

重庆市黔江中学校 2023-2024 学年高一下学期 3 月月考数学

试题

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin C = \frac{1}{3}$, $a = 3$, $c = 4$, 则 $\sin A =$ ()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{6}$
- 已知 \vec{a} , \vec{b} 是不共线的向量, $\vec{OA} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\vec{OB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{OC} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, 若 A, B, C 三点共线, 则实数 λ, μ 满足 ()
 A. $\lambda = \mu - 5$ B. $\lambda = \mu + 5$ C. $\lambda = \mu - 1$ D. $\lambda = \mu + 1$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 边上, 且 $BD = DC$, 点 E 在 AC 边上, 且 $AE = \frac{4}{5}AC$, 连接 DE , 若 $\vec{DE} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$, 则 $m + n =$ ()
 A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 若 $a = 2$, $b = 3$, $\angle A = 30^\circ$, 则解此三角形的结果有 ()
 A. 无解 B. 一解 C. 两解 D. 一解或两解
- 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 等于 ()
 A. $2 - \sqrt{5}$ B. $2 + \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 2$ D. $\pm(\sqrt{5} - 2)$
- 已知三个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 的最小值为 ()
 A. $-\frac{5}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{11}}{2}$
- 在日常生活中, 我们会看到如图所示的情境, 两个人共提一个行李包. 假设行李包所受重力为 \vec{G} , 作用在行李包上的两个拉力分别为 \vec{F}_1, \vec{F}_2 , 且 $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, \vec{F}_1 与 \vec{F}_2 的夹角为 θ , 下列结论中正确的是 ()



- A. θ 越小越费力, θ 越大越省力

B. θ 的范围为 $[0, \pi]$

C. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $|\vec{F}_1| = |\vec{G}|$

D. 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $|\vec{F}_1| = |\vec{G}|$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sqrt{3}c}{a \cos B} = \tan A + \tan B$, 下列结论正确的是 ()

A. $A = \frac{\pi}{6}$

B. 当 $a = 2, c = 4$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$

C. 若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $AD = 2\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

D. 当 $b - c = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形

二、多选题

9. 有下列说法, 其中正确的说法为 ()

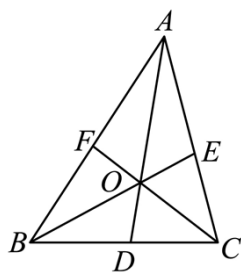
A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$

B. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则存在唯一实数 λ 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

C. 两个非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 共线且反向

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 是 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 是锐角的必要不充分条件

10. 如图, M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内任意一点, O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 ()



A. $\vec{AD} + \vec{BE} = \vec{CF}$

B. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MO}$

C. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF}$

D. $\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0$

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 若 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 ()

A. $\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $f(x + 2\pi) = f(x)$

C. $\omega \geq 1$

D. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上无最值

12. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=4, BC=\sqrt{13}$, D 在 BC 上, AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线, E 为 AC 中点, 下列结论正确的是 ()

- A. $BE = \sqrt{3}$
 B. $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$
 C. $AD = \frac{4\sqrt{2}}{5}$
 D. P 在 $\triangle ABE$ 的外接圆上, 则 $PB+2PE$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$

三、填空题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, a=5, b=7, c = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 $\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(2,-3)$, 若 \vec{c} 满足 $\vec{c} \perp (\vec{a}+\vec{b})$ 且 $\vec{b} // (\vec{a}-\vec{c})$, 则 $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 由二维平面向量可以类比得到三维空间向量一些公式, 比如若 $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ 等. 非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 若 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 若 $\vec{a}=(2,3,-4), \vec{b}=(2,-3,2)$, 则与 \vec{a}, \vec{b} 向量垂直的单位向量的坐标是 (写出一个即可) $\underline{\hspace{2cm}}$

16. $\triangle ABC$ 中, $a=7, b=5, c=3$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内切圆 M 上一点, 且 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x+y$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

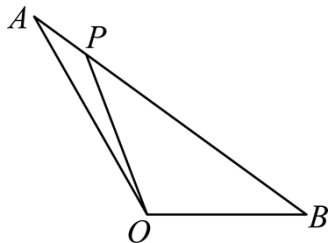
四、解答题

17. 已知向量 $\vec{a}=(2\sin x, 1), \vec{b}=(2\cos x, 1), x \in R$.

(1) 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 求向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 的坐标;

(2) 设函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, 将函数 $f(x)$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $g(x)$ 的最小值.

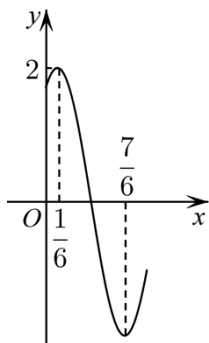
18. 如图, 在 $\triangle OAB$ 中, P 为线段 AB 上的一个动点 (不含端点), 且满足 $\vec{OP} = \lambda\vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}$.



(1)若 $\lambda = \frac{1}{3}$, 用向量 \vec{OA}, \vec{OB} 表示 \vec{OP} ;

(2)若 $|\vec{OA}| = 6, |\vec{OB}| = 2$, 且 $\angle AOB = 120^\circ$, 求 $\vec{OP} \cdot \vec{AB}$ 的取值范围.

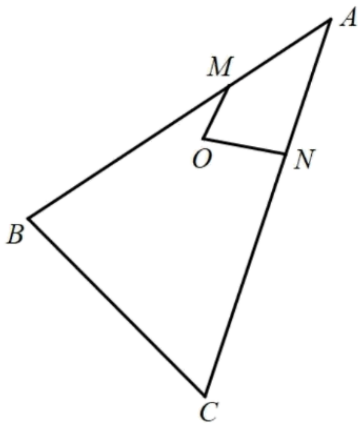
19. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)求方程 $f(x) = -\frac{1}{2}$ 在区间 $[0, 4]$ 内的所有实数根之和.

20. 在如图所示的平面图形中, $OM = 1, ON = 2$, $\vec{BM} = 2\vec{MA}, \vec{CN} = 2\vec{NA}$, 求:



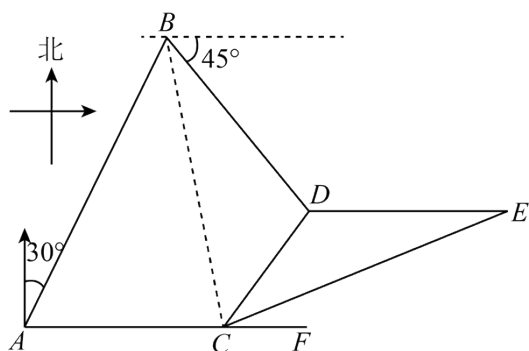
(1)设 $\vec{BC} = x\vec{OM} + y\vec{ON}$, 求 $x + y$ 的值;

(2)若 $OM \parallel CN$ 且 $\angle MON \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 求 $\vec{AM} \cdot \vec{AC}$ 的最小值.

21. 如图, 某巡逻艇在 A 处发现北偏东 30° 相距 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 海里的 B 处有一艘走私船, 正

沿东偏南 45° 的方向以 3 海里/小时的速度向我海岸行驶, 巡逻艇立即以 $2\sqrt{2}$ 海里/

小时的速度沿着正东方向直线追去，1 小时后，巡逻艇到达 C 处，走私船到达 D 处，此时走私船发现了巡逻艇，立即改变航向，以原速向正东方向逃窜，巡逻艇立即加速以 $3\sqrt{2}$ 海里 / 小时的速度沿着直线追击



(1) 当走私船发现了巡逻艇时，两船相距多少海里

(2) 问巡逻艇应该沿什么方向去追，才能最快追上走私船

22. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 且 $\frac{2\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2}$.

(1) 求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围；

(2) 若 $C = \frac{\pi}{2}$ ， $BC = 2$ ， O 为 BC 中点， P 为线段 AO 上一点，且满足 $\vec{BP} \cdot \vec{CP} = 0$. 求 AP 的

值，并求此时 $\triangle BPC$ 的面积 S .

参考答案:

1. B

【分析】

由正弦定理求解可得.

【详解】由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{4}.$$

故选: B.

2. B

【解析】根据向量的线性运算方法, 分别求得 $\overrightarrow{AB} = (3-\lambda)\vec{a} - (2+\mu)\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$;

再由 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$, 得到 $3-\lambda = -(2+\mu)$, 即可求解.

【详解】由 $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$,

可得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3-\lambda)\vec{a} - (2+\mu)\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$;

若 A, B, C 三点共线, 则 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$, 可得 $3-\lambda = -(2+\mu)$, 化简得 $\lambda = \mu + 5$.

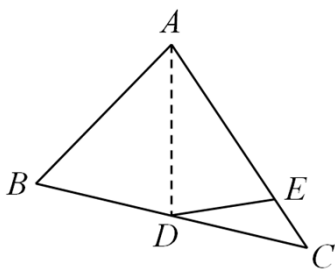
故选: B.

3. A

【分析】

由已知结合向量的线性表示及平面向量基本定理可求 m , n , 进而可求 $m+n$.

【详解】解: 如图, 连接 AD



$$\text{则 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{3}{10}, \quad \text{则 } m+n = -\frac{1}{5}.$$

故选: A.

4. C

【分析】

根据题意作出图形，推得 $CD < BC < AC$ ，从而得到圆 C 与射线 AE 有两个交点，进而得到满足题意的三角形有两个，由此得解。

【详解】依题意，作出 $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = b = 3$ ， B 落在射线 AE 上，过 C 作 $CD \perp AE$ 于 D ，如图，

则在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，由正弦定理 $\frac{CD}{\sin A} = \frac{AC}{\sin \angle CDA}$ ，得 $CD = \frac{AC \sin A}{\sin \angle CDA} = \frac{3 \times \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{3}{2}$ ，

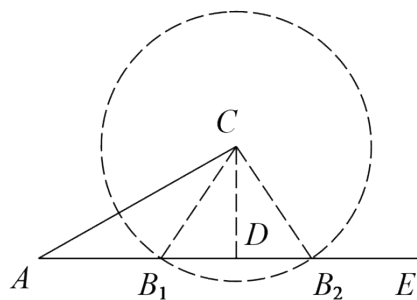
因为 $BC = a = 2$ ，所以 $CD < BC < AC$ ，

故以 C 为圆心，半径为 2 的圆 C 与射线 AE 相交，即有两个交点 B_1, B_2 ，

显然，这个两交点 B_1, B_2 都可以作为点 B ，与 A, C 构造 $\triangle ABC$ ，且 $BC = 2$ ，

所以满足题意的三角形有两个，即解此三角形的结果有两解。

故选：C.



5. C

【分析】应用半角正切公式即可求值，注意法二： $\frac{\alpha}{2}$ 正切值的符号。

【详解】方法一： $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \sqrt{5} - 2.$$

方法二： $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0$ ， $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0$ ，

$\therefore \alpha$ 的终边落在第一象限， $\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在第一或第三象限，即 $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ ，

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{5} - 2.$$

故选：C

6. B

【分析】

由题意可得 $|\vec{a} + \vec{b}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 设 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 \vec{c} 所成的角为 θ , 则有 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \theta$, 根据 $\theta \in [0, \pi]$ 求解即可.

【详解】解: 由题意可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,

又因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}$,

所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

设 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 \vec{c} 所成的角为 θ ,

则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \theta$,

又因为 $\theta \in [0, \pi]$,

所以 $\cos \theta \in [-1, 1]$,

所以 $\frac{\sqrt{10}}{2} \cos \theta \in [-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}]$,

即 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \in [-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}]$,

所以 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选: B.

7. D

【分析】根据 $|\vec{G}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ 为定值, 求出 $|\vec{F}_1|^2 = \frac{|\vec{G}|^2}{2(1 + \cos \theta)}$, 再对选项进行分析、判断即可.

【详解】解: 对 A, Q $|\vec{G}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ 为定值,

$\therefore |\vec{G}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \times |\vec{F}_2| \times \cos \theta = 2|\vec{F}_1|^2 (1 + \cos \theta)$,

解得: $|\vec{F}_1|^2 = \frac{|\vec{G}|^2}{2(1 + \cos \theta)}$;

由题意知: $\theta \in (0, \pi)$ 时, $y = \cos \theta$ 单调递减,

$\therefore |\vec{F}_1|^2$ 单调递增,

即 θ 越大越费力, θ 越小越省力, 故 A 错误;

对 B, 当 $\theta = \pi$ 时, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ 不满足题意, 故 B 错误;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/355002040104011132>