

回顾

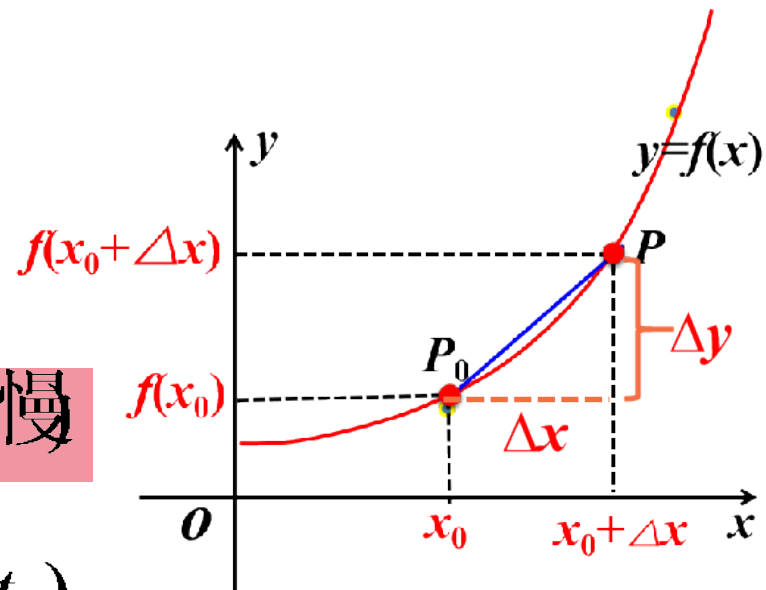
$$\text{导数的定义 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数的物理意义 $f(x)$ 在 x_0 处的瞬时变化率 变化快慢

如: 路程 $s(t)$ 在 t_0 处的瞬时变化率为 $v(t_0) = v(t_0)$

导数的几何意义 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率 即 $k = f'(x_0)$

$$\text{导函数的定义 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



从导函数的定义可知，一个函数的导数是唯一确定的. 在必修第一册教材中我们学过基本初等函数，并且知道，很多复杂的函数都是通过对这些函数进行加、减、乘、除等运算得到的.

由此自然想到，能否先求出**基本初等函数的导数**，然后研究出导数的“运算法则”，这样就可以利用**导数的运算法则**和基本初等函数的导数求出**复杂函数的导数**.

本节我们就来研究这些问题.

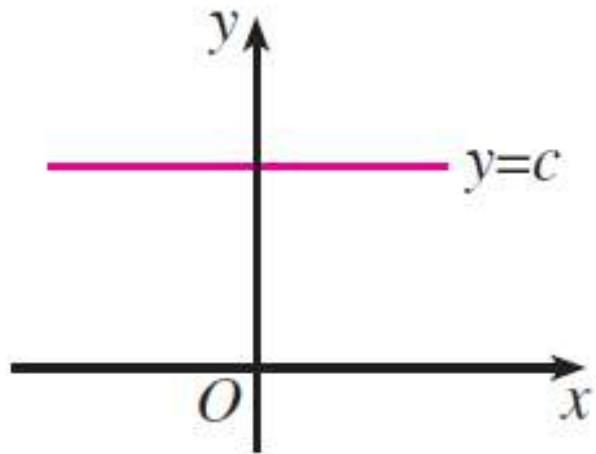
5.2.1 基本初等函数的导数

推导基本初等函数的导(函)数

$$\text{依据: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. 函数 $y = f(x) = c$ 的导(函)数: $y' = 0$

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0, \therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$



若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数,

则 $y'=0$ 的物理意义是

速度为零

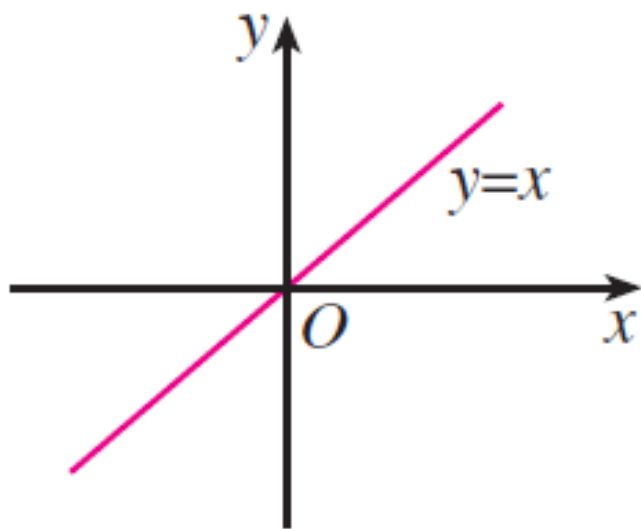
物体处于静止状态

2. 函数 $y = f(x) = x$ 的导(函)数: $y' = 1$

若 $y = kx$, 则 $y' = k$.

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$



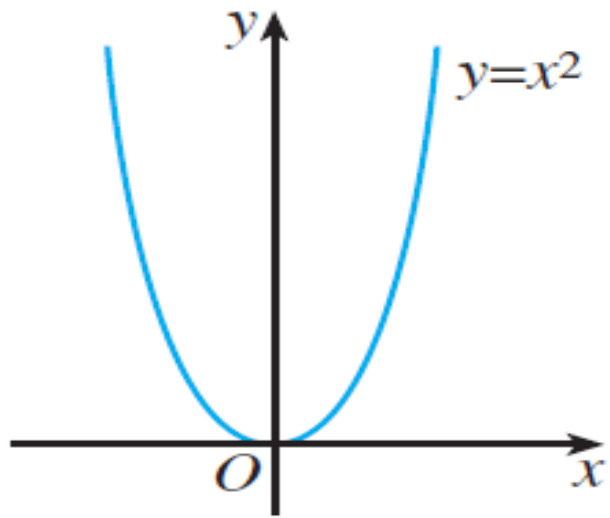
若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数,

则 $y'=1$ 的物理意义是

3. 函数 $y = f(x) = x^2$ 的导(函)数: $y' = 2x$

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$



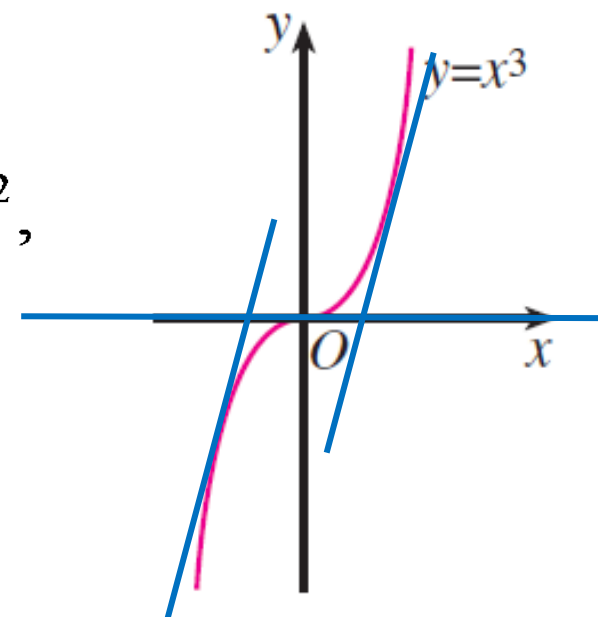
$y' = 2x$ 的几何意义是

若 $y = x^2$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y' = 2x$ 的物理意义是某物体做瞬时速度为 $2x$ 的变速运动.

4. 函数 $y = f(x) = x^3$ 的导(函)数: $y' = 3x^2$

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

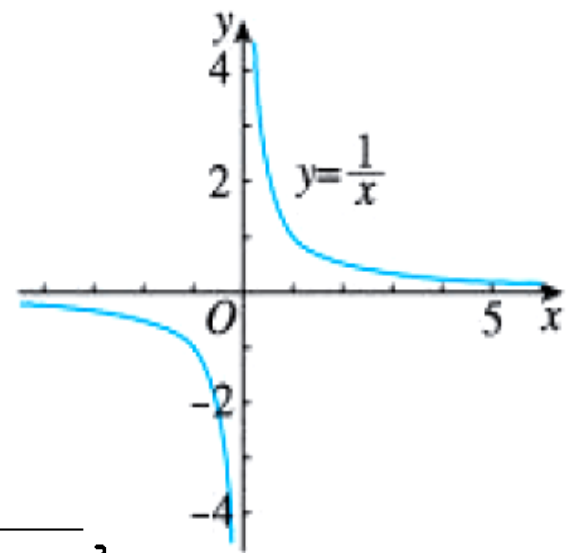
$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$



$y' = 3x^2$ 的几何意义是函数 $y = x^3$ 的图象上点 (x, y) 处的切线斜率为 $3x^2$, 即随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化, 且恒为非负数.

5. 函数 $y = f(x) = \frac{1}{x}$ 的导(函)数:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$



$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)},$$

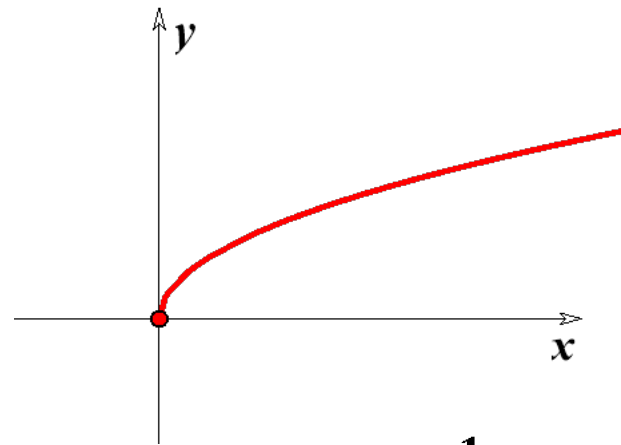
$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

$x > 0$ 时, x 越大, $|y'|$ 越小, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 减少得越来越慢.

$x < 0$ 时, x 越大, $|y'|$ 越大, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 减少得越来越快;

6. 函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导(函)数:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

追问: 该函数的定义域及其导数的定义域是否一样?

不一样,
原函数的定义域为 $\{x | x \geq 0\}$
,
导数的定义域为 $\{x | x > 0\}$.

问题: 前面几个函数都是我们学过的一类基本初等函数——幂函数，
根据这些幂函数的导数结果，

$$x' = 1,$$

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = -x^{-2},$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

你能归纳出对于一般幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的导函数公式吗？

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/348073062035006050>