# 专题 13 一网打尽外接球、内切球与棱切球问题

## 【目录】

## 考情分析

纵观近几年高考对于组合体的考查，与球相关的外接与内切问题是高考命题的热点之一．高考命题小题综合化倾向尤为明显，要求学生有较强的空间想象能力和准确的计算能力，才能顺利解答．从近几年全国高考命题来看，这部分内容以选择题、填空题为主，大题很少见，此部分是重点也是一个难点，属于中等难度．

<table>
<tr><th>考点要求</th><th>考题统计</th><th>考情分析</th></tr>
<tr><td>外接球</td><td>2022 年乙卷第 12 题，5 分<br>2022 年 II 卷第 7 题，5 分<br>2022 年 I 卷第 8 题，5 分<br>2021 年甲卷第 11 题，5 分</td><td rowspan="3">【命题预测】<br>预测 2024 年高考，多以小题形式出现，也有可能会将其渗透在解答题的表达之中，相对独立．具体估计为：<br>（1）以选择题或填空题形式出现，考查学生的综合推理能力．<br>（2）热点是锥体内切球与棱切球问题．</td></tr>
<tr><td>内切球</td><td>2020 年 III 卷第 16 题，5 分</td></tr>
<tr><td>棱切球</td><td>2023 年 I 卷第 1 题，5 分</td></tr>
</table>

## 知识建构

- 一网打尽外接球、内切球与棱切球问题
  - 正方体、长方体外接球
  - 正四面体外接球
  - 对棱相等的三棱锥外接球
  - 直棱柱外接球
  - 直棱锥外接球
  - 正棱锥与侧棱相等模型
  - 侧棱为外接球直径模型
  - 共斜边拼接模型
  - 垂面模型
  - 二面角模型
  - 坐标法
  - 圆锥圆柱圆台模型
  - 锥体内切球
  - 棱切球

## 方法技巧

**1、补成长方体**

（1）若三棱锥的三条侧棱两两互相垂直，则可将其放入某个长方体内，如图 1 所示.

（2）若三棱锥的四个面均是直角三角形，则此时可构造长方体，如图 2 所示.

（3）正四面体 $P-ABC$ 可以补形为正方体且正方体的棱长 $a=\dfrac{PA}{\sqrt{2}}$，如图 3 所示.

（4）若三棱锥的对棱两两相等，则可将其放入某个长方体内，如图 4 所示

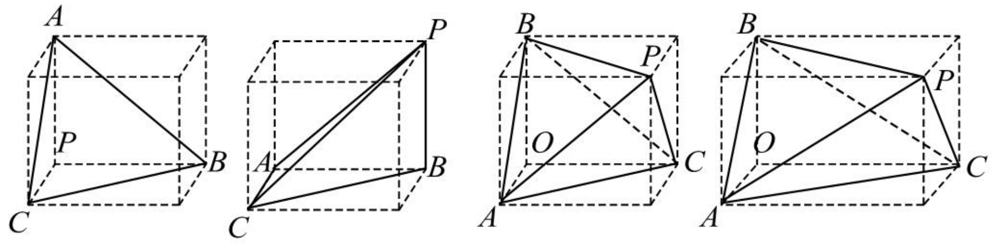



图 1　　图 2　　图 3　　图 4

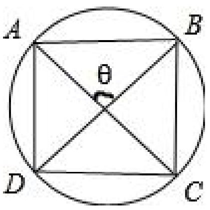
## 真题研析

1．（2022•乙卷）已知球 $O$ 的半径为 1，四棱锥的顶点为 $O$，底面的四个顶点均在球 $O$ 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为(　　)

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】$C$

【解析】对于圆内接四边形，如图所示，




$S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot sin\theta\quad \dfrac{1}{2}2r\cdot 2r\cdot sin90^{\circ}=2r^{2}$，

当且仅当 $AC$， $BD$ 为圆的直径，且 $AC\perp BD$ 时，等号成立，此时四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ 当该四棱锥的体积最大时，底面一定为正方形，设底面边长为 $a$，底面所在圆的半径为 $r$，

则 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

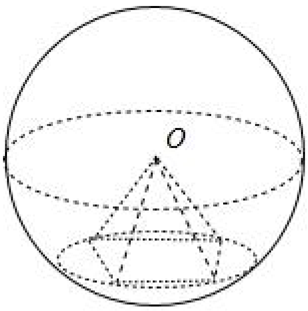
$\therefore$ 该四棱锥的高 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，

$\therefore$ 该四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot(1-\frac{a^2}{2})}\quad\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+1-\frac{a^2}{2}}{3})^3}=\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{1}{3})^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$，

当且仅当 $\frac{a^2}{4}=1-\frac{a^2}{2}$，即 $a^2=\frac{4}{3}$ 时，等号成立，

$\therefore$ 该四棱锥的体积最大时，其高 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：$C$ .

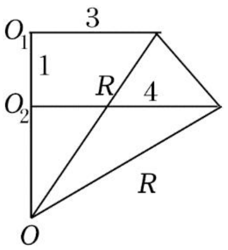



2．（2022•新高考Ⅱ）已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为(　　)

A．$100\pi$　　B．$128\pi$　　C．$144\pi$　　D．$192\pi$

【答案】$A$

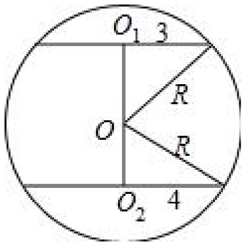
【解析】当球心在台体外时，由题意得，上底面所在平面截球所得圆的半径为 $\frac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=3$，下底面所在平面截球所得圆的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=4$，如图，




设球的半径为 $R$，则轴截面中由几何知识可得 $\sqrt{R^2-3^2}-\sqrt{R^2-4^2}=1$，解得 $R=5$，

$\therefore$ 该球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times 25=100\pi$ .

当球心在台体内时，如图，




此时$\sqrt{R^2-3^2}+\sqrt{R^2-4^2}=1$，无解．

综上，该球的表面积为$100\pi$．

故选：$A$．

3．（2022•新高考Ⅰ）已知正四棱锥的侧棱长为$l$，其各顶点都在同一球面上．若该球的体积为$36\pi$，且$3\quad l\quad 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是(　　)

A．$[18，\dfrac{81}{4}]$　　B．$[\dfrac{27}{4}，\dfrac{81}{4}]$　　C．$[\dfrac{27}{4}，\dfrac{64}{3}]$　　D．$[18，27]$

【答案】$C$

【解析】如图所示，正四棱锥$P-ABCD$各顶点都在同一球面上，连接$AC$与$BD$交于点$E$，连接$PE$，则球心$O$在直线$PE$上，连接$OA$，

设正四棱锥的底面边长为$a$，高为$h$，

在RtΔPAE中，$PA^2=AE^2+PE^2$，即$l^2=(\dfrac{\sqrt{2}a}{2})^2+h^2=\dfrac{1}{2}a^2+h^2$，

$\because$球$O$的体积为$36\pi$，$\therefore$球$O$的半径$R=3$，

在RtΔOAE中，$OA^2=OE^2+AE^2$，即$R^2=(h-3)^2+(\dfrac{\sqrt{2}a}{2})^2$，

$\therefore\dfrac{1}{2}a^2+h^2-6h=0$，$\therefore\dfrac{1}{2}a^2+h^2=6h$，

$\therefore l^2=6h$，又$\because 3\quad l\quad 3\sqrt{3}$，$\therefore\dfrac{3}{2}\quad h\quad\dfrac{9}{2}$，

$\therefore$该正四棱锥体积$V(h)=\dfrac{1}{3}a^2h=\dfrac{1}{3}(12h-2h^2)h=-\dfrac{2}{3}h^3+4h^2$，

$\because V'(h)=-2h^2+8h=2h(4-h)$，

$\therefore$当$\dfrac{3}{2}\quad h<4$时，$V'(h)>0$，$V(h)$单调递增；当$4<h\quad\dfrac{9}{2}$时，$V'(h)<0$，$V(h)$单调递减，

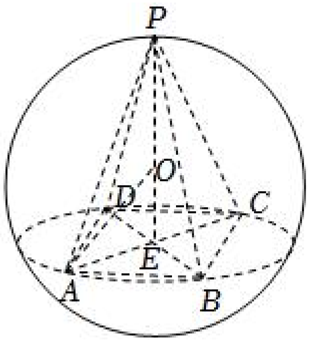
$\therefore V(h)_{max}=V$（4）$=\dfrac{64}{3}$，

又$\because V(\dfrac{3}{2})=\dfrac{27}{4}$，$V(\dfrac{9}{2})=\dfrac{81}{4}$，且$\dfrac{27}{4}<\dfrac{81}{4}$，

$\therefore\dfrac{27}{4}\quad V(h)\quad\dfrac{64}{3}$，

即该正四棱锥体积的取值范围是$[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$，

故选：$C$．




4．（2021•天津）两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为$\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为(　　)

A．$3\pi$　　B．$4\pi$　　C．$9\pi$　　D．$12\pi$

【答案】$B$

【解析】如图，设球$O$的半径为$R$，由题意，$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$，

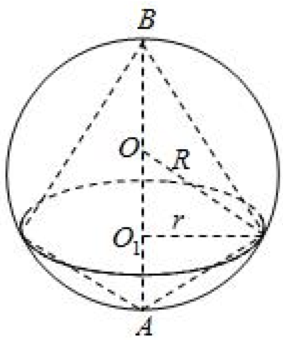
可得$R=2$，则球$O$的直径为4，

$\because$两个圆锥的高之比为$1:3$，$\therefore AO_1=1$，$BO_1=3$，

由直角三角形中的射影定理可得：$r^2=1\times 3$，即$r=\sqrt{3}$．

$\therefore$这两个圆锥的体积之和为$V=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times(1+3)=4\pi$．

故选：$B$．




5．（2021•甲卷）已知$A$，$B$，$C$是半径为1的球$O$的球面上的三个点，且$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，则三棱锥$O-ABC$的体积为(　　)

A．$\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】$A$

【解析】因为$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，

所以底面 $ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\Delta ABC$ 所在的截面圆的圆心 $O_1$ 为斜边 $AB$ 的中点，

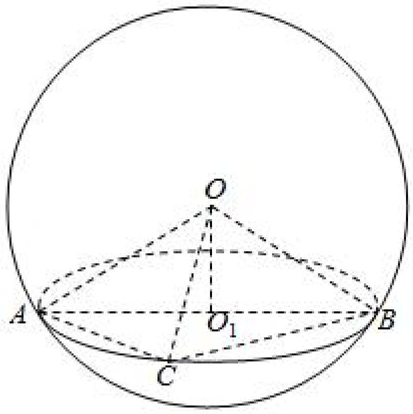
所以 $OO_1 \perp$ 平面 $ABC$，

在 $\text{Rt}\Delta\text{ABC}$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}$，则 $AO_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在 $\text{Rt}\Delta\text{AOO}_1$ 中，$OO_1=\sqrt{OA^2-AO_1^{\ 2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot OO_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$．

故选：$A$．




6．（2023•甲卷）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$O$ 为 $AC_1$ 的中点，若该正方体的棱与球 $O$ 的球面有公共点，则球 $O$ 的半径的取值范围是 ____．

【答案】$[2\sqrt{2}，\ 2\sqrt{3}]$．

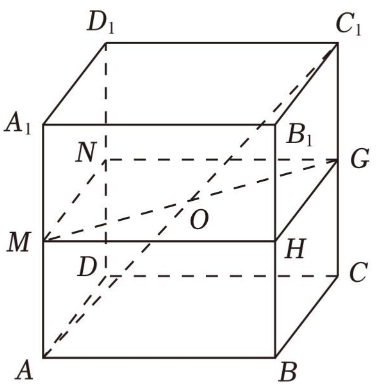
【解析】设球的半径为 $R$，

当球是正方体的外接球时，恰好经过正方体的每个顶点，所求的球的半径最大，

若半径变得更大，球会包含正方体，导致球面和棱没有交点，

正方体的外接球直径 $2R'$ 为体对角线长 $AC_1=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$，

即 $2R'=4\sqrt{3}$，$R'=2\sqrt{3}$，故 $R_{max}=2\sqrt{3}$，



分别取侧棱 $AA_1$， $BB_1$， $CC_1$， $DD_1$ 的中点 $M$， $H$， $G$， $N$，

则四边形 $MNGH$ 是边长为 4 的正方形，且 $O$ 为正方形 $MNGH$ 的对角线交点，

连接 $MG$，则 $MG=4\sqrt{2}$，

当球的一个大圆恰好是四边形 $MNGH$ 的外接圆，球的半径最小，

即 $R$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，

综上，球 $O$ 的半径的取值范围是 $[2\sqrt{2}$， $2\sqrt{3}]$.

故答案为：$[2\sqrt{2}$， $2\sqrt{3}]$.

7.（2023•甲卷）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $E$， $F$ 分别为 $CD$， $A_1B_1$ 的中点，则以 $EF$ 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 ____.

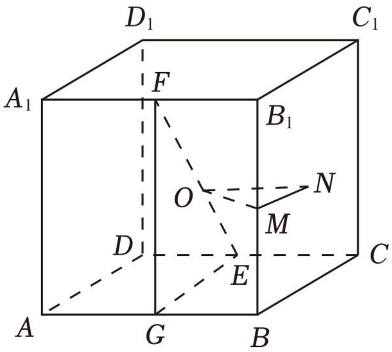
【答案】12.

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $E$， $F$ 分别为 $CD$， $A_1B_1$ 的中点，

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为 2， $EF$ 中点为 $O$，

取 $AB$， $BB_1$ 中点 $G$， $M$，侧面 $BB_1C_1C$ 的中心为 $N$，

连接 $FG$， $EG$， $OM$， $ON$， $MN$，如图，




由题意得 $O$ 为球心，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $EF=\sqrt{FG^2+EG^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

$\therefore R=\sqrt{2}$，

则球心 $O$ 到 $BB_1$ 的距离为 $OM=\sqrt{ON^2+MN^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 球 $O$ 与棱 $BB_1$ 相切，球面与棱 $BB_1$ 只有一个交点，

同理，根据正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对称性可知，其余各棱和球面也只有一个交点，

$\therefore$ 以 $EF$ 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 12.

故答案为：12.

8.（2020•新课标III）已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为 ____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】因为圆锥内半径最大的球应该为该圆锥的内切球，

如图，圆锥母线 $BS=3$，底面半径 $BC=1$，

则其高 $SC=\sqrt{BS^2-BC^2}=2\sqrt{2}$，

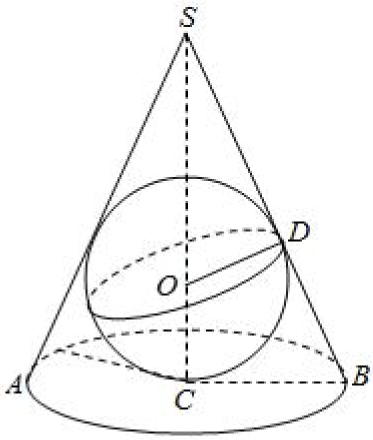
不妨设该内切球与母线 $BS$ 切于点 $D$，

令 $OD=OC=r$，由 $\Delta SOD\backsim\Delta SBC$，则 $\dfrac{OD}{OS}=\dfrac{BC}{BS}$，

即 $\dfrac{r}{2\sqrt{2}-r}=\dfrac{1}{3}$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$．




核心考点

## 考点一：正方体、长方体外接球

### 规律总结

1、正方体的外接球的球心为其体对角线的中点，半径为体对角线长的一半．

2、长方体的外接球的球心为其体对角线的中点，半径为体对角线长的一半．

### 题型特训

**例1．**（2023·四川·高三统考学业考试）若球的表面积为$48\pi$，则顶点均在该球球面上的正方体体积为（　）

A．256　　B．64　　C．27　　D．8

【答案】B

【解析】因为球的表面积为$48\pi$，

所以$4\pi R^2=48\pi$，解得$R=2\sqrt{3}$，

设正方体的棱长为$a$，

因为正方体外接球的直径为正方体的体对角线，

所以$\sqrt{3}a=2R$，即$a=4$，

所以$V=a^3=4^3=64$.

故选：B

**例 2**．（2023·四川巴中·统考一模）已知长方体的表面积为 22，过一个顶点的三条棱长之和为 6，则该长方体外接球的表面积为_____.

【答案】$14\pi$

【解析】令长方体的长、宽、高分别为$a,b,c$，则$\begin{cases}2(ab+bc+ac)=22\\a+b+c=6\end{cases}$，

由$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=36$，则$a^2+b^2+c^2=14$，

而长方体外接球半径$r=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$，故$r=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，其表面积$4\pi r^2=4\pi\times\dfrac{7}{2}=14\pi$.

故答案为：$14\pi$

**例 3**．（2023·重庆渝北·高三重庆市南华中学校校考阶段练习）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=6$，$BC=2\sqrt{3}$，$BB_1=4$，则长方体外接球的表面积为_____.

【答案】$64\pi$

【解析】由题意，根据长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$外接球的性质，可得

$2R=\sqrt{AB^2+BC^2+BB_1^2}=\sqrt{6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+4^2}=8$，

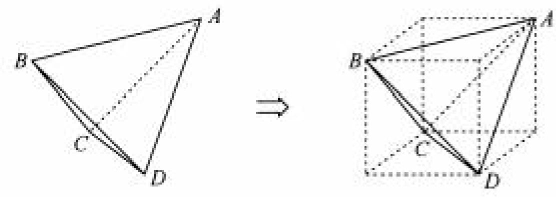
$\therefore R=4$，该长方体的外接球的表面积$S=4\pi R^2=64\pi$.

故答案为：$64\pi$.

## 考点二：正四面体外接球

### 规律总结

如图，设正四面体$ABCD$的的棱长为$a$，将其放入正方体中，则正方体的棱长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，显然正四面体和正方体有相同的外接球．正方体外接球半径为$R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，即正四面体外接球半径为$R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.




## 题型特训

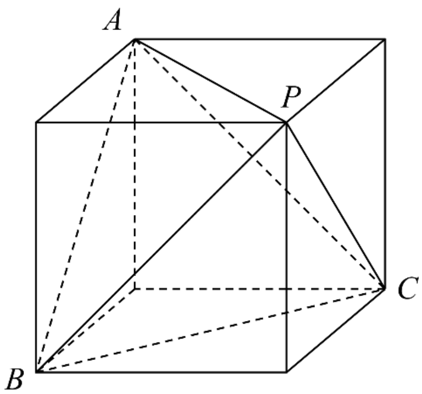
**例 4.**（2023·四川宜宾·四川省宜宾市南溪第一中学校校考模拟预测）已知正四面体 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，则该正四面体的棱长为（　）

A．1　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】设外接球半径为 $R$，则 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

将正四面体放入正方体中，设正方体边长为 $a$，如图所示：




则 $\sqrt{3}a=2R=\sqrt{3}$，$a=1$，正四面体的棱长为 $\sqrt{2}a=\sqrt{2}$．

故选：C.

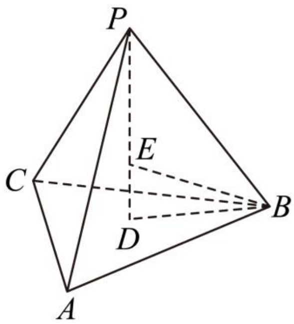
**例 5.**（2023·天津北辰·统考三模）中国雕刻技艺举世闻名，雕刻技艺的代表作"鬼工球"，取鬼斧神工的意思，制作相当繁复，成品美轮美奂．1966 年，玉石雕刻大师吴公炎将这一雕刻技艺应用到玉雕之中，他把玉石镂成多层圆球，层次重叠，每层都可灵活自如的转动，是中国玉雕工艺的一个重大突破.今一雕刻大师在棱长为 12 的整块正方体玉石内部套雕出一个可以任意转动的球，在球内部又套雕出一个正四面体（所有棱长均相等的三棱锥），若不计各层厚度和损失，则最内层正四面体的棱长最长为（　）

A．$4\sqrt{6}$　　　　B．$4\sqrt{3}$　　　　C．$2\sqrt{6}$　　　　D．6

【答案】A

【解析】由题意，球是正方体的内切球，且该球为正四面体的外接球时，四面体的棱长最大，

则该球半径$r=6$，如图：




可知$E$为外接球球心，$EP=EB=r$，$PD\perp$平面$ABC$，$D$为底面等边$\triangle ABC$的中心，

设正四面体的棱长为$d$，则$BD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}d=\frac{\sqrt{3}}{3}d$，$PD=\sqrt{d^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}d)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}d$，

在$\text{Rt}\triangle EDB$中，则$EB^2=ED^2+DB^2$，即$r^2=(\frac{\sqrt{3}}{3}d)^2+(\frac{\sqrt{6}}{3}d-r)^2$，

解得$d=\frac{2\sqrt{6}}{3}r$，即$d=4\sqrt{6}$.

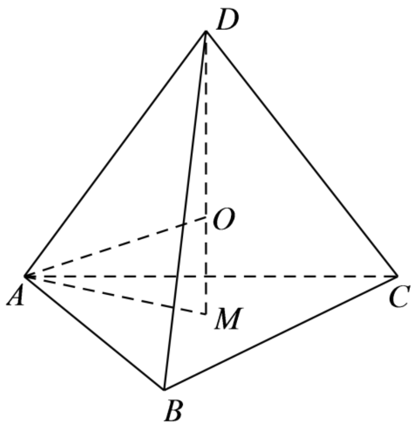
故选：A

**例6.**（2023·陕西西安·校联考模拟预测）已知正四面体的各棱长均为$3$，各顶点均在同一球面上，则该球的表面积为（　）

A．$9\pi$　　B．$12\pi$　　C．$\frac{27\pi}{4}$　　D．$\frac{27\pi}{2}$

【答案】D

【解析】




如图，$DM$是正四面体$ABCD$的高，$O$是外接球球心，设外接球半径为$R$，

$\because$正四面体棱长为$3$，$\therefore AM=\frac{\sqrt{3}}{3}\times3=\sqrt{3}$，$DM=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}$，$OM=\sqrt{6}-R$，$AO=R$，

由 $AO^2=AM^2+OM^2$ 得 $R^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}-R\right)^2$，

解得 $R=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$，$\therefore S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{27\pi}{2}$．

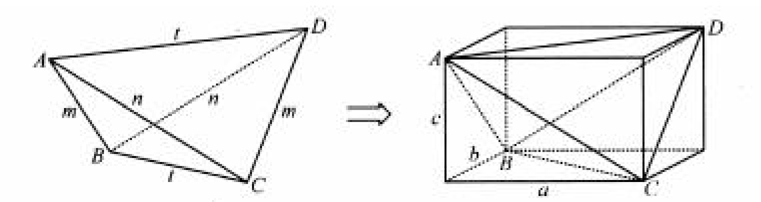
故选：D．

## 考点三：对棱相等的三棱锥外接球

### 规律总结

四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=m$，$AC=BD=n$，$AD=BC=t$，这种四面体叫做对棱相等四面体，可以通过构造长方体来解决这类问题．

如图，设长方体的长、宽、高分别为 $a,b,c$，则 $\begin{cases}b^2+c^2=m^2\\a^2+c^2=n^2\\a^2+b^2=t^2\end{cases}$，三式相加可得 $a^2+b^2+c^2=\dfrac{m^2+n^2+t^2}{2}$，而显然四面体和长方体有相同的外接球，设外接球半径为 $R$，则 $a^2+b^2+c^2=4R^2$，所以 $R=\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+t^2}{8}}$．



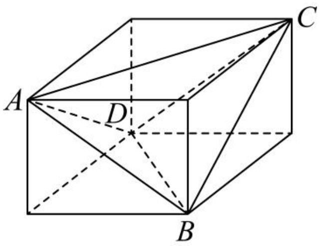

### 题型特训

**例 7．**（2023·四川凉山·二模）在四面体 $A-BCD$ 中，$AB=CD=\sqrt{7},AD=BC=\sqrt{29},AC=BD=2\sqrt{7}$，则四面体 $A-BCD$ 外接球表面积是（　　）

A．$64\pi$　　　B．$32\pi$　　　C．$256\pi$　　　D．$\dfrac{256}{3}\pi$

【答案】B

【解析】由题意可知，此四面体 $A-BCD$ 可以看成一个长方体的一部分，长方体的长、宽、高分别为 $\sqrt{3}$，$\sqrt{25}$，2，四面体 $A-BCD$ 如图所示，




所以此四面体 $A-BCD$ 的外接球的直径为长方体的体对角线，即 $(2R)^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{25})^2+2^2$,解得 $R=2\sqrt{2}$.

所以四面体 $A-BCD$ 外接球表面积是 $S=4\pi R^2=4\times\pi\times(2\sqrt{2})^2=32\pi$.

故答案为：B.

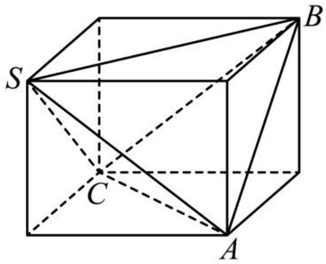
**例 8．**（2023·广东揭阳·高三校联考期中）在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=BC=5$，$SB=AC=\sqrt{41}$，$SC=AB=\sqrt{34}$，则该三棱锥的外接球表面积是（　　）

A．$50\pi$　　B．$100\pi$　　C．$150\pi$　　D．$200\pi$

【答案】A

【解析】因为 $SA=BC=5, SB=AC=\sqrt{41}, SC=AB=\sqrt{34}$，

所以可以将三棱锥 $S-ABC$ 如图放置于一个长方体中，如图所示：




设长方体的长、宽、高分别为 $a$、$b$、$c$，

则有 $\begin{cases}a^2+b^2=41\\a^2+c^2=25\\b^2+c^2=34\end{cases}$，整理得 $a^2+b^2+c^2=50$，

则该棱锥外接球的半径即为该长方体外接球的半径，

所以有 $a^2+b^2+c^2=50=(2R)^2\Rightarrow R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

所以所求的球体表面积为：$S=4\pi R^2=4\times\pi\times\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=50\pi$.

故选：A.

**例 9．**（2023•五华区校级期中）如图，蹴鞠，又名“蹋鞠”、“蹴球”、“蹴圆”、“筑球”、“踢圆”等，“跳”有用脚蹴、蹋、踢的含义，“鞠”最早系皮革外包、内实米糠的球．因而“蹴鞠”就是指古人以脚蹴、蹋、踢皮球的活动，类似今日的足球．2006 年 5 月 20 日，蹴鞠已作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家级非物质文化遗产名录．若将“鞠”的表面视为光滑的球面，已知某“鞠”表面上的四个点 $A$，$B$，

$C$， $D$ 满足 $AB=CD=\sqrt{13}cm$， $BD=AC=2\sqrt{5}cm$， $AD=BC=5cm$，则该“鞠”的表面积为(　　)

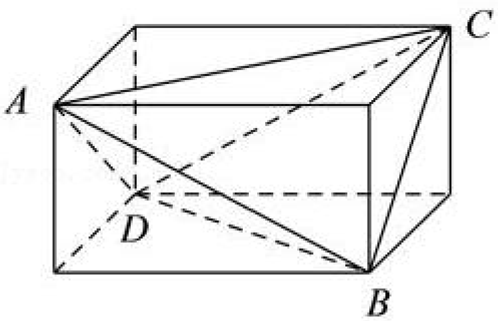
A． $20\pi cm^2$　　　　B． $24\pi cm^2$　　　　C． $27\pi cm^2$　　　　D． $29\pi cm^2$

【解析】解：因为鞠表面上的四个点 $A$， $B$， $C$， $D$ 满足 $AB=CD=\sqrt{13}cm$，

$BD=AC=2\sqrt{5}cm$， $AD=BC=5cm$，

所以可以把 $A$， $B$， $C$， $D$ 四点放到长方体的四个顶点上，则该长方体的体对角线就是鞠的直径，

设该长方体的长、宽、高分别为 $x$， $y$， $z$，鞠的半径为 $R$，




则 $(2R)^2=x^2+y^2+z^2$，

由题意得 $x^2+y^2=20$， $x^2+z^2=13$， $y^2+z^2=25$，

所以 $(2R)^2=x^2+y^2+z^2=29$，即 $4R^2=29$，

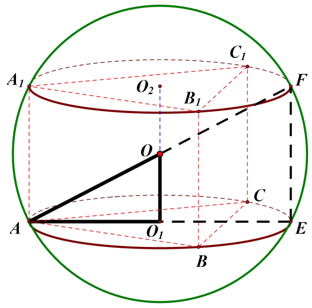
所以该鞠的表面积为 $4\pi R^2=29\pi\ cm^2$，

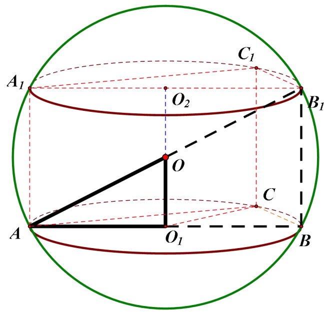
故选： $D$．

## 考点四：直棱柱外接球

### 规律总结

如图 1，图 2，图 3，直三棱柱内接于球（同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形）



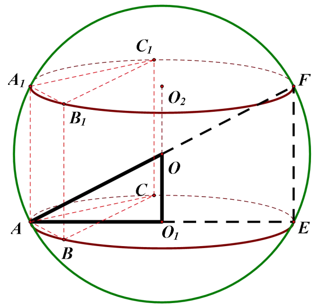




图 1　　　　　　　图 2　　　　　　　图 3

第一步：确定球心 $O$ 的位置，$O_1$ 是 $\Delta ABC$ 的外心，则 $OO_1\perp$ 平面 $ABC$；

第二步：算出小圆 $O_1$ 的半径 $AO_1=r$，$OO_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}h$（$AA_1=h$ 也是圆柱的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(\frac{h}{2})^2+r^2\Rightarrow R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}$，解出 $R$

## 题型特训

**例 10．**（2023・湖南・高三校联考阶段练习）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $3\sqrt{3}$，则该三棱柱外接球表面积的最小值为（　）

A．$12\pi$　　　B．$6\pi$　　　C．$16\pi$　　　D．$8\pi$

【答案】A

【解析】设直三棱柱的高为 $h$，外接球的半径为 $R$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $r$，则 $3\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}h=3\sqrt{3}$，

所以 $r^2h=4$，又 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{h^2}{4}+\frac{4}{h}$，令 $f\left(h\right)=\frac{h^2}{4}+\frac{4}{h}$，则 $f'\left(h\right)=\frac{h}{2}-\frac{4}{h^2}=\frac{h^3-8}{2h^2}$，易知 $f\left(h\right)$ 的最小值为 $f\left(2\right)=3$，此时 $R^2=3$，所以该三棱柱外接球表面积的最小值为 $12\pi$．

故选：A.

**例 11．**（2023・山东潍坊・统考模拟预测）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 32，则该三棱柱外接球表面积的最小值为（　）

A．12π　　　B．24π　　　C．48π　　　D．96π

【答案】C

【解析】设 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形的直角边为 $a$，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $h$，

则 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{2}a^2\cdot h=32$，所以 $a^2\cdot h=64$，则 $a^2=\frac{64}{h}$，

$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

所以棱柱外接球的半径为$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{h^2}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{h}+\frac{h^2}{4}=\frac{32}{h}+\frac{h^2}{4}$，

令$y=\frac{32}{h}+\frac{h^2}{4}$，则$y'=-\frac{32}{h^2}+\frac{h}{2}=\frac{-64+h^3}{2h^2}=0$，则$h=4$，

$y=\frac{32}{h}+\frac{h^2}{4}$在$(0,4)$上单调递减，在$(4,+\infty)$上单调递增，

所以当$h=4$时，$y_{\min}=\frac{32}{4}+\frac{16}{4}=12$，

则该三棱柱外接球表面积最小值为$S=4\pi R^2=4\pi\cdot 12=48\pi$.

故选：C.

**例 12.**（2023·陕西咸阳·统考一模）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，若该直三棱柱的外接球表面积为$16\pi$，则此直三棱柱的高为（　）.

A．4　　B．3　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】由题意将直三棱柱补成长方体，则直三棱柱的外接球就是长方体的外接球，外接球的直径等于长方体的体对角线，利用直三棱柱的外接球表面积为$16\pi$，可求出外接球的半径，从而可求得直三棱柱的高

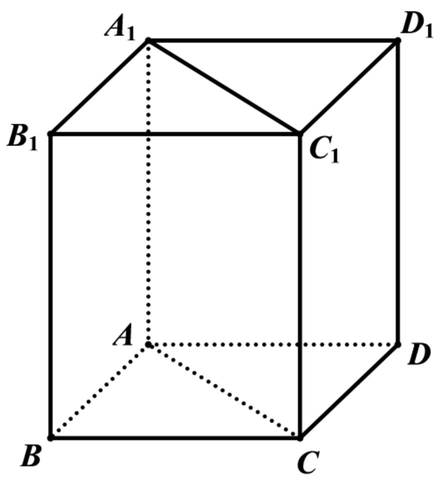
因为$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，所以将直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$补成长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则直三棱柱的外接球就是长方体的外接球，外接球的直径等于长方体的体对角线，

设球的半径为$R$，则$4\pi R^2=16\pi$，解得$R=2$，

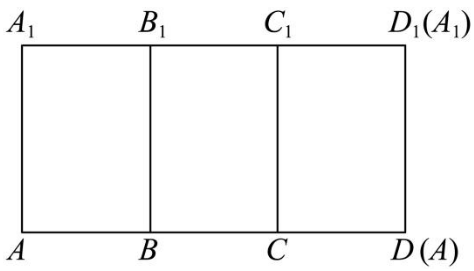
设直三棱柱的高为$h$，则$4R^2=2^2+2^2+h^2$，即$16=8+h^2$，

解得$h=2\sqrt{2}$，所以直三棱柱的高为$2\sqrt{2}$，

故选：D




**例 13.**（2023·广东·统考一模）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面展开图中，$B$，$C$是线段$AD$的三等分点，且$AD=3\sqrt{3}$．若该三棱柱的外接球$O$的表面积为$12\pi$，则$AA_1=$（　）



A． $\sqrt{2}$　　B． $2$　　C． $\sqrt{5}$　　D． $2\sqrt{2}$

【答案】D

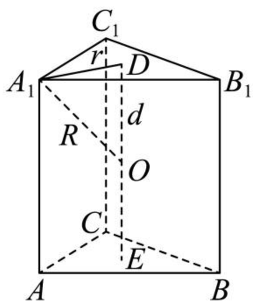
【解析】由展开图可知，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，

其外接圆的半径满足 $2r=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$，所以 $r=1$.

由 $4\pi R^2=12\pi$ 得 $R=\sqrt{3}$.

由球的性质可知，球心 $O$ 到底面 $ABC$ 的距离为 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{2}$，

结合球和直三棱柱的对称性可知， $AA_1=2d=2\sqrt{2}$，

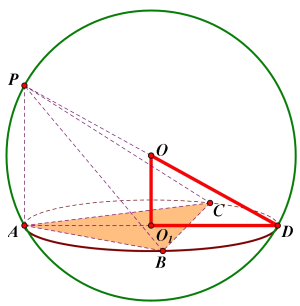


故选 D.

## 考点五：直棱锥外接球

### 规律总结

如图， $PA\perp$ 平面 $ABC$，求外接球半径.



解题步骤：

第一步：将$\Delta ABC$画在小圆面上，$A$为小圆直径的一个端点，作小圆的直径$AD$，连接$PD$，则$PD$必过球心$O$；

第二步：$O_1$为$\Delta ABC$的外心，所以$OO_1\perp$平面$ABC$，算出小圆$O_1$的半径$O_1D=r$(三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2r$)，$OO_1=\dfrac{1}{2}PA$；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$ .

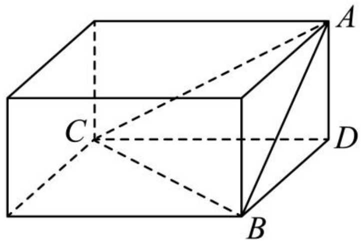
## 题型特训

**例14．**（2023·江西萍乡·高三统考期末）三棱锥$A$-$BCD$中，$AD\perp$平面$BCD$，$DC\perp BD$，$2AD=BD=DC=2$，则该三棱锥的外接球表面积为（　　）

A．$\dfrac{3\pi}{2}$　　　B．$\dfrac{9\pi}{2}$　　　C．$9\pi$　　　D．$36\pi$

【答案】C

【解析】由$AD\perp$平面$BCD$，$DC\perp BD$，知三棱锥$A$-$BCD$可补形为以$AD$，$DC$，$BD$为三条棱的长方体，如图所示，

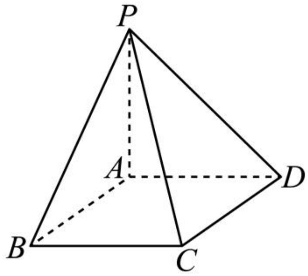



三棱锥的外接球即长方体的外接球，长方体的对角线是外接球的直径，设外接球的半径为$R$，

则$(2R)^2=AD^2+DC^2+BD^2=1+4+4=9$，所以该三棱锥的外接球表面积为$S=4\pi R^2=9\pi$.

故选：C.

**例15．**（2023·陕西咸阳·武功县普集高级中学统考二模）如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为边长为4的正方形，$PA=5$，则该四棱锥的外接球表面积为（　　）



A． $\frac{125\sqrt{2}\pi}{3}$　　B． $48\pi$　　C． $75\pi$　　D． $57\pi$

【答案】D

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为边长为 $4$ 的正方形，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的外接圆半径 $r=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2+4^2}=2\sqrt{2}$，

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $PA=5$， $\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球半径 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{2}PA\right)^2}=\sqrt{8+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{57}}{2}$，

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=57\pi$.

故选：D.

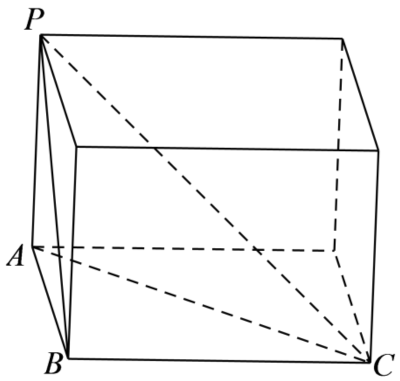
**例 16**．（2023·河南开封·统考三模）在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA=AB$， $PA\perp$ 平面 $ABC$， $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$， $AB+BC=6$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球体积的最小值为（　）

A． $8\sqrt{6}\pi$　　B． $16\sqrt{6}\pi$　　C． $24\sqrt{6}\pi$　　D． $32\sqrt{6}\pi$

【答案】A

【解析】根据题意三棱锥 $P-ABC$ 可以补成分别以 $BC,AB,PA$ 为长、宽、高的长方体，其中 $PC$ 为长方体的对角线，

则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心即为 $PC$ 的中点，要使三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积最小，则 $PC$ 最小.




设 $AB=x$，则 $PA=x$， $BC=6-x$， $|PC|=\sqrt{AB^2+PA^2+BC^2}=\sqrt{3(x-2)^2+24}$，

所以当 $x=2$ 时， $|PC|_{\min}=2\sqrt{6}$，则有三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球半径最小为 $\sqrt{6}$，

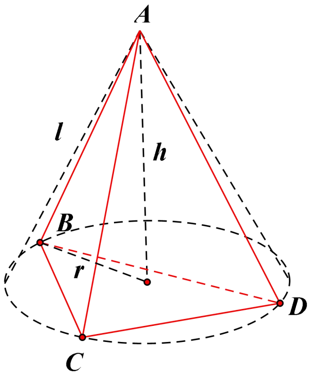
所以 $V_{\min}=\frac{4}{3}\pi R^3=8\sqrt{6}\pi$.

故选：A

## 考点六：正棱锥与侧棱相等模型

### 规律总结

**1、正棱锥外接球半径：** $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$ **.**

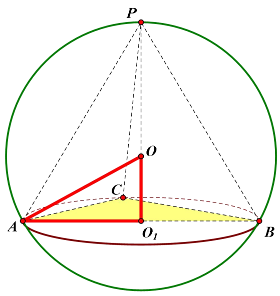



2、**侧棱相等模型：**

如图，$P$ 的射影是 $\Delta ABC$ 的外心

$\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等

$\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\Delta ABC$ 在圆锥的底上，顶点 $P$ 点也是圆锥的顶点.




解题步骤：

第一步：确定球心 $O$ 的位置，取 $\Delta ABC$ 的外心 $O_1$，则 $P,O,O_1$ 三点共线；

第二步：先算出小圆 $O_1$ 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2 \Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$.

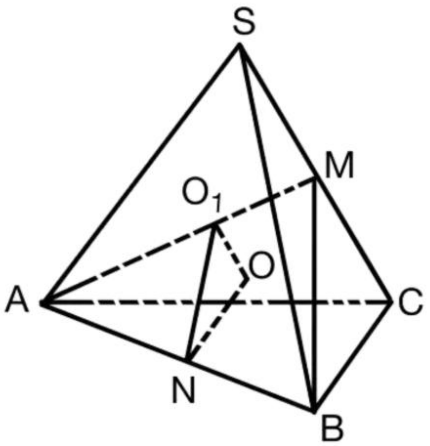
## 题型特训

**例 17.**（2023·重庆·高三重庆八中校考期末）已知球 $O$ 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球，$SA=SC=AB=AC=\sqrt{2}$，$BS=BC=2$，则球 $O$ 的表面积是（　）

A. $\dfrac{14\pi}{3}$　　B. $\dfrac{16\pi}{3}$　　C. $7\pi$　　D. $8\pi$

【答案】A

【解析】取 $SC$ 中点 $M$，连接 $AM$、$MB$，




因为△$SAC$ 是等边三角形，且 $SB=BC$，

∴$AM\perp SC$，$MB\perp SC$，

∴$SC\perp$平面 $AMB$，

∴球心 $O$ 在平面 $AMB$ 上，作 $OO_1\perp$平面 $SAC$，可得 $O_1$ 为等边三角形 $SAC$ 的中心，

所以 $AO_1=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot AS\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

取 $AB$ 中点 $N$，连接 $ON$，∴$ON\perp AB$，

∴ $OO_1AN$ 四点共圆，$AO$ 为这四点共圆的直径，也是三棱锥 $S-ABC$ 外接球的半径，连接 $O_1N$，

在△$ABM$ 中：$AM=AS\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$MB^2=BC^2-MC^2=2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$，

$\therefore AM^2+AB^2=\frac{6}{4}+2=\frac{7}{2}=MB^2$

∴$\angle MAB=90°$，

∴在直角三角形 $O_1NA$ 中，

由勾股定理，得 $O_1N=\sqrt{AO_1^2+AN^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{6}$，

∴三棱锥 $S-ABC$ 外接球的半径长为 $AO=O_1N=\frac{\sqrt{42}}{6}$，

$\therefore S=4\pi R^2=\frac{14\pi}{3}$.

故选：A.

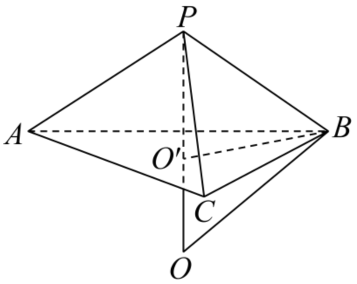
**例 18.**（2023·河北保定·高三定州市第二中学校考阶段练习）已知正三棱锥的底面边长为 3，侧棱长为 2，且顶点都在同一球面上，则该球的表面积为____.

【答案】$16\pi$

【解析】如图设底面$\triangle ABC$的中心为$O'$，连接$PO'$，则球心在直线$PO'$上，

由几何关系可知，$|BO'|=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 3=\sqrt{3}$，先将三角形$PO'B$转化成平面三角形，

如图：



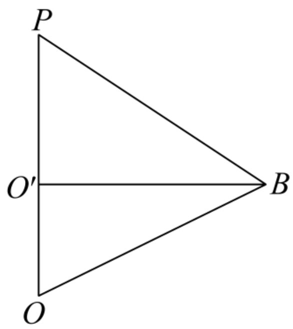

因为$|PB|=2$，由勾股定理可得$|PO'|=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$，设球心为$O$，

则$O$在$PO'$的延长线上，且$|OP|=|OB|=R$，则$|OO'|=R-1$，

由勾股定理可得$|O'B|^2+|OO'|^2=|OB|^2$，即$\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(R-1\right)^2=R^2$，

解得$R=2$，所以球体的表面积$S=4\pi R^2=16\pi$.

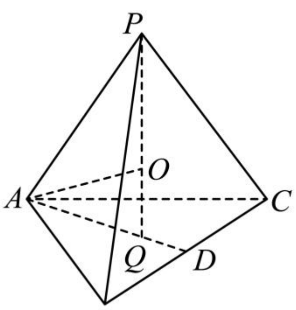
故答案为：$16\pi$.




**例 19.**（2023·福建福州·高三福建省福州屏东中学校考期末）已知正三棱锥$P-ABC$的顶点都在球$O$的球面上，其侧棱与底面所成角为$\frac{\pi}{3}$，且$PA=2\sqrt{3}$，则球$O$的表面积为

【答案】$16\pi$

【解析】如图，正三棱锥$P-ABC$中，设点$Q$为$\triangle ABC$的中心，则$PQ\perp$平面$ABC$，



$\therefore \angle PAQ=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore AQ=\sqrt{3}$，$PQ=3$.

球心 $O$ 在直线 $PQ$ 上，连接 $AO$，设球 $O$ 的半径为 $r$，

则 $OA=OP=r$，$OQ=3-r$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAQ$ 中，$OA^2=AQ^2+OQ^2$，即 $r^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(3-r\right)^2$，解得 $r=2$，

$\therefore$球 $O$ 的表面积为 $4\pi r^2=16\pi$ .

故答案为：$16\pi$.

**例 20．**（2023·河南·模拟预测）已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $2\sqrt{2}$，高为 $h$，且 $1\le h\le 4$，该四棱锥的外接球的表面积为 S，则 S 的取值范围为___.

【答案】$[16\pi,25\pi]$

【解析】连接 $AC,BD$ 相交于点 $E$，连接 $PE$，则 $PE\perp$平面 $ABCD$，

球心 $O$ 在 $PE$ 上，连接 $OB$，则 $OP=OB=r$，$OE=h-r$，

因为正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $2\sqrt{2}$，所以 $BE=2$，

在直角三角形 $OBE$ 上，由勾股定理得 $OB^2=OE^2+BE^2$，

即 $r^2=2^2+\left(h-r\right)^2$，$1\le h\le 4$，解得 $r=\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}$，

由 $r'=-\dfrac{2}{h^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{h^2-4}{2h^2}$，

当 $h\in[1,2)$ 时，$r'<0$，$r=\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}$ 单调递减，

当 $h\in(2,4]$ 时，$r'>0$，$r=\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}$ 单调递增，

所以 $r=\dfrac{2}{h}+\dfrac{h}{2}$ 在 $h=2$ 取得极小值，也是最小值，此时 $r=2$，

又当 $h=1$ 和 $h=4$ 时，$r=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，

所以 $r\in\left[2,\dfrac{5}{2}\right]$，则 $S=4\pi r^2\in[16\pi,25\pi]$.