专项训练九　与圆的切线有关的证明与计算

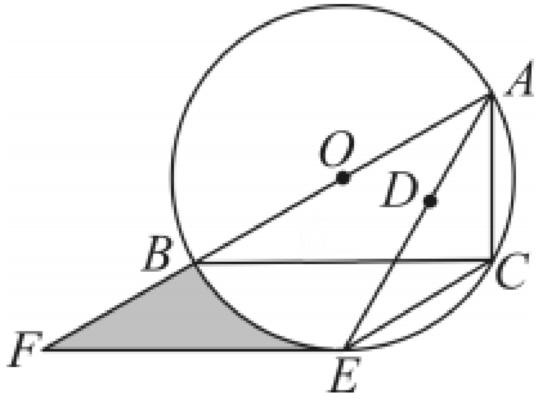
类型一：与切线性质有关的证明与计算

(省卷2020T26，2018T27)

1.(2024·宁夏)如图，⊙O是△ABC的外接圆，AB为直径，点D是△ABC的内心，连接AD并延长交⊙O于点E，过点E作⊙O的切线交AB的延长线于点F.

(1)求证：BC∥EF；

(2)连接CE，若⊙O的半径为2，$\sin\angle AEC=\frac{1}{2}$，求阴影部分的面积(结果用含π的式子表示).



(1)证明：连接OE，交BC于点G，

∵OA = OE，∴∠OAE = ∠OEA，

∵D为△ABC 的内心，

∴∠OAE = ∠CAE，

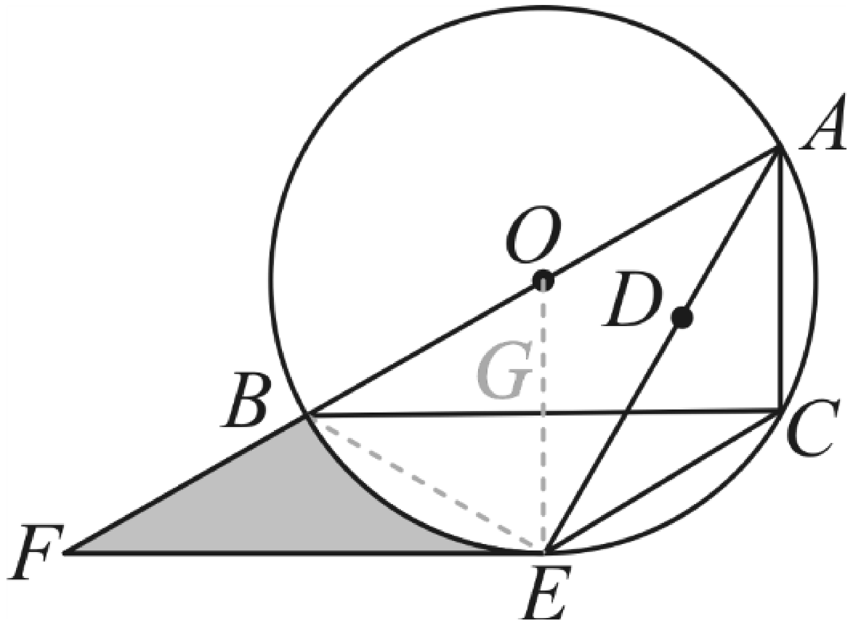
∴∠OEA = ∠CAE，

∴OE∥AC，而AB为⊙O的直径，

∴∠ACB = 90°，∴∠BGO = 90°，

又∵EF为⊙O的切线且OE为⊙O的半径，

∴∠FEO = 90° = ∠BGO，∴BC∥EF.



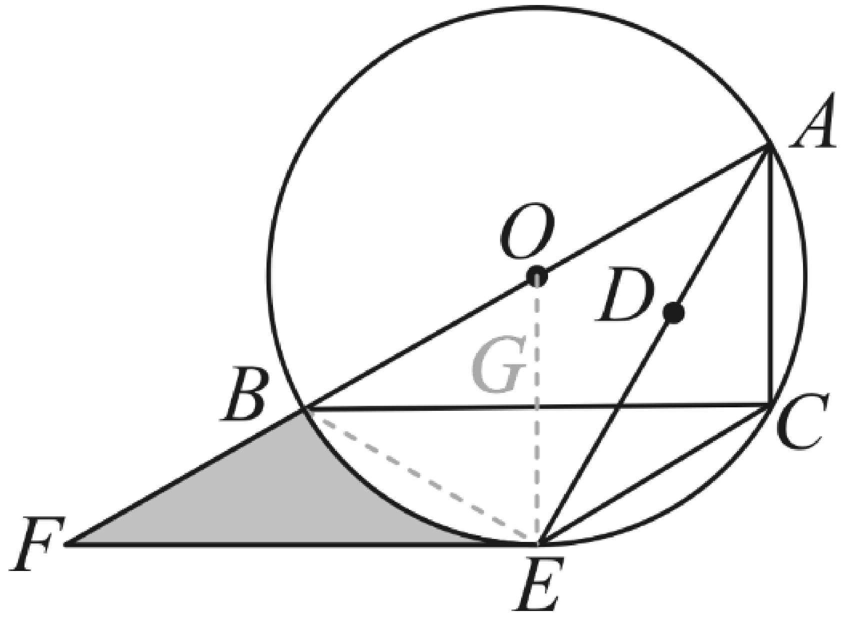
(2)解：连接BE，

$\because \sin\angle AEC = \frac{1}{2}$，

$\therefore \angle ABC = \angle EFO = \angle AEC = 30°$，

$\therefore \angle BOE = 60°$，$\therefore EF = OE \cdot \tan 60° = 2\sqrt{3}$，

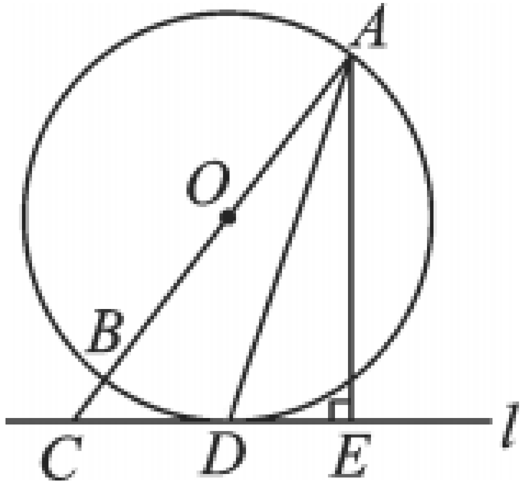
$\therefore S_{阴影} = S_{\triangle EFO} - S_{扇形BOE} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$.



2．(2024·临夏州)如图，直线l与⊙O相切于点D，AB为⊙O直径，过点A作AE⊥l于点E，延长AB交直线l于点C.

(1)求证：AD平分∠CAE；

(2)若BC＝1，DC＝3，求⊙O的半径．



（1）证明：连接OD，

∵直线l与⊙O相切于点D，

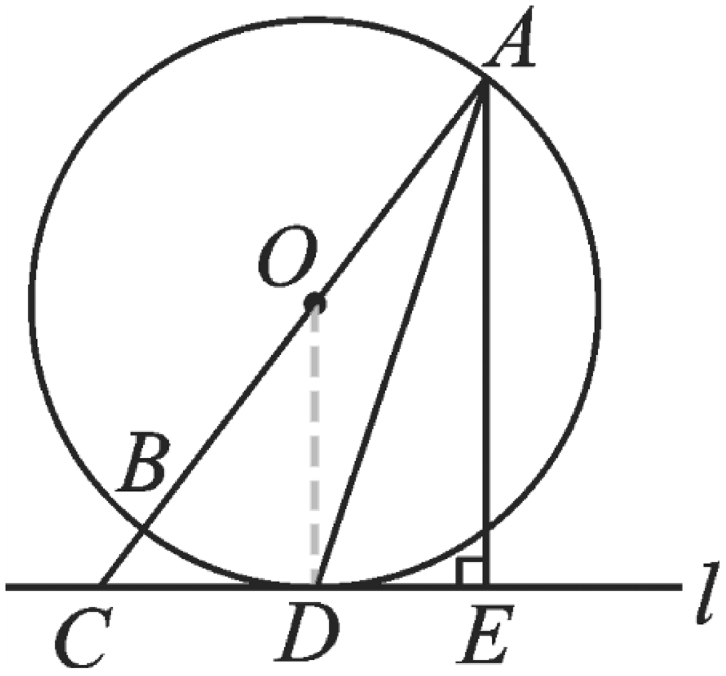
∴$OD \perp l$，

∵$AE \perp l$，∴$OD // AE$，

∴$\angle DAE = \angle ADO$，

∵$OA = OD$，∴$\angle DAO = \angle ADO$，

∴$\angle DAO = \angle DAE$，即AD平分$\angle CAE$.



（2）解：设$\odot O$的半径为r，

则$OC=OB+BC=r+1$，$OD=r$，

在$Rt\triangle OCD$中，$OD^2+CD^2=OC^2$，

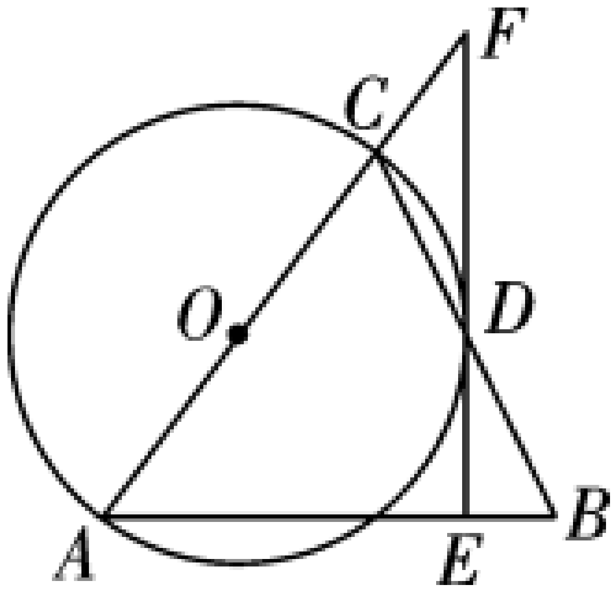
$\therefore r^2+3^2=(r+1)^2$，解得$r=4$，

$\therefore \odot O$的半径为4.

3．(2024·永昌县模拟)如图，在△ABC中，AB＝AC，以AC为直径作⊙O交BC于点D，过点D作⊙O的切线EF，交AB和AC的延长线于E，F.

(1)求证：EF⊥AB；

(2)当AE＝6，$\sin\angle CFD=\frac{5}{3}$时，求EB的长.



(1)证明：连接OD，

$\because OC = OD$，$\therefore \angle OCD = \angle ODC$，

$\because AB = AC$，

$\therefore \angle ACB = \angle B$，

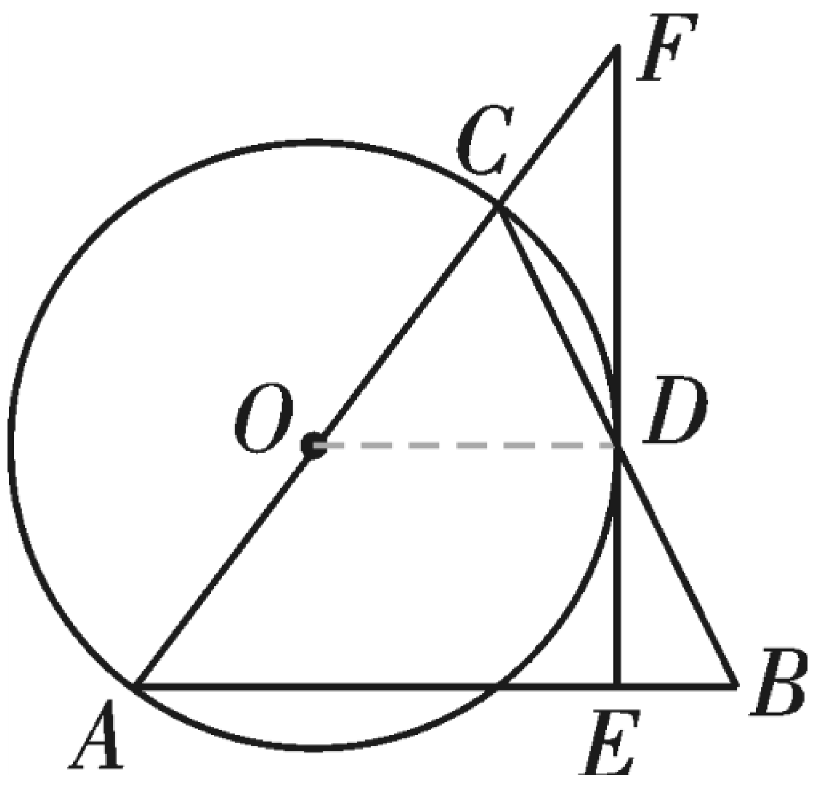
$\therefore \angle ODC = \angle B$，

$\therefore OD \parallel AB$，$\therefore \angle ODF = \angle AEF$，

$\because$EF与⊙O相切，$\therefore OD \perp EF$，

$\therefore \angle ODF = 90^\circ$，$\therefore \angle AEF = \angle ODF = 90^\circ$，

$\therefore EF \perp AB$.



(2)解：设$OA=OD=OC=r$，

由(1)知：$OD \parallel AB$，$OD \perp EF$，

在$Rt\triangle AEF$中，$\sin\angle CFD=\frac{AE}{AF}=\frac{3}{5}$，$AE=6$，

$\therefore AF=10$，

$\because OD \parallel AB$，$\therefore \triangle ODF \backsim \triangle AEF$，

$\therefore \frac{OF}{AF}=\frac{OD}{AE}$，$\therefore \frac{10-r}{10}=\frac{r}{6}$，

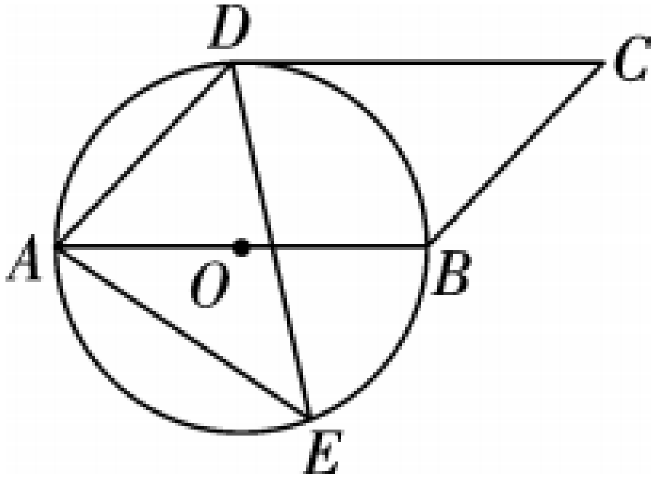
解得$r=\frac{15}{4}$，$\therefore AB=AC=2r=\frac{15}{2}$，

$\therefore EB=AB-AE=\frac{15}{2}-6=\frac{3}{2}$.

4．(2024·凉州区模拟)如图，四边形ABCD是平行四边形，以边AB为直径作⊙O，⊙O与边CD相切于点D.点E是⊙O上一点，连接AE，DE.

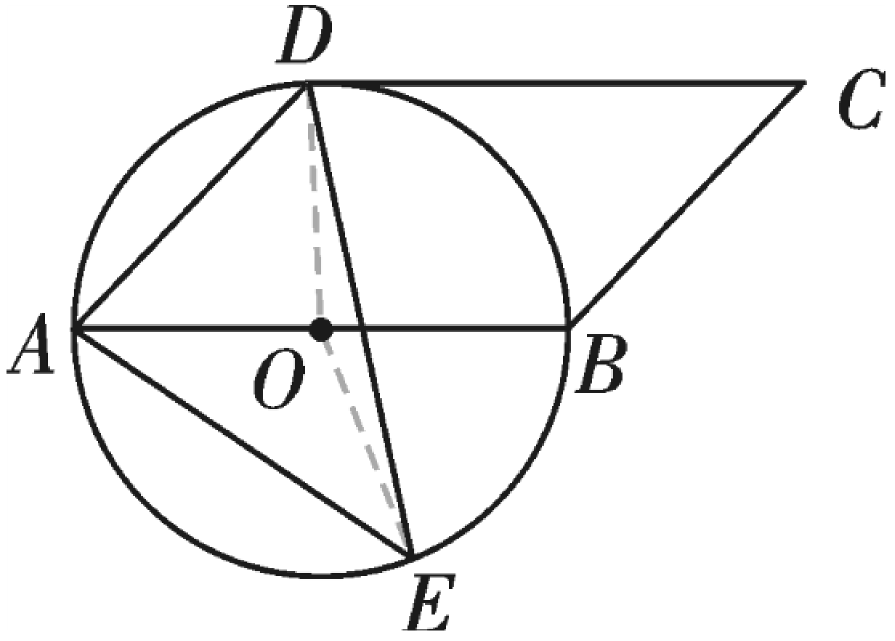
(1)试判断AD与AB的数量关系，并说明理由.

(2)若AB＝10，∠ADE＝60°，求$\overset{\frown}{AE}$的长.



解：(1)$AB=\sqrt{2}AD$，

理由：连接OD，



∵CD与⊙O相切，

∴$OD\perp CD$，

∵四边形ABCD是平行四边形，

∴$CD\parallel AB$，∴$OD\perp AB$，

∵$OA=OD$，

∴△OAD是等腰直角三角形，∴$AD=\sqrt{2}OA$，

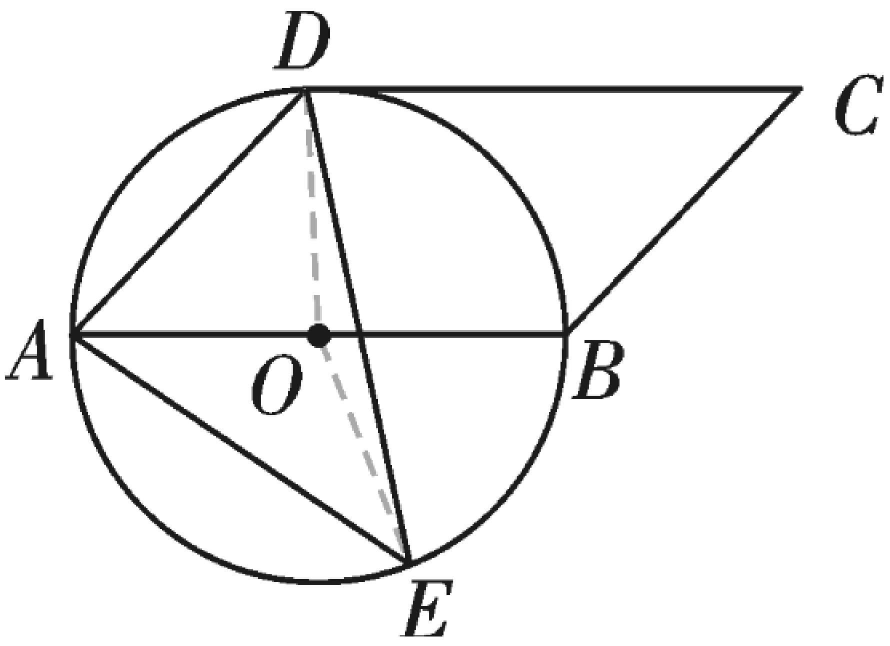
∵$OA=\frac{1}{2}AB$，∴$AB=\sqrt{2}AD$.

(2)连接OE,

$\therefore \angle AOE = 2\angle ADE = 2\times 60° = 120°$,

$\because AB = 10$, $\therefore OA = \frac{1}{2}AB = 5$,

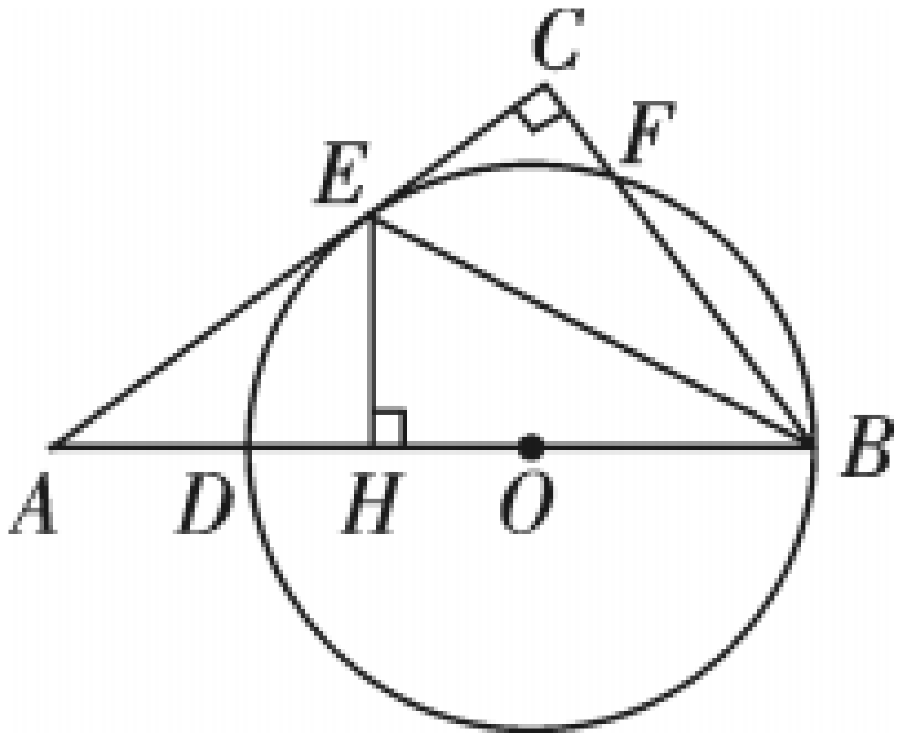
$\therefore \overset{\frown}{AE}$的长$= \frac{120\pi\times 5}{180} = \frac{10\pi}{3}$.



5．(2024·大武口区模拟)如图，在△ABC中，$\angle C=90^{\circ}$，D是AB边上一点，以BD为直径的⊙O与边AC相切于点E，与边BC交于点F，过点E作$EH\perp AB$于点H，连接BE.

(1)求证：$BC=BH$；

(2)若$AB=5$，$AC=4$，求CE的长．



(1)证明：连接OE，

∵AC为⊙O的切线，

∴$\angle AEO=90^\circ$，

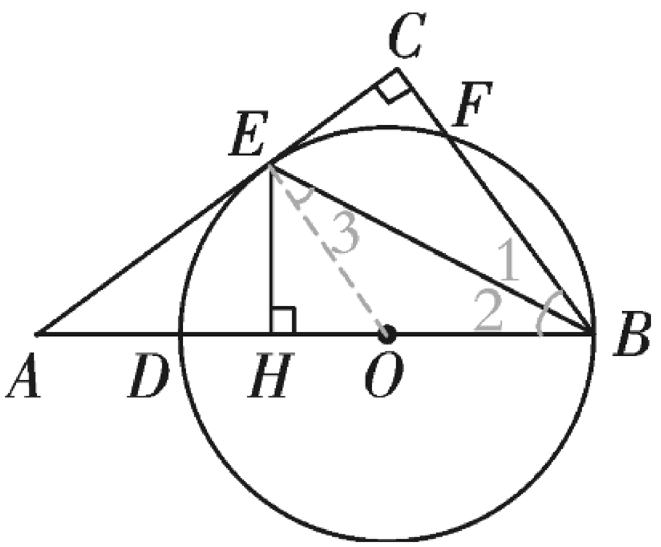
∴$OE\parallel BC$，

∴$\angle 1=\angle 3$，

∵$OB=OE$，∴$\angle 2=\angle 3$，∴$\angle 1=\angle 2$，

∴$EH=EC$，∴$Rt\triangle BEH\cong Rt\triangle BEC(HL)$，

∴$BC=BH$.



(2)解：在Rt△ABC中，由勾股定理得$BC=3$，

由△AOE∽△ABC，得$OE=\frac{18}{5}$，∴$AO=\frac{25}{8}$，

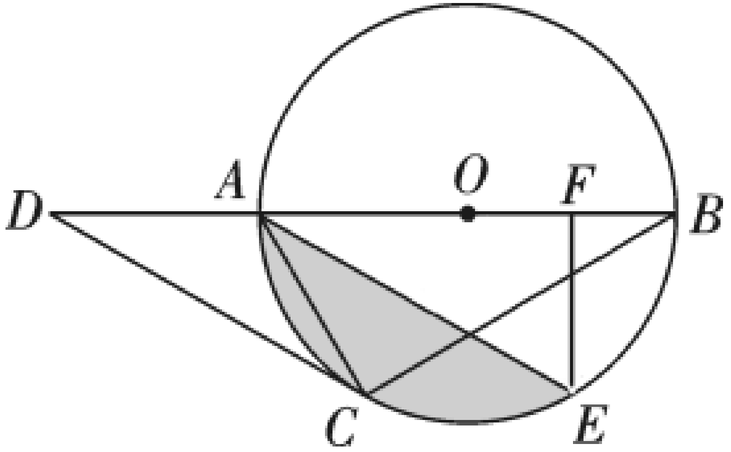
在Rt△AOE中，$AE=\frac{5}{2}$，

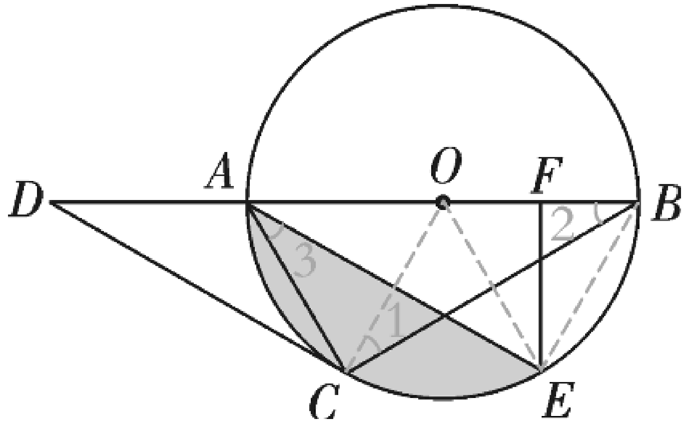
∴$CE=AC-AE=\frac{3}{2}$.

6．(2024·乐山)如图，⊙O是△ABC的外接圆，AB为直径，过点C作⊙O的切线CD交BA的延长线于点D，E为上一点，且=．

(1)求证：DC∥AE；

(2)若EF垂直平分OB，DA＝3，求阴影部分的面积．





(1)证明：连接OC.

∵CD为⊙O的切线，AB为直径.

∴$\angle OCD=\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle DCA=\angle 1$.

∵$OC=OB$，∴$\angle 1=\angle 2$.∵$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$，∴$\angle 2=\angle 3$.

∴$\angle DCA=\angle 3$.∴$DC\parallel AE$.