第5章-均匀平面波在无界媒质中的传播

本章内容

5.1 理想介质中的均匀平面波

5.2 电磁波的极化

5.3 导电媒质中的均匀平面波

需要分析的问题

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

时谐电磁波的分析

场量随空间位置变化的规律

场量随时间变化的规律

√ 平面波
柱面波
√ 球面波　（8章）
（固定时刻的复矢量函数）

√ 线极化波
√ 圆极化波
√ 椭圆极化波
（固定位置的瞬时变化）

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_c^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

理想介质

$$\sigma = 0$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta$$

导电媒质

$$\sigma \neq 0$$

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - j\alpha$$

均匀平面波的定义

- 波阵面：空间相位相同的点所构成的曲面，即等相位面
- 平面波：任意时刻等相位面（波阵面）为平面的波
- 均匀：电磁场的振幅在等相位面上不变
- 均匀平面波

电磁波的场矢量只沿传播方向变化，在与传播方向垂直的无限大平面内，电场和磁场的方向、振幅和相位都保持不变

特　性

- 在等相位面上电场复矢量为常矢数 $\vec{E}(\vec{r})\big|_{\text{等相位面}} = \vec{C}$
- 任一时刻等相位面上电磁场的大小和方向不变

问题：等相位面上均匀平面波在不同时刻的电磁场也不变吗？

5.1 理想介质中的均匀平面波

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

5.1.1 一维波动方程的均匀平面波解

设在无限大的无源空间中，充满线性、各向同性的均匀理想介质。均匀平面波沿 z 轴传播，则电场强度和磁场强度均不是 x 和 y 的函数，即

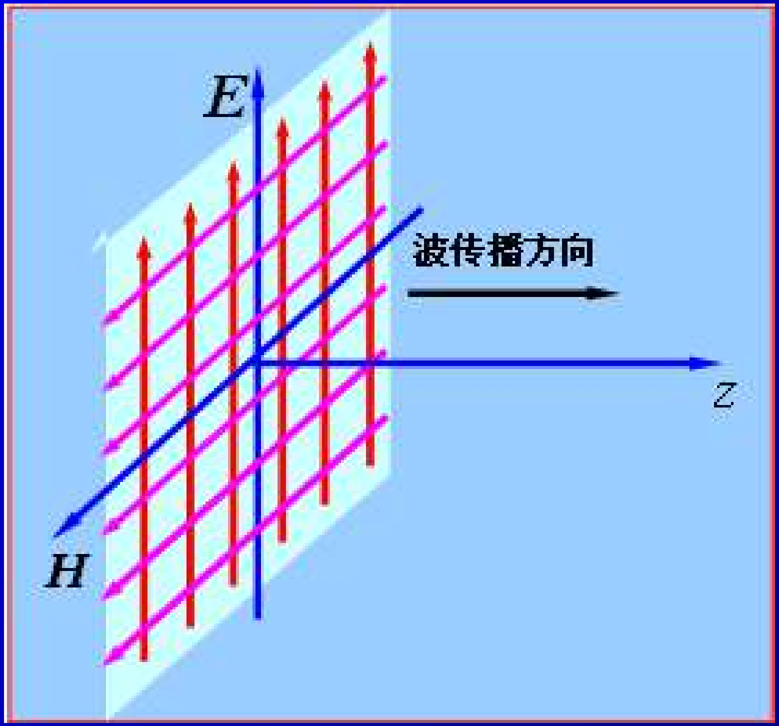
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}=\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x}=\frac{\partial \vec{H}}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}+k^2\vec{E}=0\,,\quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}+k^2\vec{H}=0$$

由于 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Rightarrow E_z=0$

同理 $\nabla\cdot\vec{H}=\dfrac{\partial H_x}{\partial x}+\dfrac{\partial H_y}{\partial y}+\dfrac{\partial H_z}{\partial z}=0 \Rightarrow H_z=0$

结论：均匀平面波没有沿传播方向的场分量，即电场强度和磁场强度都垂直于波的传播方向 —— 横电磁波（TEM波）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \end{cases}$$



设电场只有x分量，即

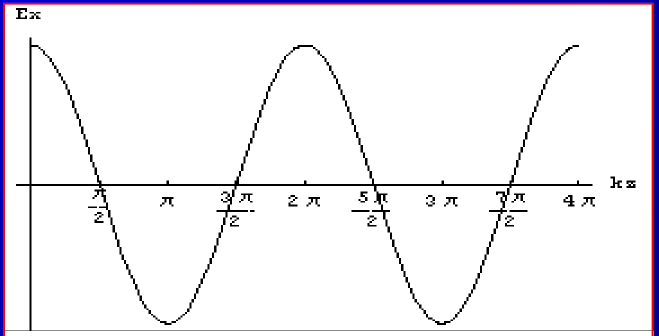
$$\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_x(z) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 E_x(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2E_x(z)=0 \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

其解为：$E_x(z)=A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$

解的物理意义

- 第一项

$$E_{1x}(z)=A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=E_{1x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{1x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$



$E_{1x}=E_m\cos(\omega t-kz)$的波形

电磁波沿空间相位滞后的方向传播

$$E_{1x}(z,t)=\mathrm{Re}[E_{1x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{1x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=E_{1x\mathrm{m}}\cos(\omega t-kz+\phi_{1x})$$

可见，$A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ 表示沿 $+z$ 方向传播的波。

- 第二项 $E_{2x}(z)=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}=E_{2x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{2x}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$

沿 $-z$ 方向传播的波，舍弃

$$E_{2x}(z,t)=\mathrm{Re}[E_{2x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{2x}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=E_{2x\mathrm{m}}\cos(\omega t+kz+\phi_{2x})$$

相伴的磁场

由 $\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}$，可得

$$\vec{H}=\vec{e}_y\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}=\vec{e}_y\frac{k}{\omega\mu}E_{xm}e^{-j(kz-\phi_x)}=\vec{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{xm}e^{-j(kz-\phi_x)}=\vec{e}_y\frac{1}{\eta}E_{xm}e^{-j(kz-\phi_x)}$$

瞬时表达式：$\vec{H}=\vec{e}_y\frac{1}{\eta}E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)$

其中 $\eta=\frac{E_{1x}}{H_{1y}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ (\Omega)$ 是电场的振幅与磁场振幅之比，具有阻抗量纲，称为波阻抗；又由于与媒质参数有关，又称为媒质的本征阻抗。在真空中

$$\eta=\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx377\Omega$$

磁场与电场相互垂直，且同相位

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{e}_x E_{xm}e^{-j(kz-\phi_x)}=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}$$

$$\vec{E}=\eta\vec{H}\times\vec{e}_z$$

结论：在理想介质中，均匀平面波的电场强度、磁场强度同相位，且和传播方向相互垂直，遵循右手螺旋法则。

小　　结

- 沿z方向传播的均匀平面波其电磁场复矢量解为：

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_{m}e^{-jkz}\qquad \vec{H}(z)=\vec{H}_{m}e^{-jkz}$$

- 均匀平面波为横电磁波（TEM波）

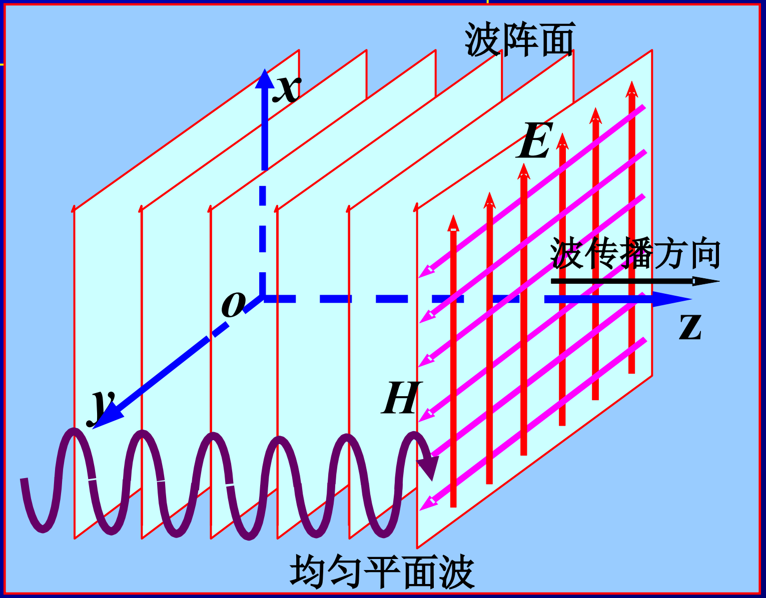
$$\vec{e}_z\cdot\vec{E}=0,\qquad \vec{e}_z\cdot\vec{H}=0$$

- 电磁波沿空间相位滞后的方向传播

沿z方向传播的均匀平面波：

$$E_x(z)=E_{xm}e^{j\phi_x}e^{-jkz}$$

$$E_x(z,t)=\mathrm{Re}[E_{xm}e^{j\phi_x}e^{-jkz}e^{j\omega t}]$$
$$=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)$$



1、均匀平面波的传播参数

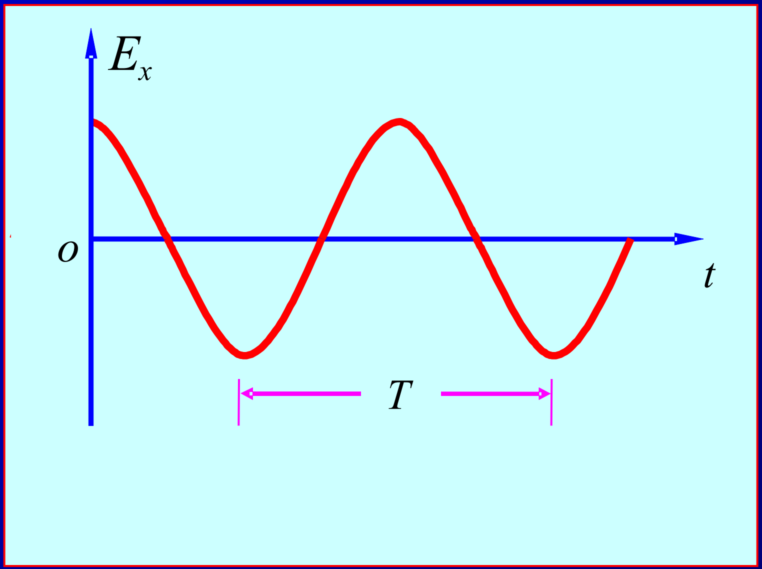
（1）角频率、频率和周期（z=常数）

角频率 ω：表示单位时间内的相位变化，单位为rad /s

周期T：同一位置，相位变化 2 π 的时间间隔，即

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \ \text{(s)}$$

频率 f：$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ (Hz)



（2）波长和相位常数（任意固定时刻）

kz为空间相位，z等于常数的平面为等相位面

相位常数 k：表示波传播单位距离的相位变化

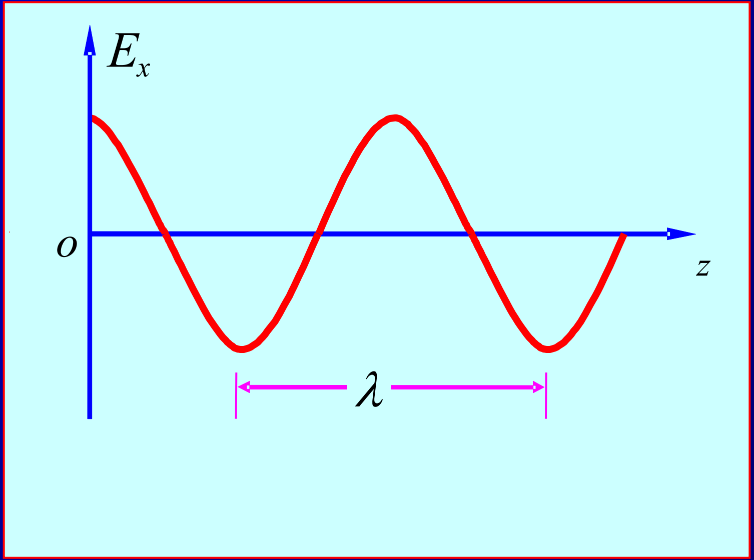
波长λ：同一时间，空间相位差为2π 等相位面的距离，即

$$kl = 2\pi \Rightarrow \lambda = l = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} \ (\text{m})$$

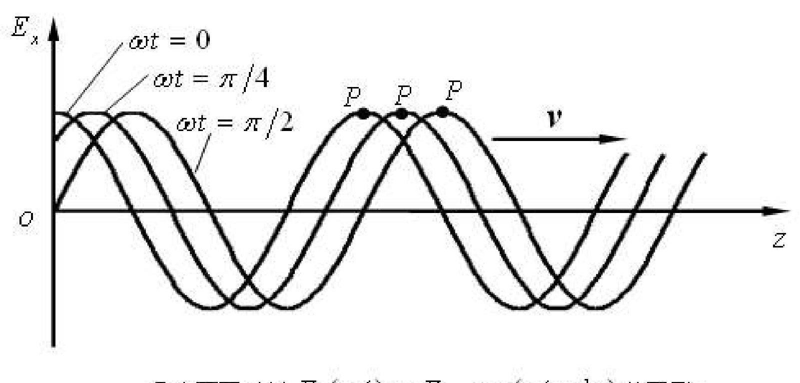
- 电磁波的波长不仅与频率有关，还与媒质参数有关

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ (\text{rad/m})$$

- k 的大小等于空间距离2π内所包含的波长数目，因此也称为波数。



（3）相速（波速）



几个不同时刻 $E_x(z,t)=E_{xm}\cos(\omega t-kz)$ 的图形

相速v：电磁波的等相位面在空间中的移动速度

由 $\omega t-kz=C \;\Rightarrow\; \omega \mathrm{d}t-k\mathrm{d}z=0$

故得到均匀平面波的相速为

$$v=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\ (\mathrm{m/s})$$

相速只与媒质参数有关，而与电磁波的频率无关

真空中：$v=c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}}}=3\times10^{8}\ (\mathrm{m/s})$

2、能量密度与能流密度

理想介质中均匀平面波的电场储能与磁场储能相等

能量密度: $w = w_e + w_m$

其中，$w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2$　$w_m = \dfrac{1}{2}\mu\left|\vec{H}(\vec{r},t)\right|^2$ $\xrightarrow{|\mathbf{E}| = \eta|\mathbf{H}|}$ $w_e = w_m$

$$w = 2w_e = 2w_m = \varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2 = \mu\left|\vec{H}(\vec{r},t)\right|^2$$

$$w_{av} = \frac{1}{2}\varepsilon E_m^2 = \frac{1}{2}\mu H_m^2$$

能流密度: $\vec{S} = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$ $\xrightarrow{\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{\mathbf{E}}}$ $\vec{S} = \vec{e}_z\dfrac{1}{\eta}(\vec{E}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\dfrac{1}{\eta}(\vec{e}_z\cdot\vec{E})$

$$\vec{S} = \vec{e}_z\frac{1}{\eta}\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2 = \vec{e}_z\eta\left|\vec{H}(\vec{r},t)\right|^2$$

$$\vec{S}_{av} = \vec{e}_z\frac{1}{2\eta}E_m^2 = \vec{e}_z\frac{1}{2}\eta H_m^2$$

两者关系: $\vec{v}_e = \vec{S}/w$　能量传输速度

$\longrightarrow$ $\vec{v}_e = \vec{v}_p = \vec{e}_z\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

理想介质中均匀平面波的电磁能量沿波的传播方向流动，且能速与相速相等

3、沿任意方向传播的均匀平面波

沿+z 方向传播的均匀平面波

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_m e^{-jkz}=\vec{E}_m e^{-jk\vec{e}_z\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{k}=\vec{e}_z k$$

$$\vec{e}_z\cdot\vec{E}_m=0$$

$$\vec{H}(z)=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}(z)$$

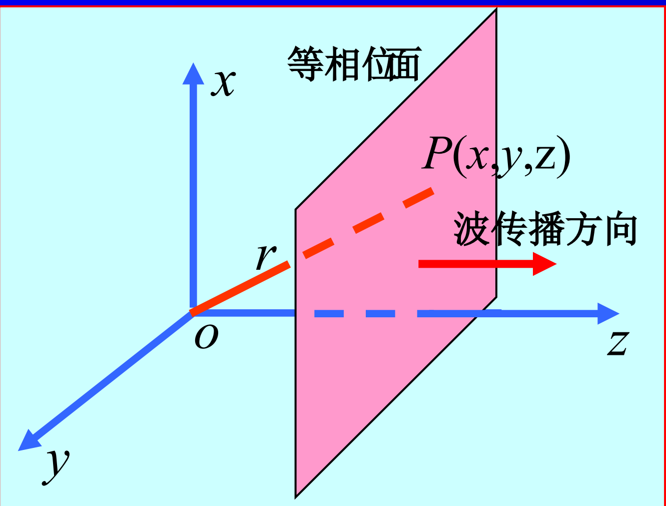
沿 $\vec{e}_n$ 传播方向的均匀平面波

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_m e^{-jk\vec{e}_n\cdot\vec{r}}=\vec{E}_m e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{k}=\vec{e}_n k=\vec{e}_x k_x+\vec{e}_y k_y+\vec{e}_z k_z$$

$$\vec{e}_n\cdot\vec{E}_m=0$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\eta}\vec{e}_n\times\vec{E}(\vec{r})$$



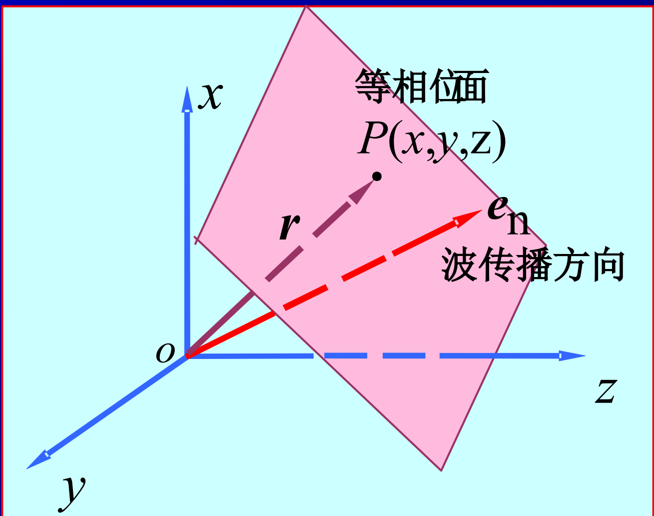
沿+z方向传播的均匀平面波

等相位面方程

$$\vec{e}_z\cdot\vec{r}=C$$

$$\vec{e}_n\cdot\vec{r}=C$$

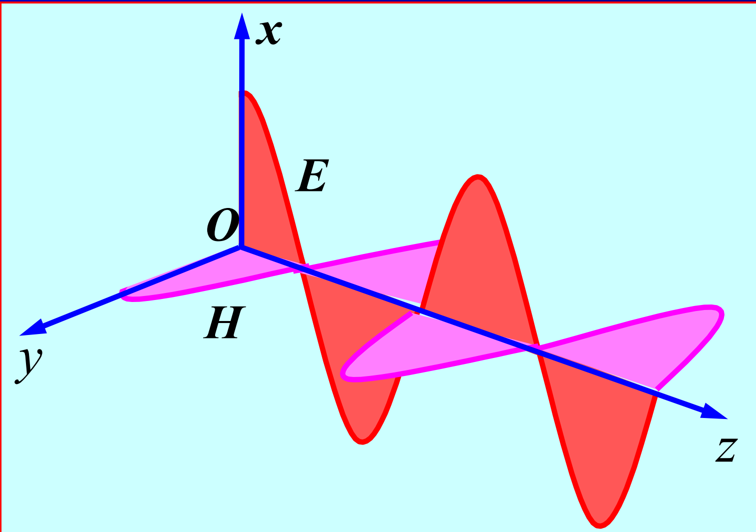
$$\vec{k}=\vec{e}_n k=\vec{e}_x k_x+\vec{e}_y k_y+\vec{e}_z k_z$$



沿任意方向传播的均匀平面波

理想介质中的均匀平面波的传播特点

- 电场、磁场与传播方向之间相互垂直，是横电磁波（TEM 波），$\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{k}$ 方向满足右手螺旋法则
- 沿空间相位滞后的方向传播，无衰减，电场与磁场的振幅不变
- 波阻抗为实数，电场与磁场同相位，振幅大η倍
- 电磁波的相速与频率无关，无色散
- 电场能量密度等于磁场能量密度，能量的传输速度等于相速
- 相关物理量：(角)频率、周期、波长、相位常数、波数、相速



理想介质中均匀平面波的 E 和 H

分析均匀平面波的技巧及电磁场复波幅的关系

$\vec{k}$ 方向传播均匀平面波电磁场复矢量的解为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

由于 $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \longrightarrow \nabla = -j\vec{k}$

因此

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{j}\omega\vec{D}(\vec{r}) \\ \nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{j}\omega\vec{B}(\vec{r}) \\ \nabla\cdot\vec{D}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -j\vec{k}\times\vec{H}(\vec{r}) = j\omega\vec{D}(\vec{r}) \\ -j\vec{k}\times\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \\ -j\vec{k}\cdot\vec{D}(\vec{r}) = 0 \\ -j\vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{k}\times\vec{H}_m = -\omega\vec{D}_m \\ \vec{k}\times\vec{E}_m = \omega\vec{B}_m \\ \vec{k}\cdot\vec{D}_m = 0 \\ \vec{k}\cdot\vec{B}_m = 0 \end{cases}$$

需要分析的问题

时谐电磁波的分析

复数表式法实现时空分离

场量随空间位置变化的规律

场量随时间变化的规律

√ 平面波
柱面波
球面波
（固定时刻的复矢量函数）

线极化波
圆极化波
椭圆极化波
（固定位置的时间变化特性）

5.2 电磁波的极化

5.2.1 极化的概念

5.2.2 线极化波

5.2.3 圆极化波

5.2.4 椭圆极化波

5.2.5 极化波的分解

5.2.6 极化波的工程应用

5.2.1 极化的概念

- 波的极化

线、圆、椭圆

空间固定点处，电场强度的矢端随时间变化的轨迹。

- 分析方法

1. 矢端的变化，表现为矢量的坐标分量大小的变化
2. 研究矢量分量随时间的变化，需从场矢量的瞬时表达式出发。如对于均匀平面波，

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{E}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_{ex})+\vec{e}_y E_{ym}\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_{ey})+\vec{e}_z E_{zm}\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_{ez})$$

结论：1) 矢端的时间变化规律，决定于各分量幅度和初相的大小

2) 任意极化均可由线极化合成得到！