

专题 37 最值模型之瓜豆模型（原理）直线

动点轨迹问题是中考和各类模拟考试的重要题型，学生受解析几何知识的局限和思维能力的束缚，该压轴点往往成为学生在中考中的一个坎，致使该压轴点成为学生在中考中失分的集中点。掌握该压轴题型的基本图形，构建问题解决的一般思路，是中考专题复习的一个重要途径。本专题就最值模型中的瓜豆原理（动点轨迹为直线型）进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

目录导航

模型 1.瓜豆原理（模型）（直线轨迹）	1
---------------------------	---

习题练模型

.....	11
-------	----

模型 1.瓜豆原理（模型）（直线轨迹）

模型解读

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同。

只要满足：

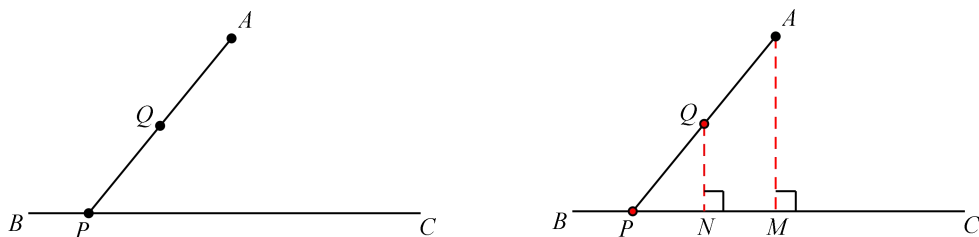
- 1、两“动”，一“定”
- 2、两动点与定点的连线夹角是定角
- 3、两动点到定点的距离比值是定值

则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

动点轨迹基本类型为**直线型**和**圆弧型**，主动点叫瓜（豆），从动点叫瓜（豆），瓜在直线上运动，豆也在直线上运动；瓜在圆周上运动，豆的轨迹也是圆。

模型 1) 如图， P 是直线 BC 上一动点， A 是直线 BC 外一定点，连接 AP ，取 AP 中点 Q ，当点 P 在直线上

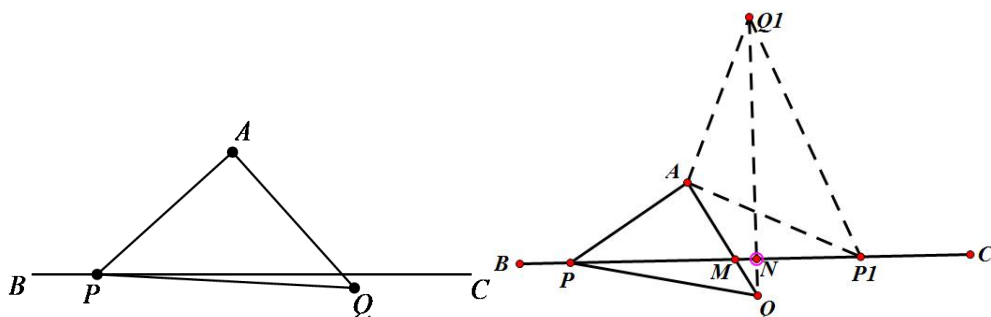
运动时，则 Q 点轨迹也是一条直线。



证明： 分别过 A 、 Q 向 BC 作垂线，垂足分别为 M 、 N ，在运动过程中，

因为 $AP=2AQ$ ，所以 QN 始终为 AM 的一半，即 Q 点到 BC 的距离是定值，故 Q 点轨迹是一条直线。

模型 2) 如图，在 $\triangle APQ$ 中 $AP=AQ$ ， $\angle PAQ=\alpha$ 为定值，当点 P 在直线 BC 上运动时，则 Q 点轨迹也是一条直线。



证明： 在 BC 上任取一点 P_1 ，作三角形 $\triangle AP_1Q_1$ ，且满足 $\angle P_1AQ_1=\alpha$ ， $AQ_1=AP_1$ ，连结 Q_1Q 交 BC 于点 N ，

$\because AP=AQ$ ， $AQ_1=AP_1$ ， $\angle P_1AQ_1=\angle PAQ=\alpha$ ， $\therefore \triangle APP_1 \sim \triangle AQQ_1$ ， $\therefore \angle APP_1=\angle AQQ_1$ ，

$\because \angle AMP=\angle NMQ$ ， $\therefore \angle MNQ=\angle PAQ=\alpha$ ，即 Q 点所在直线与 BC 的夹角为定值，故 Q 点轨迹是一条直线。

模型运用

当动点轨迹为一条直线时，常用“垂线段最短”求最值。

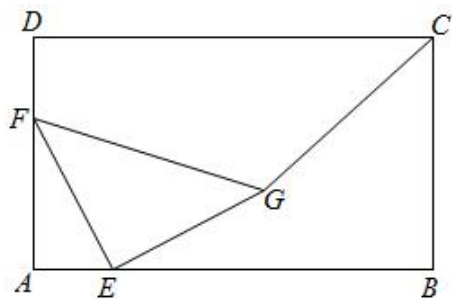
- 1) 当动点轨迹已知时可直接运用垂线段最短求最值；
- 2) 当动点轨迹未知时，先确定动点轨迹，再垂线段最短求最值。

3) 确定动点轨迹的方法（重点）

- ①当某动点到某条直线的距离不变时，该动点的轨迹为直线，即模型 1)；
- ②当某动点与定直线的端点连接后的角度不变时，该动点的轨迹为直线，即模型 2)；
- ③当一个点的坐标以某个字母的代数式表示时，若可化为一次函数，则点的轨迹为直线；
- ④观察动点运动到特殊位置时，如中点，端点等特殊位置考虑；

注意： 若动点轨迹用上述方法不好确定，则也可以将所求线段转化（常用中位线、全等、相似、对角线）为其他已知轨迹的线段求最值。

例 1. (2024·山东泰安·校考一模) 如图, 矩形 $ABCD$ 的边 $AB = \frac{11}{2}$, $BC = 3$, E 为 AB 上一点, 且 $AE = 1$, F 为 AD 边上的一个动点, 连接 EF , 若以 EF 为边向右侧作等腰直角三角形 EFG , $EF = EG$, 连接 CG , 则 CG 的最小值为 ()

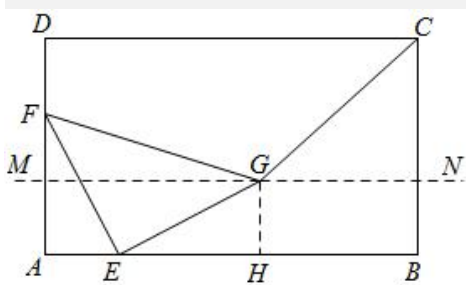


- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H , 过点 G 作 $MN \parallel AB$, 由“ AAS ”可证 $\triangle GEH \cong \triangle EFA$, 可得 $GH = AE = 1$, 可得点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动, 则当 F 与 D 重合时, CG 有最小值, 即可求解.

【详解】解: 如图, 过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H , 过点 G 作 $MN \parallel AB$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB = \frac{11}{2}$, $BC = 3$, $\therefore \angle B = 90^\circ$, $CD = \frac{11}{2}$, $AD = 3$,

$\because AE = 1$, $\therefore BE = \frac{9}{2}$, $\because \angle GHE = \angle A = \angle GEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle GEH + \angle EGH = 90^\circ$, $\angle GEH + \angle FEA = 90^\circ$, $\therefore \angle EGH = \angle FEA$,

又 $\because GE = EF$, $\therefore \triangle GEH \cong \triangle EFA$ (AAS), $\therefore GH = AE = 1$,

$\therefore$ 点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动,

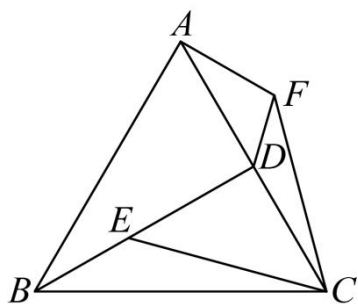
$\therefore$ 当 F 与 D 重合时, CG 有最小值, 此时 $AF = EH = 3$,

$\therefore CG$ 的最小值 $= \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 1 - 3\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$, 故选 B.

【点睛】本题考查矩形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 确定点 G 的运动轨迹是本题的关键.

例 2. (2024·河北邢台·模拟预测) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 点 E 为中线 BD 上的动点. 连接 CE ,

将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . 连接 AF , 则 $\angle CAF = \underline{\hspace{2cm}}$, 连接 DF , 则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

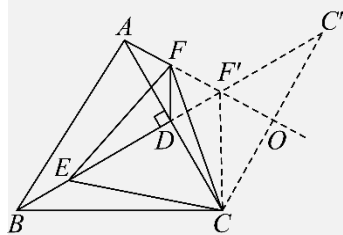


【答案】 30° $1+\sqrt{3}$

【分析】证明 $\triangle CBE \cong \triangle CAF$ (SAS) 可得 $\angle CAF = \angle CBE = 30^\circ$, 得到点 F 在射线 AF 上运动, 如图所示, 作点 C 关于 AF 的对称点 C' , 连接 DC' , 可得当 D, F, C' 三点共线时, $FC + FD$ 取最小值, 即

$FC + FD = F'C' + F'D = C'D$, 由 $\angle ACO = 90^\circ - \angle CAO = 60^\circ$ 得到 $\angle C' = 30^\circ$, 即得 $CD = \frac{1}{2}CC' = 1$, 进而由勾股定理得 $C'D = \sqrt{CC'^2 - CD^2} = \sqrt{3}$, 据此即可求解.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, E 为高 BD 上的动点, $\therefore \angle CBE = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, $BC = AC$,
 $\because$ 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF , $\therefore CE = CF$, $\angle ECF = \angle BCA = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCE = \angle ACF$, $\therefore \triangle CBE \cong \triangle CAF$ (SAS), $\therefore \angle CAF = \angle CBE = 30^\circ$, $\therefore$ 点 F 在射线 AF 上运动,
 如图所示, 作点 C 关于 AF 的对称点 C' , 连接 DC' ,



设 CC' 交 AF 于点 O , 则 $\angle AOC = 90^\circ$, 在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\angle CAO = 30^\circ$, 则 $CO = \frac{1}{2}AC = 1$,

当 D, F, C' 三点共线时, $FC + FD$ 取最小值, 即 $FC + FD = F'C' + F'D = C'D$,

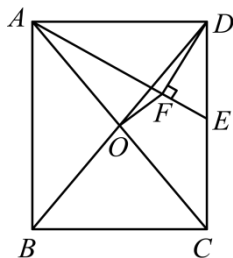
$\because \angle ACO = 90^\circ - \angle CAO = 60^\circ$, $\therefore \angle C' = 90^\circ - \angle DCO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\because CC' = AC = 2$, $\therefore CD = \frac{1}{2}CC' = 1$, $\therefore C'D = \sqrt{CC'^2 - CD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore \triangle CDF$ 周长的最小值为 $1 + \sqrt{3}$, 故答案为: 30° ; $1 + \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 等边三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 轴对称的性质, 两点之间线段最短, 直角三角形的性质, 勾股定理, 正确作出辅助线是解题的关键.

例 3. (2023·四川成都·模拟预测) 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 在边 DC 上, 连接 AE , 过 D 做 $DF \perp AE$, 垂足为 F , 连接 OF , 若 $\angle DAE = 30^\circ$, $DE = 10$, 则 OF 的最小值为_____.



【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

【分析】 本题考查了矩形的判定和性质, 含 30° 直角三角形的性质, 勾股定理, 三角形的三边关系, 先根据面积法可计算 DF 的长为 $5\sqrt{3}$, 根据三角形的三边关系可得: F 是一个定点, O 的轨迹为 AD 中垂线上的一部分, 所以垂线段最短, 可知 FN 的长是 OF 的最小值, 最后由等边三角形三线合一的性质可得结论.

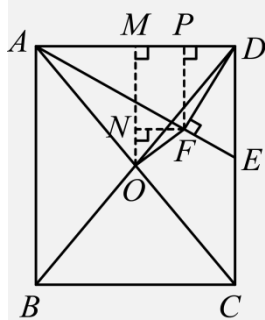
【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ, AC = BD, OA = \frac{1}{2}AC, OD = \frac{1}{2}BD, \therefore OA = OD,$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ, DE = 10, \therefore AE = 2DE = 20, AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3},$$

$$\because DF \perp AE, \therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 20 \times DF, \therefore DF = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\because F$ 是一个定点, O 的轨迹为 AD 中垂线上的一部分, 如下图所示, 过点 F 作 $FP \perp AD$ 于 P , 过点 O 作 $OM \perp AD$ 于 M , 过点 F 作 $FN \perp OM$ 于 N , 所以垂线段最短, 则 OF 的最小值为 FN 的值,



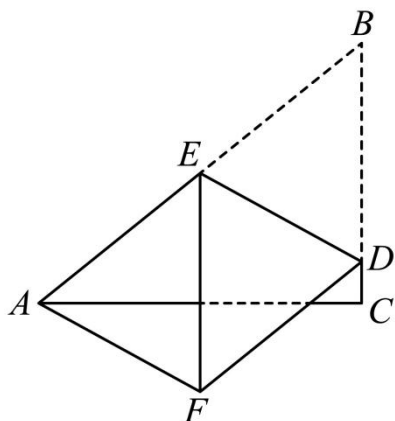
$$\because FP \parallel DE, \therefore \angle DFP = \angle EDF = 30^\circ, \therefore PD = \frac{1}{2}DF = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \text{ 在 } \text{Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD = 10\sqrt{3},$$

$$\because OM \perp AD, OA = OD, \therefore AM = DM = 5\sqrt{3}, \therefore FN = PM = 5\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

即 OF 的最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. 故答案为: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

例 4. (2023·安徽·合肥三模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 纸片中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 点 D , E 分别在

BC , AB 边上, 连接 DE , 将 $\triangle BDE$ 沿 DE 翻折, 使点 B 落在点 F 的位置, 连接 AF , 若四边形 $BEFD$ 是菱形, 则 AF 的长的最小值为 ()

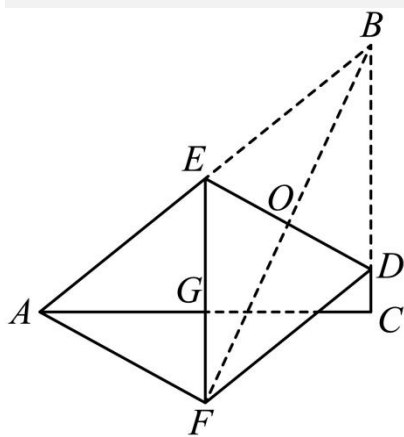


- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【分析】连接 BF 交 ED 于点 O , 设 EF 与 AC 交于点 G . 根据菱形的性质可得点 F 在 $\angle ABC$ 的平分线上运动, 从而得到当 $AF \perp BF$ 时, AF 的长最小. 再证明 $\triangle BEO \sim \triangle BAF$, 可得 $BE = \frac{1}{2} AB = AE$, 再证明 $\triangle AGE \sim \triangle ACB$, $EG = \frac{1}{2} BC = 1.5$, $AG = \frac{1}{2} AC = 2$, 从而得到 $GF = 1$, 再由勾股定理, 即可求解.

【详解】解: 如图, 连接 BF 交 ED 于点 O , 设 EF 与 AC 交于点 G .



$\because$ 四边形 $BEFD$ 是菱形, $\therefore BF$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore$ 点 F 在 $\angle ABC$ 的平分线上运动,

$\therefore$ 当 $AF \perp BF$ 时, AF 的长最小. 在菱形 $BEFD$ 中, $BF \perp ED$, $OB = OF$, $EF \parallel BC$,

$\therefore EO \parallel AF$, $\therefore \triangle BEO \sim \triangle BAF$, $\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{OE}{AF} = \frac{BO}{BF} = \frac{1}{2}$, $\therefore BE = \frac{1}{2} AB = AE$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 4$, $BC = 3$, $\therefore AB = 5$, $\therefore BE = AE = 2.5$,

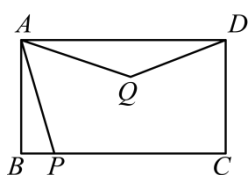
$\because AF \perp BF$, $\therefore EF = 2.5$, $\because EF \parallel BC$, $\therefore \triangle AGE \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{EG}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}, \angle AGE = \angle ACB = 90^\circ, \therefore EG = \frac{1}{2}BC = 1.5, AG = \frac{1}{2}AC = 2, \therefore GF = EF - EG = 1,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle AGE = 90^\circ, \therefore AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}. \text{ 故选: A}$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，菱形的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，菱形的性质，准确得到点 F 在 $\angle ABC$ 的平分线上运动是解题的关键.

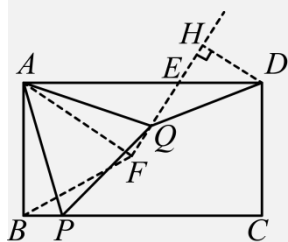
例 5. (2024·四川达州·一模) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 5\sqrt{3}$ ，点 P 在线段 BC 上运动（含 B ， C 两点），连接 AP ，以点 A 为中心，将线段 AP 逆时针旋转 60° 到 AQ ，连接 DQ ，则线段 DQ 的最小值为_____.



【答案】 $\frac{7}{2}$ 或 $3\frac{1}{2}$ 或 3.5

【分析】如图，以 AB 为边向右作等边 $\triangle ABF$ ，作射线 FQ 交 AD 于点 E ，过点 D 作 $DH \perp QE$ 于 H 。利用全等三角形的性质证明 $\angle AFQ = 90^\circ$ ，推出 $\angle AEF = 60^\circ$ ，推出点 Q 在射线 FE 上运动，求出 DH ，可得结论。

【详解】解：如图，以 AB 为边向右作等边 $\triangle ABF$ ，作射线 FQ 交 AD 于点 E ，过点 D 作 $DH \perp QE$ 于 H 。



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore \angle ABP = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle ABF, \triangle APQ$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle BAF = \angle PAQ = 60^\circ$ ， $BA = FA$ ， $PA = QA$ ， $\therefore \angle BAP = \angle FAQ$ ，

在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle FAQ$ 中，
$$\begin{cases} BA = FA \\ \angle BAP = \angle FAQ \\ PA = QA \end{cases} \therefore \triangle BAP \cong \triangle FAQ (\text{SAS}), \therefore \angle ABP = \angle AFQ = 90^\circ,$$

$\therefore \angle FAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\therefore \angle AEF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore AB = AF = 4$ ， $\therefore AE = \frac{AF}{\cos 30^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ， $\therefore$ 点 Q 在射线 FE 上运动，

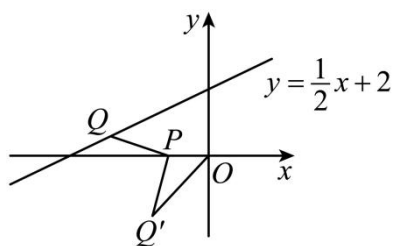
$\therefore AD = BC = 5\sqrt{3}$ ， $\therefore DE = AD - AE = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ ， $\therefore DH \perp EF$ ， $\angle DEH = \angle AEF = 60^\circ$ ， $\therefore$

$DH = DE \cdot \sin 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2}$ 。据垂线段最短可知，当点 Q 与 H 重合时， DQ 的值最小，最小值为 $\frac{7}{2}$ 。

故答案为： $\frac{7}{2}$ 。

【点睛】本题考查矩形的性质，旋转变换，等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，本题的突破点是证明点 Q 的在射线 FE 上运动.

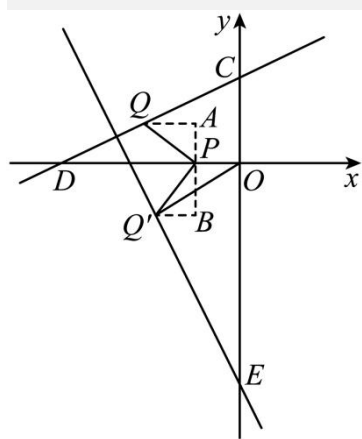
例 6. (2024·重庆模拟预测)如图，在平面直角坐标系中， Q 是直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 上的一个动点，将 Q 绕点 $P(-1, 0)$ 逆时针旋转 90° ，得到点 Q' ，连接 OQ' ，则 OQ' 最小值为_____.



【答案】 $\sqrt{5}$

【分析】设 $Q(t, \frac{1}{2}t + 2)$ ，作 $AB \perp x$ 轴，作 $AQ \perp AB$ ，作 $Q'B \perp AB$ ，根据 AAS 可证明 $\triangle APQ \cong \triangle BQ'P$ ，由此可求 $Q'(-\frac{1}{2}t - 3, t + 1)$ ，令 $x = -\frac{1}{2}t - 3$ ， $y = t + 1$ ，可得 Q' 在直线 $y = -2x - 5$ 上运动，当 $OQ' \perp EQ$ 时， OQ' 的值最小，再由 $\tan \angle CDO = \frac{1}{2}$ 得 $\tan \angle OEQ' = \frac{1}{2}$ ，进而得出 $OE = 5$ ，即可得出答案.

【详解】设 $Q(t, \frac{1}{2}t + 2)$ ，过点 P 作 $AB \perp x$ 轴，过点 Q 作 $AQ \perp AB$ 交于 A 点，过点 Q' 作 $Q'B \perp AB$ 交于 B 点，
 $\because \angle QPQ' = 90^\circ$ ， $\therefore \angle QPA + \angle Q'PB = 90^\circ$.



$\because \angle QPA + \angle AQP = 90^\circ$ ， $\therefore \angle Q'PB = \angle AQP$.

$\because QP = Q'P$ ， $\therefore \triangle APQ \cong \triangle BQ'P (AAS)$ ， $\therefore QA = PB$ ， $AP = Q'B$.

$\because P(-1, 0)$ ， $\therefore QA = -t - 1$ ， $AP = \frac{1}{2}t + 2$ ， $\therefore Q'(-\frac{1}{2}t - 3, t + 1)$ ，

令 $x = -\frac{1}{2}t - 3$ ， $y = t + 1$ ， $\therefore y = -2x - 5$ ，

∴点 Q' 在直线 $y = -2x - 5$ 上运动，当 $OQ' \perp EQ$ 时， OQ' 的值最小.

在 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = 2$ ，令 $y = 0$ ，则 $x = -4$ ，∴ $C(0, 2)$ ， $D(-4, 0)$ ，∴ $\tan \angle CDO = \frac{1}{2}$.

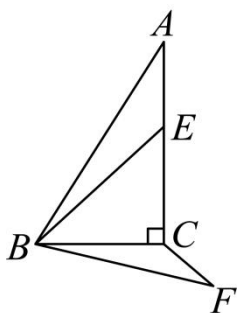
∵ $\angle CDO = \angle OEQ'$ ，∴ $\tan \angle OEQ' = \frac{1}{2}$ ，∴ $Q'E = 2OQ'$ ，

在 $y = -2x - 5$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -5$ ，∴ $E(0, -5)$ ，∴ $OE = 5$.

∵ $(OQ')^2 + (EQ')^2 = OE^2$ ，即 $5(OQ')^2 = 25$ ，解得 $OQ' = \sqrt{5}$ ，所以 OQ' 的最小值为 $\sqrt{5}$. 故答案为: $\sqrt{5}$.

【点睛】本题主要考查了一次函数的图象及性质，旋转的性质，三角形全等的判定及性质，确定点 Q' 的运动轨迹是解题的关键.

例 7. (2024·广东·九年级校考期中) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 5$ ，点 E 是边 AC 上一点，将 BE 绕点 B 顺时针旋转 60° 到 BF ，连接 CF ，则 CF 长的最小值是 ()



A. 2

B. 2.5

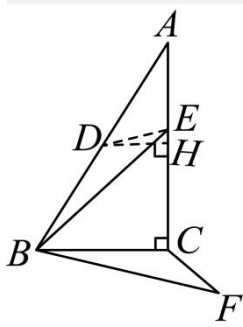
C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】B

【分析】取 AB 的中点为点 D ，连接 DE ，过点 D 作 $DH \perp AC$ ，垂足为 H ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用含 30° 度角的直角三角形的性质可求出 AB 的长， $\angle ABC$ 的度数，再根据线段的中点定义可得 $AD = BD = \frac{1}{2}AB = 5$ ，从而可得 $DH = \frac{1}{2}AD = 2.5$ ，然后利用旋转的性质可得： $BE = BF$ ， $\angle EBF = 60^\circ$ ，从而利用等式的性质可得 $\angle ABE = \angle CBF$ ，进而利用 SAS 证明 $\triangle BDE \cong \triangle BCF$ ，最后利用全等三角形的性质可得 $DE = CF$ ，再根据垂线段最短，即可解答.

【详解】解：取 AB 的中点为点 D ，连接 DE ，过点 D 作 $DH \perp AC$ ，垂足为 H ，∴ $\angle AHD = 90^\circ$ ，



$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5$, $\therefore AB = 2BC = 10$, $\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$,

$\because$ 点 D 是 AB 的中点, $\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB = 5$, $\therefore DH = \frac{1}{2}AD = 2.5$,

由旋转得: $BE = BF$, $\angle EBF = 60^\circ$, $\therefore \angle EBF = \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle EBF - \angle EBC = \angle ABC - \angle EBC$, $\therefore \angle ABE = \angle CBF$,

$\because BD = BC = 5$, $\therefore \triangle BDE \cong \triangle BCF$ (SAS), $\therefore DE = CF$,

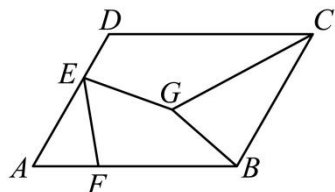
当 $DE \perp AC$ 时, 即当点 E 和点 H 重合时, DE 有最小值, 且最小值为 2.5,

$\therefore CF$ 长的最小值是 2.5, 故选: B.

【点睛】 本题考查了旋转的性质, 垂线段最短, 全等三角形的判定与性质, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

习题练模型

1. (2024·河南周口·一模) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=16$, $AD=12$, $\angle A=60^\circ$, E 是边 AD 上一点, 且 $AE=8$, F 是边 AB 上的一个动点, 将线段 EF 绕点 E 逆时针旋转 60° , 得到 EG , 连接 BG 、 CG , 则 $BG+CG$ 的最小值是 ().

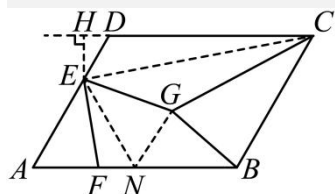


- A. 4 B. $4\sqrt{15}$ C. $4\sqrt{21}$ D. $\sqrt{37}$

【答案】C

【分析】 本题考查旋转变换, 轨迹, 菱形的性质, 勾股定理, 直角三角形, 全等三角形的判定和性质等知识. 取 AB 的中点 N , 连接 EN , EC , GN , 作 $EH \perp CD$ 交 CD 的延长线于 H . 利用全等三角形的性质证明 $\angle GNB=60^\circ$, 点 G 的运动轨迹是射线 NG , 由“SAS”可证 $\triangle EGN \cong \triangle BGN$, 可得 $GB=GE$, 推出 $GB+GC=GE+GC \geq EC$, 求出 EC 即可解决问题.

【详解】 解: 如图, 取 AB 的中点 N . 连接 EN , EC , GN , 作 $EH \perp CD$ 交 CD 的延长线于 H ,



$\because AE=8$, $AD=12$, $\therefore DE=4$, $\because$ 点 N 是 AB 的中点, $\therefore AN=NB=8$, $\therefore AE=AN$,

$\because \angle A=60^\circ$, $\therefore \triangle AEN$ 是等边三角形, $\therefore \angle AEN = \angle FEG = 60^\circ$, $\therefore \angle AEF = \angle NEG$,

$\because EA=EN$, $EF=EG$, $\therefore \triangle AEF \cong \triangle NEG$ (SAS), $\therefore \angle ENG = \angle A = 60^\circ$,

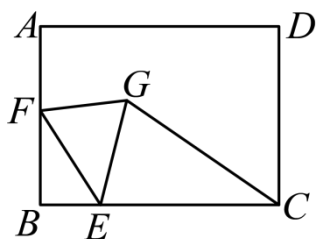
$\because \angle ANE = 60^\circ$, $\therefore \angle GNB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, $\therefore$ 点 G 的运动轨迹是射线 NG ,

$\because BN=EN$, $\angle BNG = \angle ENG = 60^\circ$, $NG=NG$, $\therefore \triangle EGN \cong \triangle BGN$ (SAS), $\therefore GB=GE$, $\therefore GB+GC=GE+GC \geq EC$,

在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中, $\angle H=90^\circ$, $DE=4$, $\angle EDH=60^\circ$, $\therefore DH=\frac{1}{2}DE=2$, $EH=2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle ECH$ 中, $EC=\sqrt{EH^2+CH^2}=\sqrt{12+18^2}=4\sqrt{21}$, $\therefore GB+GC \geq 2$, $\therefore GB+GC$ 的最小值为 $4\sqrt{21}$, 故选: C.

2. (2024·湖南长沙·一模) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=8$, F 是 AB 上一点, E 为 BC 上一点, 且 $BE=2$, 连接 EF , 将 EF 绕着点 E 顺时针旋转 45° 到 EG 的位置, 则 CG 的最小值为 _____.

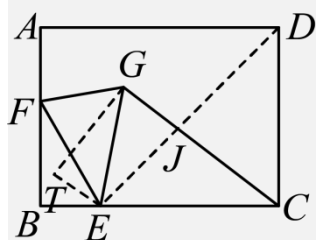


【答案】 $3\sqrt{2} + 2$

【分析】 将线段 BE 绕点 E 顺时针旋转 45° 得到线段 ET ，连接 GT ， ED ，设 ED 交 CG 于 J 。证明

$\triangle EBF \cong \triangle ETG$ (SAS)，根据垂线段最短计算即可。

【详解】 解：如图，将线段 BE 绕点 E 顺时针旋转 45° 得到线段 ET ，连接 GT ， ED ，设 ED 交 CG 于 J 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $BE = 2$ ，

$\therefore AB = CD = 6$ ， $BC = 8$ ， $EC = CD = 6$ ， $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CED = \angle CDE = 45^\circ$ ，

$\because \angle BET = \angle FEG = 45^\circ$ ， $\therefore \angle BEF = \angle TEG$ ，

在 $\triangle EBF$ 和 $\triangle ETG$ 中， $\because \begin{cases} EB = ET \\ \angle BEF = \angle TEG \\ EF = EG \end{cases}$ ， $\therefore \triangle EBF \cong \triangle ETG$ (SAS) $\therefore \angle B = \angle ETG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 G 的在射线 TG 上运动， $\therefore$ 当 $CG \perp TG$ 时， CG 的值最小，

$\because \angle CED = \angle CDE = 45^\circ$ ， $\angle BET = \angle FEG = 45^\circ$ $\therefore \angle TEJ = 90^\circ = \angle ETG = \angle JGT = 90^\circ$ ，

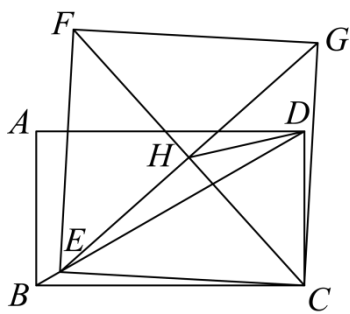
$\therefore$ 四边形 $ETGJ$ 是矩形， $\therefore DE \parallel GT$ ， $GJ = TE = BE = 2$ $\therefore CJ \perp DE$ ，

$\therefore \angle ECJ = \angle DCJ = 45^\circ$ ， $\therefore CJ = EC \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$ ， $\therefore CG = GJ + CJ = 3\sqrt{2} + 2$ ，

$\therefore CG$ 的最小值为 $3\sqrt{2} + 2$ ，故答案为： $3\sqrt{2} + 2$ 。

【点睛】 本题考查了旋转的性质，矩形的性质，解直角三角形，三角形全等的判定和性质，垂线段最短，熟练掌握相应的知识是解题的关键。

3. (2023·江苏宿迁·三模) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $BC = 8\sqrt{3}$ ，点 E 为矩形对角线 BD 上一动点，连接 CE ，以 CE 为边向上作正方形 $CEFG$ ，对角线 CF 、 EG 交于点 H ，连接 DH ，则线段 DH 的最小值为_



【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】作 $CI \perp BD$ 于点 I , 则 $\angle EIC = 90^\circ$, 由正方形的性质得 $\angle EHC = 90^\circ$, $CH = EH$, 所以 $\angle HCE = \angle HEC = 45^\circ$, 取 CE 的中点 O , 连接 OH 、 OI , 以点 O 为圆心 OE 为半径作 $\odot O$, 则点 H 、点 I 都在 $\odot O$ 上, 所以 $\angle HIE = \angle HCE = 45^\circ$, 可知点 H 在过点 I 且与直线 BD 所交成的锐角为 45° 的直线上运动, 则当 $DH \perp IH$ 时, 线段 DH 的值最小, 此时 $DH = \frac{\sqrt{2}}{2} ID$, 由矩形的性质得 $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = AB = 8$, 则 $BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = 16$, 由 $\frac{ID}{CD} = \frac{CD}{BD} = \cos \angle BDC$ 得 $ID = \frac{CD^2}{BD} = 4$, 所以 $DH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$, 于是得到问题的答案.

【详解】如图1, 作 $CI \perp BD$ 于点 I , 则 $\angle EIC = 90^\circ$, $\because$ 四边形 $CEFG$ 是正方形,

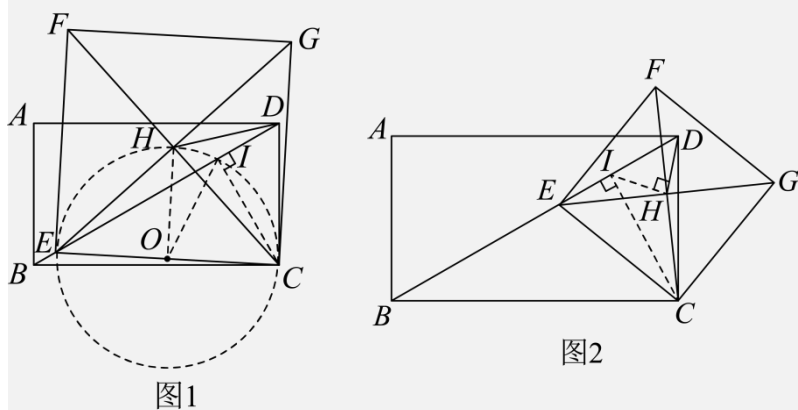


图2

$\therefore CF \perp EG$, $CH = FH = \frac{1}{2} CF$, $EH = GH = \frac{1}{2} EG$, 且 $CF = EG$,

$\therefore \angle EHC = 90^\circ$, $CH = EH$, $\therefore \angle HCE = \angle HEC = 45^\circ$,

取 CE 的中点 O , 连接 OH 、 OI , 以点 O 为圆心 OE 为半径作 $\odot O$,

$\therefore OH = OI = OE = \frac{1}{2} CE$, $\therefore$ 点 H 、点 I 都在 $\odot O$ 上, $\therefore \angle HIE = \angle HCE = 45^\circ$,

$\therefore$ 点 H 在过点 I 且与直线 BD 所交成的锐角为 45° 的直线上运动,

$\therefore$ 当 $DH \perp IH$ 时, 线段 DH 的值最小, 如图2, $DH \perp IH$, 则 $\angle DHI = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 H 、点 I 都在以 CE 为直径的圆上, $\therefore \angle HID = 180^\circ - \angle HIE = \angle HCE = 45^\circ$, $\therefore DH = ID \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ID$,

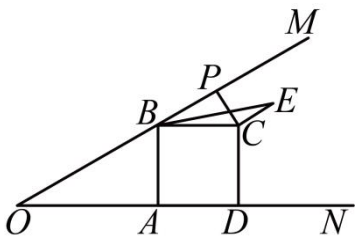
∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=8, BC=8\sqrt{3}$, $\therefore \angle BCD=90^\circ, CD=AB=8$,

$$\therefore BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16, \because \angle CID = 90^\circ, \therefore \frac{ID}{CD} = \frac{CD}{BD} = \cos \angle BDC,$$

$$\therefore ID = \frac{CD^2}{BD} = \frac{8^2}{16} = 4, \therefore DH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}, \therefore DH \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2}, \text{ 故答案为: } 2\sqrt{2}.$$

【点睛】此题重点考查矩形的性质、正方形的性质、圆周角定理、勾股定理、锐角三角函数与解直角三角形、垂线段最短等知识，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键。

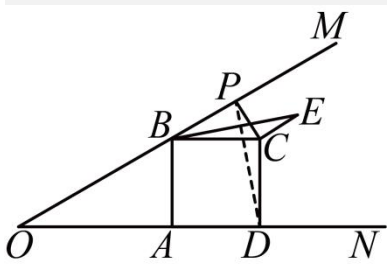
4. (2023 上·湖北武汉·九年级校联考期中) 如图, 已知 $\angle MON = 30^\circ$, B 为 OM 上一点, $BA \perp ON$ 于 A , 四边形 $ABCD$ 为正方形, P 为射线 BM 上一动点, 连接 CP , 将 CP 绕点 C 顺时针方向旋转 90° 得 CE , 连接 BE , 若 $AB=2$, 则 BE 的最小值为_____.



【答案】 $1 + \sqrt{3} / \sqrt{3} + 1$

【分析】本题考查了旋转的性质，正方形的性质，全等三角形的判定与性质以及垂线段最短的性质的综合应用，解决问题的关键是作辅助线构造全等三角形，根据全等三角形的对应边相等以及垂线段最短进行解答。连接 PD ，依据 SAS 构造全等三角形，即 $\triangle BCE \cong \triangle DCP$ ，将 BE 的长转化为 PD 的长，再依据垂线段最短得到当 PD 最短时， BE 亦最短，根据 $\angle MON = 30^\circ$ ， $OD = 2 + 2\sqrt{3}$ ，即可求得 PD 的长的最小值。

【详解】解：如图，连接 PD ，



由题意可得, $PC=EC$, $\angle PCE=90^\circ=\angle DCB$, $BC=DC$, $\therefore \angle DCP=\angle BCE$,

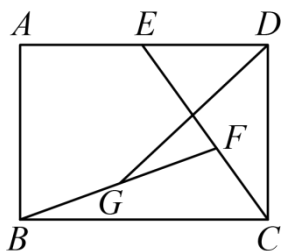
$$\text{在 } \triangle DCP \text{ 和 } \triangle BCE \text{ 中, } \begin{cases} DC=BC \\ \angle DCP=\angle BCE \\ CP=CE \end{cases}, \therefore \triangle DCP \cong \triangle BCE (\text{SAS}), \therefore PD=BE,$$

当 $DP \perp OM$ 时, PD 最短, 此时 BE 也最短,

$\because \angle AOB = 30^\circ$, $AB = 2 = AD$, $\therefore OB = 2 \times 2 = 4$, $\therefore OA = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ $\therefore OD = OA + AD = 2\sqrt{3} + 2$,

$\therefore$ 当 $DP \perp OM$ 时, $DP = \frac{1}{2}OD = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$, $\therefore BE$ 的最小值为 $1 + \sqrt{3}$. 故答案为: $1 + \sqrt{3}$.

5. (2023 上·陕西渭南·九年级统考期中) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 6$, 点 E 为边 AD 的中点, 连接 CE . 点 F 是边 CE 上一动点, 点 G 为边 BF 的中点, 连接 DG . 当 $AB = 4$ 时, DG 的最小值是_____.

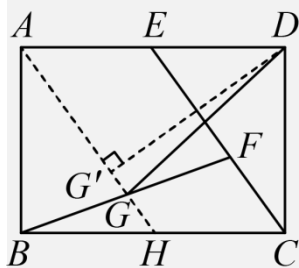


【答案】 $\frac{24}{5}$

【分析】取 BC 的中点 H , 连接 AH , 作 $DG' \perp AH$ 于点 G' , 根据四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD = 6$ 得 $AD = BC = 6$, 根据点 E 为边 AD 的中点, 点 H 为 BC 的中点, 得 $AE = DE = 3$, $BH = CH = 3$, 可得 $AE = CH$, 根据 $AE \parallel CH$ 得四边形 $AHCE$ 为平行四边形, 则 $AH \parallel CE$, 根据 $BH = CH$ 得 AH 与 BF 的交点为 BF 的中点, 根据 G 为 BF 的中点, 得 AH 过点 G , 即点 G 在线段 AH 上随点 F 运动而运动, 当 $DG \perp AH$ 时有最小值, 则 DG' 即为所求, 根据勾股定理得 $AH = 5$, 根据 $AD \parallel BC$ 得 $\angle AHB = \angle DAG'$, 根据 $\angle ABH = \angle DG'A = 90^\circ$ 得

$\triangle ABH \sim \triangle DG'A$, 则 $\frac{AB}{DG'} = \frac{AH}{DA}$, 进行计算即可得.

【详解】解: 如图所示, 取 BC 的中点 H , 连接 AH , 作 $DG' \perp AH$ 于点 G' ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD = 6$, $\therefore AD = BC = 6$, $\because$ 点 E 为边 AD 的中点, 点 H 为 BC 的中点,

$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $\therefore AE = CH$,

$\because AE \parallel CH$, $\therefore$ 四边形 $AHCE$ 为平行四边形, $\therefore AH \parallel CE$,

$\because BH = CH$, $\therefore AH$ 与 BF 的交点为 BF 的中点, $\because G$ 为 BF 的中点,

$\therefore AH$ 过点 G , 即点 G 在线段 AH 上随点 F 运动而运动, 当 $DG \perp AH$ 时有最小值, 则 DG' 即为所求,

$\because \angle ABH = 90^\circ$, $AB = 4$, $BH = 3$, $\therefore AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

Q $\angle AOC = 90^\circ$, $\therefore \triangle AOC \cong \triangle CHB (AAS)$, $\therefore HC = OA, HB = OC$,

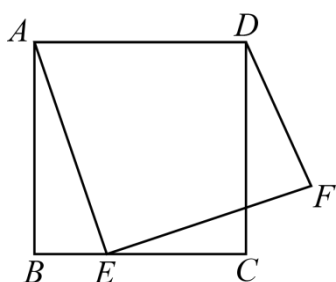
$\therefore$ 点 $C(0, m)$, 点 $A(1, 0)$, $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(m, m+1)$, $\therefore$ 点 B 的运动轨迹是直线 $y = x + 1$,

$\therefore$ 直线 $y = x + 1$ 交 x 轴于 $E(-1, 0)$, 交 y 轴于 $F(0, 1)$, $\therefore OE = OF = 1, EF = \sqrt{2}$,

过点 O 作 $OT \perp EF$ 于 T . 则 $OT = \frac{1}{2}EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

根据垂线段最短可知, 当点 B 与点 T 重合时, OB 的值最小, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故答案为: $(m, m+1); \frac{\sqrt{2}}{2}$.

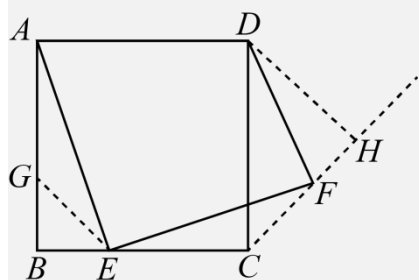
7. (2024·山东校考一模) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, 点 E 为边 BC 上一动点, 将点 A 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到点 F , 则 DF 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】 AB 上截取 $AG = EC$, 过点 D 作 $DH \perp CF$ 交 CF 的延长线于点 H , 证明 $\triangle AGE \cong \triangle ECF$, $\triangle DCH$ 是等腰直角三角形, 进而根据垂线段最短即可求解.

【详解】 如图, AB 上截取 $AG = EC$, 过点 D 作 $DH \perp CF$ 交 CF 的延长线于点 H ,



$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, 将点 A 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到点 F ,

$\therefore BG = BE \therefore \triangle BEG$ 是等腰直角三角形 $\therefore \angle AEF = 90^\circ, \angle ABE = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle AEB = \angle AEB + \angle FEC = 90^\circ \therefore \angle GAE = \angle BAE = \angle CEF$

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle ECF \therefore \angle AGE = \angle ECF = 135^\circ \therefore \angle DCF = 45^\circ \therefore F$ 在射线 CF 上运动,

则 $\triangle DCH$ 是等腰直角三角形, $\therefore F$ 与 H 点重合时, DF 取得最小值, 等于 $DH = \frac{\sqrt{2}}{2}DC$

$\therefore DC = 4 \therefore DH = 2\sqrt{2}$ 即 DF 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 故答案为: $2\sqrt{2}$

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的性质, 垂线段最短, 求得 F 的轨迹是解题的关键.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/348071101111007042>