ $\angle ACD = \angle ECB$,

∴ $\triangle ECB \cong \triangle DCA$,

∴ $BE = AD$, $\angle DAC = \angle EBC$,

∴ $\angle AHB = 180^\circ - (\angle HAB + \angle ABH)$

$= 180^\circ - (45^\circ + \angle HAC + \angle ABH)$

$= 180^\circ - (45^\circ + \angle HBC + \angle ABH)$

$= 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ$,

∴ $BH \perp AD$,

∵ M、N、P 分别为 AE、BD、AB 的中点，

∴ $PM \parallel BE$, $PM = \frac{1}{2}BE$, $PN \parallel AD$, $PN = \frac{1}{2}AD$,

∴ $PM = PN$, $\angle MPN = 90^\circ$,

∴ $BE = 2PM = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}MN = \sqrt{2}MN$.

(3) ① 如图 3 中，作 $CG \perp BD$ 于 G，则 $CG = GE = DG = \sqrt{2}$,

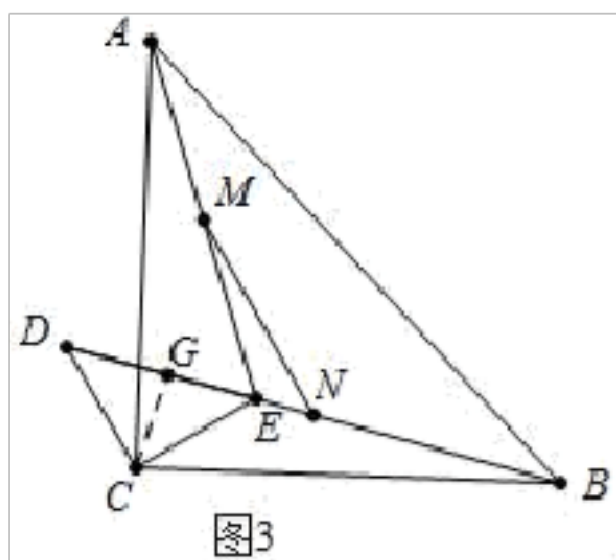


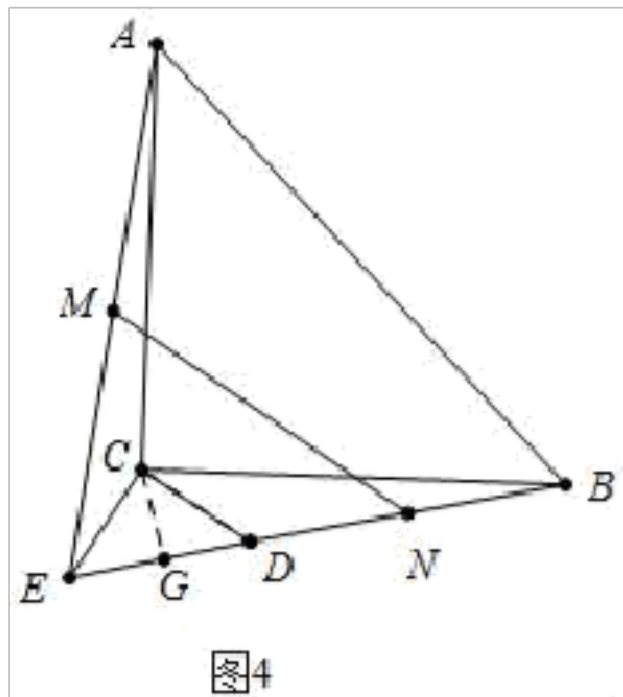
图3

当 D、E、B 共线时，在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中， $BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}$,

∴ $BE = BG - GE = \sqrt{34} - \sqrt{2}$,

$$\therefore MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BE = \sqrt{17} - 1.$$

② 如图 4 中，作 $CG \perp BD$ 于 G ，则 $CG = GE = DG = \sqrt{2}$ ，



当 D, E, B 共线时，在 $Rt\triangle BCG$ 中， $BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{34}$ ，

$$\therefore BE = BG + GE = \sqrt{34} + \sqrt{2},$$

$$\therefore MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BE = \sqrt{17} + 1.$$

综上所述， $MN = \sqrt{17} - 1$ 或 $\sqrt{17} + 1$.

【点睛】

本题属于几何变换综合题，考查了等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

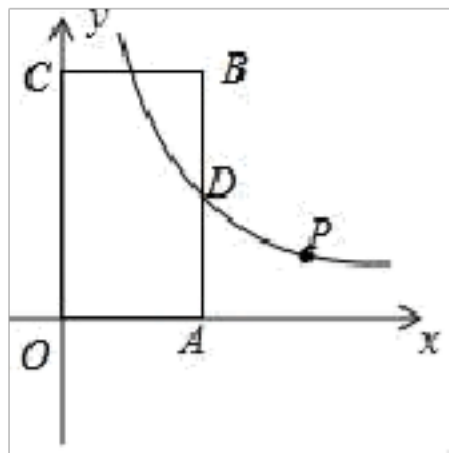
4. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴正半轴上，顶点 C 在 y 轴正半轴上，点 B 的坐标为 $(4, m)$ ($5 \leq m \leq 7$)，反比例函数 $y = \frac{16}{x}$ ($x > 0$) 的图象交边 AB 于点 D .

(1) 用 m 的代数式表示 BD 的长；

(2) 设点 P 在该函数图象上，且它的横坐标为 m ，连结 PB, PD

① 记矩形 $OABC$ 面积与 $\triangle PBD$ 面积之差为 S ，求当 m 为何值时， S 取到最大值；

② 将点 D 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到点 E ，当点 E 恰好落在 x 轴上时，求 m 的值.



【答案】 (1) $BD = m - 4$ (2) ① $m = 7$ 时, S 取到最大值 ② $m = 2 + 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

(1) 先确定出点 D 横坐标为 4, 代入反比例函数解析式中求出点 D 横坐标, 即可得出结论;

(2) ① 先求出矩形 $OABC$ 的面积和三角形 PBD 的面积得出 $S = -\frac{1}{2}(m-8)^2 + 24$, 即可得出结论; ② 利用一线三直角判断出 $DG = PF$, 进而求出点 P 的坐标, 即可得出结论.

【详解】

解: (1) $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$\therefore AB \perp x$ 轴上,

$\because$ 点 $B(4, m)$,

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 4,

$\because$ 点 D 在反比例函数 $y = \frac{16}{x}$ 上,

$\therefore D(4, 4)$,

$\therefore BD = m - 4$;

(2) ① 如图 1, $\because$ 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(4, m)$,

$\therefore S_{\text{矩形 } OABC} = 4m$,

由 (1) 知, $D(4, 4)$,

$\therefore S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2}(m-4)(m-4) = \frac{1}{2}(m-4)^2$,

$\therefore S = S_{\text{矩形 } OABC} - S_{\triangle PBD} = 4m - \frac{1}{2}(m-4)^2 = -\frac{1}{2}(m-8)^2 + 24$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $m = 8$,

$\because a < 0, 5 \leq m \leq 7$

$\therefore m = 7$ 时, S 取到最大值;

② 如图 2, 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于 F , 过点 D 作 $DG \perp FP$ 交 FP 的延长线于 G ,

$\therefore \angle DGP = \angle PFE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPG + \angle PDG = 90^\circ$,

由旋转知, $PD = PE, \angle DPE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPG + \angle EPF = 90^\circ$,

$\therefore \angle PDG = \angle EPF$,

$\therefore \triangle PDG \cong \triangle EPF$ (AAS),

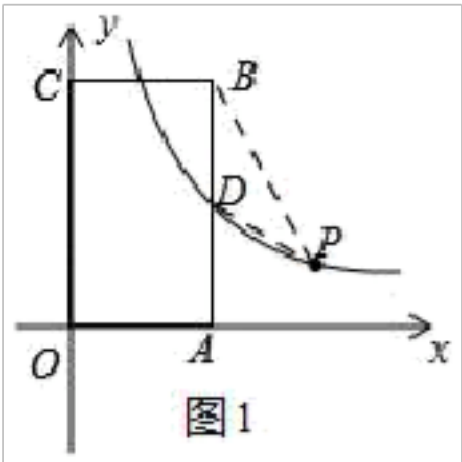
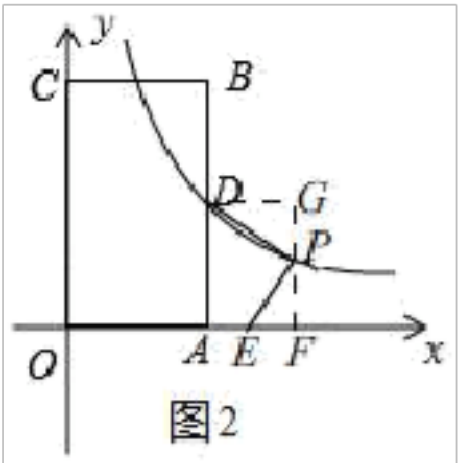
$\therefore DG = PF$,

$\because DG = AF = m - 4$,

$\therefore P(m, m - 4)$,

$\because$ 点 P 在反比例函数 $y = \frac{16}{x}$,

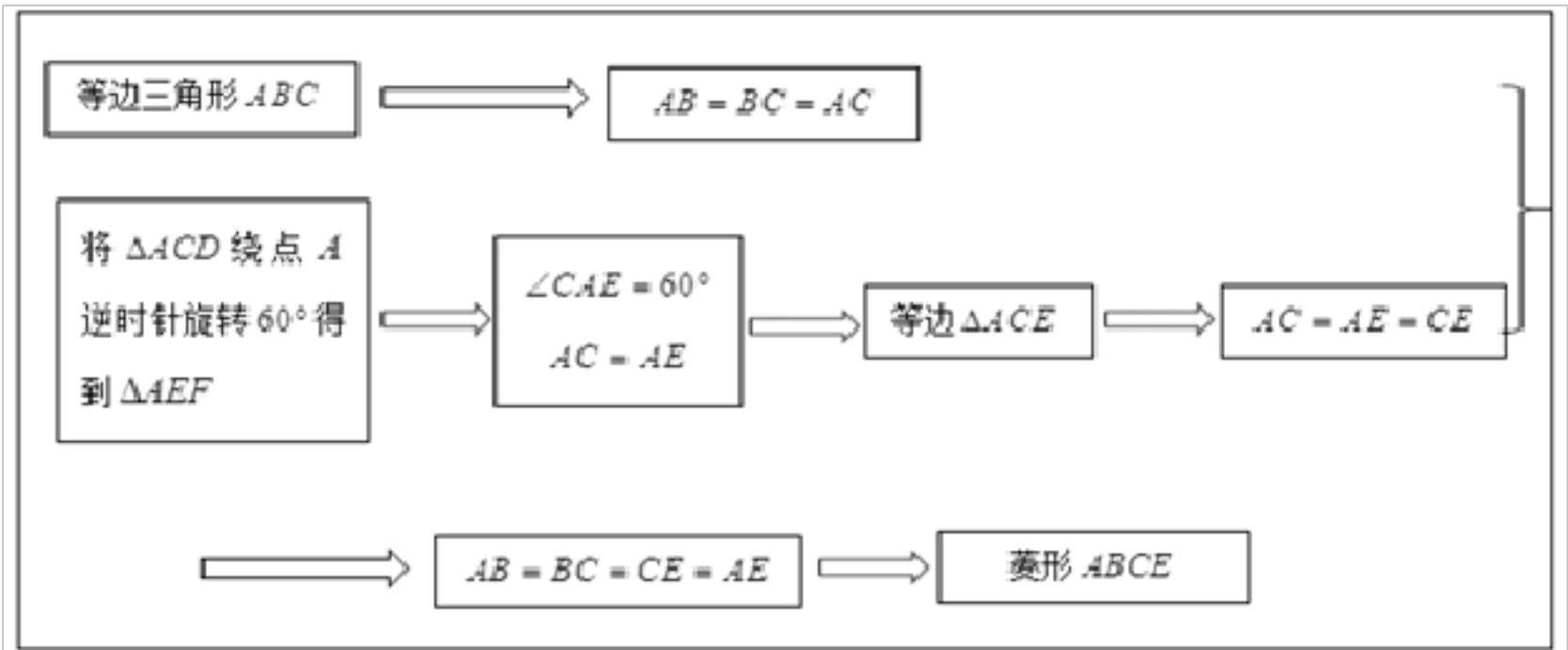
$\therefore m(m-4)=16,$
 $\therefore m=2+2\sqrt{5}$ 或 $m=2-2\sqrt{5}$ (舍).



【点睛】
 此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，矩形的性质，三角形的面积公式，全等三角形的判定，构造出全等三角形是解本题的关键．

5. （探索发现）

如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 为 BC 边上一个动点，将 $\triangle ACD$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AEF$ ，连接 CE .小明在探索这个问题时发现四边形 $ABCE$ 是菱形.
 小明是这样想的：



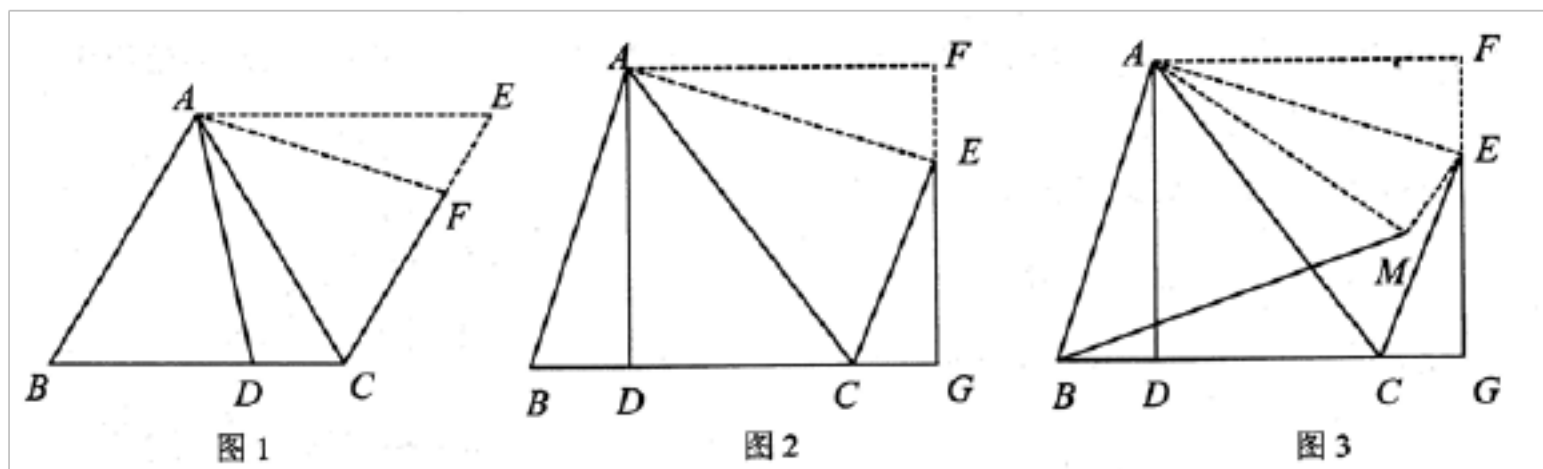
- (1) 请参考小明的思路写出证明过程；
 (2) 直接写出线段 CD ， CF ， AC 之间的数量关系：_____；
 （理解运用）

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点 D .将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle AEF$ ，延长 FE 与 BC ，交于点 G .

(3) 判断四边形 ADGF 的形状，并说明理由；

(拓展迁移)

(4) 在 (3) 的前提下，如图，将 AFE 沿 AE 折叠得到 AME，连接 MB，若 AD = 6，BD = 2，求 MB 的长.



【答案】 (1) 详见解析； (2) $CD = CF = AC$ ； (3) 四边形 ADGF 是正方形； (4) $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

(1) 根据旋转得：△ACE 是等边三角形，可得：AB=BC=CE=AE，则四边形 ABCE 是菱形；

(2) 先证明 C、F、E 在同一直线上，再证明△BAD ≌ △CAF (SAS)，则 ∠ADB = ∠AFC，BD=CF，可得 AC=CF+CD；

(3) 先根据 ∠ADC = ∠DAF = ∠F = 90°，证明得四边形 ADGF 是矩形，由邻边相等可得四边形 ADGF 是正方形；

(4) 证明△BAM ≌ △EAD (SAS)，根据 BM=DE 及勾股定理可得结论.

【详解】

(1) 证明：∵ △ABC 是等边三角形，

∴ AB = BC = AC.

∵ △ACD 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 △AEF，

∴ ∠CAE = 60°，AC = AE.

∴ △ACE 是等边三角形.

∴ AC = AE = CE.

∴ AB = BC = CE = AE.

∴ 四边形 ABCE 是菱形.

(2) 线段 DC，CF，AC 之间的数量关系：CD = CF = AC.

(3) 四边形 ADGF 是正方形.理由如下：

∵ Rt △ABD 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 △AEF，

∴ AF = AD，∠DAF = 90°.

∵ AD = BC，

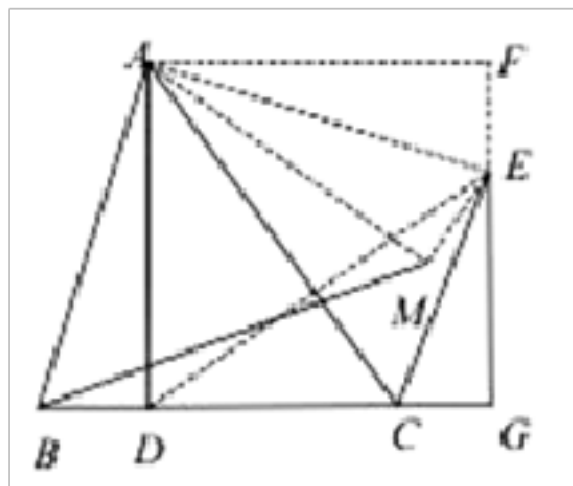
∴ ∠ADC = ∠DAF = ∠F = 90°.

∴ 四边形 ADGF 是矩形.

∵ AF = AD，

∴ 四边形 ADGF 是正方形.

(4) 如图, 连接 DE .



∵ 四边形 ADGF 是正方形,

∴ $DG = FG = AD = AF = 6$.

∵ $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle AEF$,

∴ $\angle BAD = \angle EAF$, $BD = EF = 2$, ∴ $EG = FG - EF = 6 - 2 = 4$.

∵ 将 $\triangle AFE$ 沿 AE 折叠得到 $\triangle AME$,

∴ $\angle MAE = \angle FAE$, $AF = AM$.

∴ $\angle BAD = \angle EAM$.

∴ $\angle BAD + \angle DAM = \angle EAM + \angle DAM$, 即 $\angle BAM = \angle DAE$.

∵ $AF = AD$,

∴ $AM = AD$.

$AM = AD$

在 $\triangle BAM$ 和 $\triangle EAD$ 中, $\angle BAM = \angle DAE$,

$AB = AE$

∴ $\triangle BAM \cong \triangle EAD$ (SAS).

∴ $BM = DE = \sqrt{EG^2 + DG^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

【点睛】

本题属于四边形综合题, 主要考查了旋转的性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、正方形的性质以及勾股定理的综合应用, 解决问题的关键是熟练掌握等边三角形和全等三角形的性质, 依据图形的性质进行计算求解.

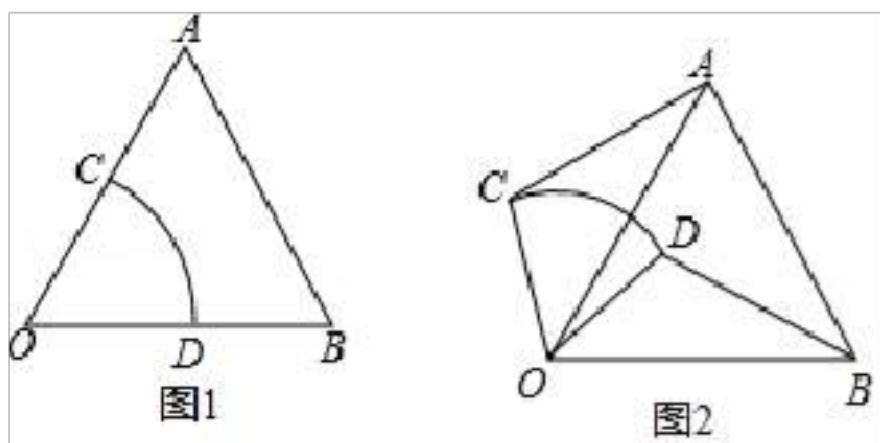
6. 在等边 $\triangle AOB$ 中, 将扇形 COD 按图 1 摆放, 使扇形的半径 OC、OD 分别与 OA、OB 重合, $OA = OB = 2$, $OC = OD = 1$, 固定等边 $\triangle AOB$ 不动, 让扇形 COD 绕点 O 逆时针旋转, 线段 AC、BD 也随之变化, 设旋转角为 α . ($0 < \alpha \leq 360^\circ$)

(1) 当 $OC \parallel AB$ 时, 旋转角 $\alpha =$ _____ 度;

发现: (2) 线段 AC 与 BD 有何数量关系, 请仅就图 2 给出证明.

应用: (3) 当 A、C、D 三点共线时, 求 BD 的长.

拓展: (4) P 是线段 AB 上任意一点, 在扇形 COD 的旋转过程中, 请直接写出线段 PC 的最大值与最小值.



【答案】 (1) 60 或 240; (2) $AC=BD$ 理由见解析; (3) $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$; (4) PC 的

最大值=3, PC 的最小值= $\sqrt{3}-1$.

【解析】

分析: (1) 如图 1 中, 易知当点 D 在线段 AD 和线段 AD 的延长线上时, $OC \parallel AB$, 此时旋转角 $\alpha = 60^\circ$ 或 240° .

(2) 结论: $AC=BD$. 只要证明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ 即可.

(3) 在图 3、图 4 中, 分别求解即可.

(4) 如图 5 中, 由题意, 点 C 在以 O 为圆心, 1 为半径的 $\odot O$ 上运动, 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H, 直线 OH 交 $\odot O$ 于 C' 、 C'' , 线段 CB 的长即为 PC 的最大值, 线段 $C'H$ 的长即为 PC 的最小值. 易知 PC 的最大值=3, PC 的最小值= $\sqrt{3}-1$.

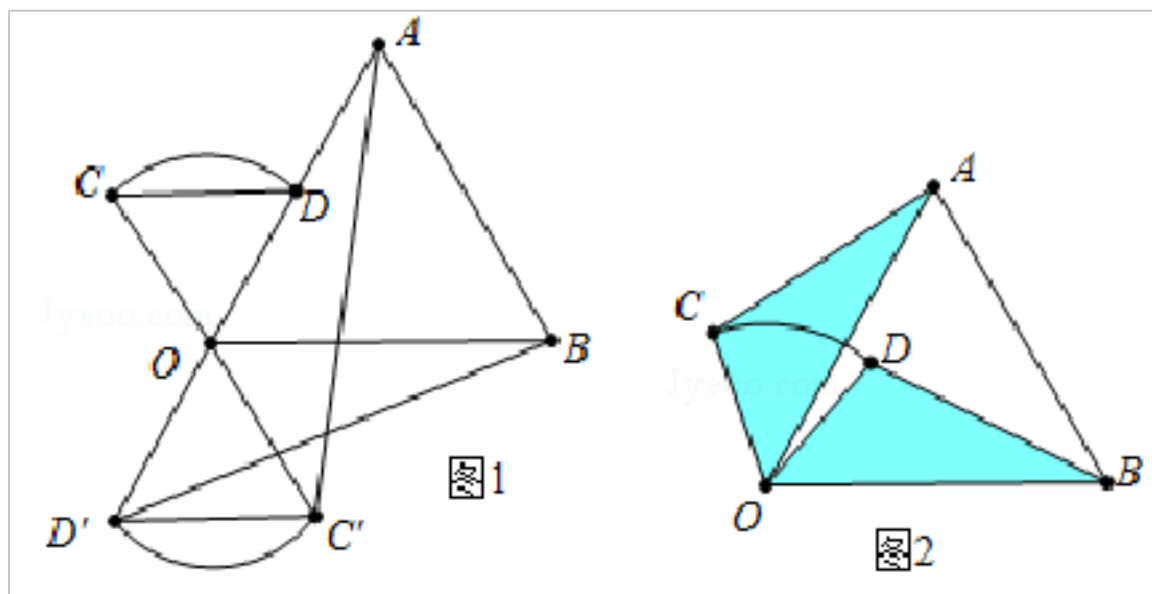
详解: (1) 如图 1 中, $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle AOB = \angle COD = 60^\circ$, $\therefore$ 当点 D 在线段 AD 和线段 AD 的延长线上时, $OC \parallel AB$, 此时旋转角 $\alpha = 60^\circ$ 或 240° .

故答案为 60 或 240;

(2) 结论: $AC=BD$, 理由如下:

如图 2 中, $\because \angle COD = \angle AOB = 60^\circ$, $\therefore \angle COA = \angle DOB$. 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中,

$OA = OB$
 $\angle COA = \angle DOB$, $\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD$, $\therefore AC=BD$;
 $OC = OD$

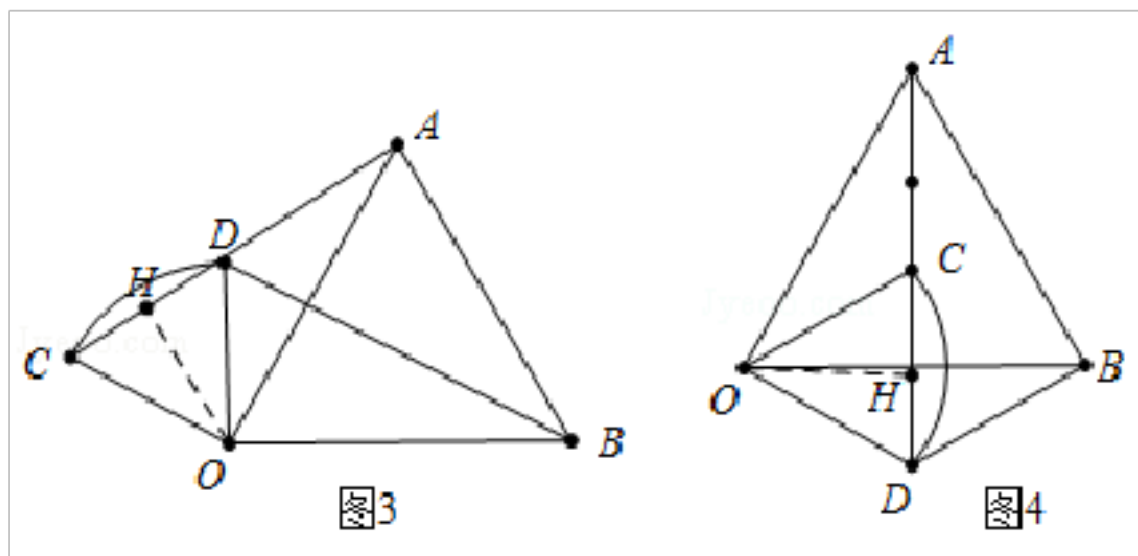


(3) ① 如图 3 中, 当 A、C、D 共线时, 作 $OH \perp AC$ 于 H.

在 $Rt\triangle COH$ 中, $\because OC=1$, $\angle COH = 30^\circ$, $\therefore CH=HD = \frac{1}{2}$, $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 在 $Rt\triangle AOH$ 中,

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \therefore BD = AC = CH + AH = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

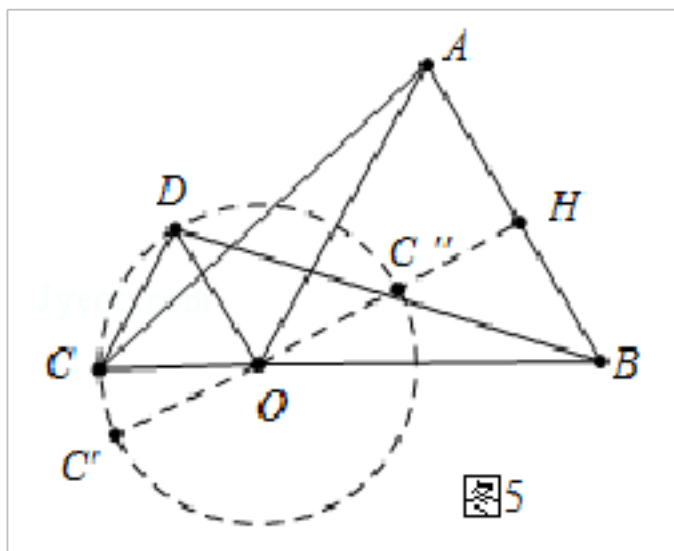
如图4中，当A、C、D共线时，作OH⊥AC于H.



$$\text{易知 } AC = BD = AH - CH = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}.$$

综上所述：当A、C、D三点共线时，BD的长为 $\frac{\sqrt{13} - 1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{13} + 1}{2}$ ；

(4) 如图5中，由题意，点C在以O为圆心，1为半径的⊙O上运动，过点O作OH⊥AB于H，直线OH交⊙O于C'、C''，线段CB的长即为PC的最大值，线段C'H的长即为PC的最小值. 易知PC的最大值=3，PC的最小值= $\sqrt{3} - 1$.



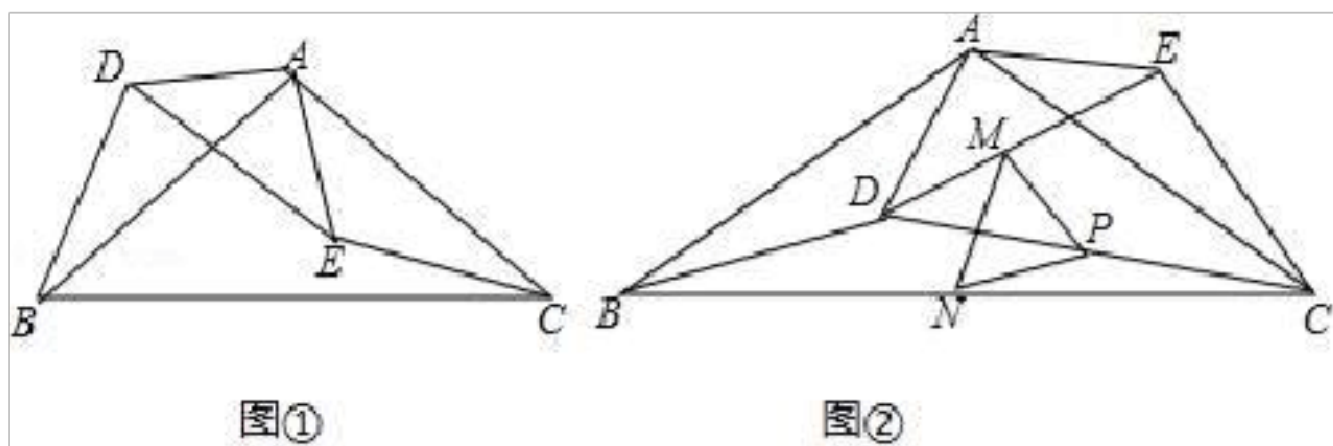
点睛：本题考查了圆综合题、旋转变换、等边三角形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、圆上的点到直线的距离的最值问题等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，利用辅助圆解决最值问题，属于中考压轴题.

7. 如图①，在等腰△ABC和△ADE中，AB=AC，AD=AE，且∠BAC=∠DAE=120°.

(1) 求证：△ABD≌△ACE；

(2) 把△ADE绕点A逆时针方向旋转到图②的位置，连接CD，点M、P、N分别为DE、DC、BC的中点，连接MN、PN、PM，判断△PMN的形状，并说明理由；

(3) 在(2)中，把△ADE绕点A在平面内自由旋转，若AD=4，AB=6，请分别求出△PMN周长的最小值与最大值.



【答案】（1）证明见解析；（2） $\triangle PMN$ 是等边三角形．理由见解析；（3） $\triangle PMN$ 周长的最小值为 3，最大值为 15．

【解析】

分析：（1）由 $\angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$ ，可得 $\angle BAD = \angle CAE$ ，再由 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，利用 SAS 即可判定 $\triangle ABD \cong \triangle ADE$ ；（2） $\triangle PMN$ 是等边三角形，利用三角形的中位线定理可得

$$PM = \frac{1}{2} CE, PM \parallel CE, PN = \frac{1}{2} BD, PN \parallel BD, \text{同 (1) 的方法可得 } BD = CE, \text{即可得 } PM = PN, \text{所以}$$

$\triangle PMN$ 是等腰三角形；再由 $PM \parallel CE, PN \parallel BD$ ，根据平行线的性质可得 $\angle DPM = \angle DCE$ ， $\angle PNC = \angle DBC$ ，因为 $\angle DPN = \angle DCB + \angle PNC = \angle DCB + \angle DBC$ ，所以

$$\angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCE + \angle DCB + \angle DBC = \angle BCE + \angle DBC = \angle ACB + \angle ACE + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABD + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABC, \text{再由 } \angle BAC = 120^\circ, \text{可得 } \angle ACB + \angle ABC = 60^\circ, \text{即可得}$$

$\angle MPN = 60^\circ$ ，所以 $\triangle PMN$ 是等边三角形；（3）由（2）知， $\triangle PMN$ 是等边三角形，

$$PM = PN = \frac{1}{2} BD, \text{所以当 } PM \text{ 最大时, } \triangle PMN \text{ 周长最大, 当点 } D \text{ 在 } AB \text{ 上时, } BD \text{ 最小, } PM$$

最小，求得此时 BD 的长，即可得 $\triangle PMN$ 周长的最小值；当点 D 在 BA 延长线上时， BD 最大， PM 的值最大，此时求得 $\triangle PMN$ 周长的最大值即可．

详解：

（1）因为 $\angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$ ，
所以 $\angle BAD = \angle CAE$ ，又 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，
所以 $\triangle ABD \cong \triangle ADE$ ；

（2） $\triangle PMN$ 是等边三角形．

理由： $\because$ 点 P, M 分别是 CD, DE 的中点，

$$\therefore PM = \frac{1}{2} CE, PM \parallel CE,$$

$\because$ 点 N, M 分别是 BC, DE 的中点，

$$\therefore PN = \frac{1}{2} BD, PN \parallel BD,$$

同（1）的方法可得 $BD = CE$ ，

$$\therefore PM = PN,$$

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰三角形，

$$\because PM \parallel CE, \therefore \angle DPM = \angle DCE,$$

$$\because PN \parallel BD, \therefore \angle PNC = \angle DBC,$$

$$\because \angle DPN = \angle DCB + \angle PNC = \angle DCB + \angle DBC,$$

$\therefore \angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCE + \angle DCB + \angle DBC = \angle BCE + \angle DBC$
 $= \angle ACB + \angle ACE + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABD + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABC$,
 $\because \angle BAC = 120^\circ$, $\therefore \angle ACB + \angle ABC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle MPN = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形.

(3) 由(2)知, $\triangle PMN$ 是等边三角形, $PM = PN = \frac{1}{2} BD$,

$\therefore PM$ 最大时, $\triangle PMN$ 周长最大,

$\therefore$ 点 D 在 AB 上时, BD 最小, PM 最小,

$\therefore BD = AB - AD = 2$, $\triangle PMN$ 周长的最小值为 3;

点 D 在 BA 延长线上时, BD 最大, PM 最大,

$\therefore BD = AB + AD = 10$, $\triangle PMN$ 周长的最大值为 15.

故答案为 $\triangle PMN$ 周长的最小值为 3, 最大值为 15

点睛: 本题主要考查了全等三角形的判定及性质、三角形的中位线定理、等边三角形的判定, 解决第(3)问, 要明确点 D 在 AB 上时, BD 最小, PM 最小, $\triangle PMN$ 周长的最小; 点 D 在 BA 延长线上时, BD 最大, PM 最大, $\triangle PMN$ 周长的最大值为 15.

8. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, 边 AB 在射线 OM 上, 且 $OA = 6$, 点 D 是射线 OM 上的动点, 当点 D 不与点 A 重合时, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BCE$, 连接 DE .

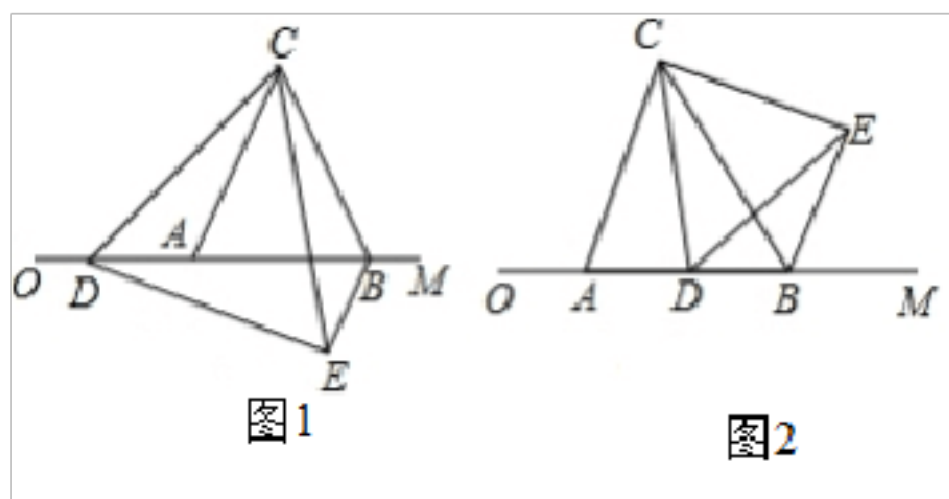
(1) 如图 1, 猜想: $\triangle CDE$ 的形状是_____三角形.

(2) 请证明(1)中的猜想

(3) 设 $OD = m$,

① 当 $6 < m < 10$ 时, $\triangle BDE$ 的周长是否存在最小值? 若存在, 求出 $\triangle BDE$ 周长的最小值; 若不存在, 请说明理由.

② 是否存在 m 的值, 使 $\triangle DEB$ 是直角三角形, 若存在, 请直接写出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



【答案】(1) 等边; (2) 详见解析; (3) ① $2\sqrt{3} + 4$; ② 当 $m = 2$ 或 14 时, 以 D 、 E 、 B 为顶点的三角形是直角三角形.

【解析】

【分析】

(1) 由旋转的性质猜想结论;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/348045005064006135>