

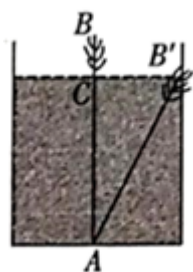
2023-2024 学年安徽省亳州市三十二中高三下学期阶段性测试（三）数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 《九章算术》勾股章有一“引葭赴岸”问题“今有饼池径丈，葭生其中，出水两尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深，葭各几何？”，其意思是：有一个直径为一丈的圆柱形水池，池中心生有一颗类似芦苇的植物，露出水面两尺，若把它引向岸边，正好与岸边齐，问水有多深，该植物有多高？其中一丈等于十尺，如图若从该葭上随机取一点，则该点取自水下的概率为（ ）



- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{13}{14}$ C. $\frac{21}{29}$ D. $\frac{14}{15}$
2. 已知过点 $P(1,1)$ 且与曲线 $y = x^3$ 相切的直线的条数有（ ）.
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 已知集合 $A = \{x | -1 < x, 2\}$, $B = \{x | 1, -x, 5\}$, 定义集合 $A * B = \{z | z = x + y, x \in A, y \in B\}$, 则 $B * (A * B)$ 等于（ ）
- A. $\{x | -6 < x, 1\}$ B. $\{x | 1 < x, 12\}$
- C. $\{x | -11 < x, 0\}$ D. $\{x | -5 < x, 6\}$
4. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = -3x + y$ 的最大值为（ ）
- A. 3 B. 2 C. $-\frac{3}{2}$ D. -2
5. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $E(0, t) (t > 0)$. 已知动点 P 在双曲线 C 的右支上, 且点 P, E, F_2 不共线. 若 $\triangle PEF_2$ 的周长的最小值为 $4b$, 则双曲线 C 的离心率 e 的取值范围是（ ）

- A. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ C. $[\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(1, \sqrt{3}]$

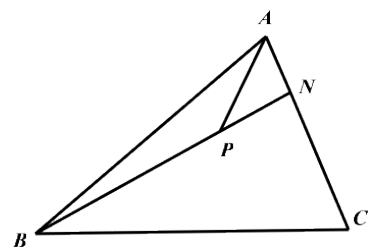
6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{3}$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (2\vec{a}-\vec{b}) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

7. 已知向量 $\vec{a}=(m,1)$, $\vec{b}=(-1,2)$, 若 $(\vec{a}-2\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 ()

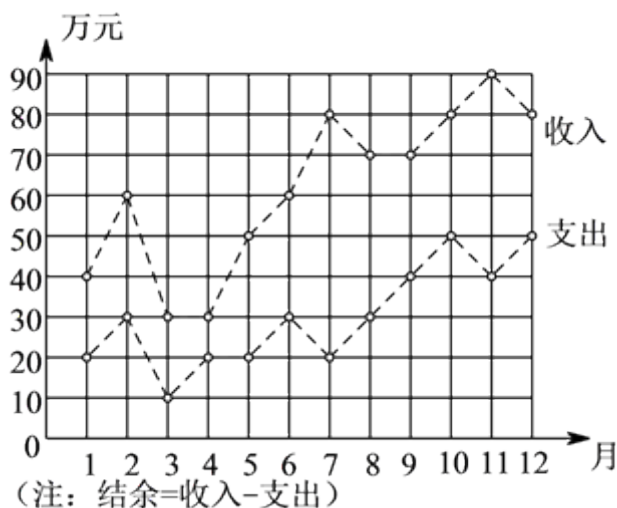
- A. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $-\frac{6\sqrt{13}}{65}$ D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $m\vec{AC} = \vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AB}$, 则实数 m 的值为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 1 D. 2

9. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示, 下列说法中错误的是 ().



- A. 收入最高值与收入最低值的比是 3:1
 B. 结余最高的月份是 7 月份
 C. 1 与 2 月份的收入的变化率与 4 至 5 月份的收入的变化率相同
 D. 前 6 个月的平均收入为 40 万元

10. 下列与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 定义域和单调性都相同的函数是 ()

- A. $y = 2^{\log_2 x}$ B. $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$ D. $y = x^{\frac{1}{4}}$

11. 已知复数 $z = \frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2019}}$ (i 为虚数单位), 则下列说法正确的是 ()

- A. z 的虚部为 4 B. 复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限
C. z 的共轭复数 $\bar{z} = 4 - 2i$ D. $|z| = 2\sqrt{5}$

12. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$, 设 $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(\sqrt{2})$, $c = f(\ln \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 ()

- A. $b > a > c$ B. $b > a = c$ C. $a = c > b$ D. $c > a > b$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

14. 正四面体 $A-BCD$ 的各个点在平面 M 同侧, 各点到平面 M 的距离分别为 1, 2, 3, 4, 则正四面体的棱长为_____.

15. 一个袋中装着标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各 2 个, 从中任意摸取 3 个小球, 每个小球被取出的可能性相等, 则取出的 3 个小球中数字最大的为 4 的概率是_____.

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $b =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4\cos \alpha \\ y = 2\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 将曲线 C 上各点纵坐标伸长到

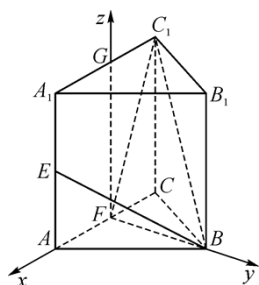
原来的 2 倍 (横坐标不变) 得到曲线 C_1 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $4\rho \cos \theta + 3\rho \sin \theta - 25 = 0$.

(1) 写出 C_1 的极坐标方程与直线 l 的直角坐标方程;

(2) 曲线 C_1 上是否存在不同的两点 $M(4, \theta_1)$, $N(4, \theta_2)$ (以上两点坐标均为极坐标, $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$), 使点 M 、 N 到 l 的距离都为 3? 若存在, 求 $|\theta_1 - \theta_2|$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 在正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E, F, G 分别是棱 AA_1 , AC 和 A_1C_1 的中点, 以

$\{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$.



(1) 求异面直线 AC 与 BE 所成角的余弦值；

(2) 求二面角 $F-BC_1-C$ 的余弦值.

19. (12 分) 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $C_2: \begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 且两种坐标系中取相同的长度单位.

(1) 求曲线 C_1 的直角坐标方程和 C_2 的方程化为极坐标方程;

(2) 设 C_1 与 x, y 轴交于 M, N 两点, 且线段 MN 的中点为 P . 若射线 OP 与 C_1, C_2 交于 P, Q 两点, 求 P, Q 两点间的距离.

20. (12 分) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = 90^\circ, \angle APB = 45^\circ, \angle BPC = 60^\circ, D$ 为棱 AB 的中点,

$PA = 2$

(I) 证明: $PD \perp AB$;

(II) 求直线 PD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, 以坐标原点 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴, 取相同长度单位建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的普通方程;

(2) 设射线 $OP: \theta = \frac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1 交于不同于极点的点 A , 与曲线 C_2 交于不同于极点的点 B , 求线段 AB 的长.

22. (10 分) 第十四届全国冬季运动会召开期间, 某校举行了“冰上运动知识竞赛”, 为了解本次竞赛成绩情况, 从中随机抽取部分学生的成绩(得分均为整数, 满分 100 分)进行统计, 请根据频率分布表中所提供的数据, 解答下列问题:

(1) 求 a, b, c 的值及随机抽取一考生其成绩不低于 70 分的概率;

(2) 若从成绩较好的 3、4、5 组中按分层抽样的方法抽取 5 人参加“普及冰雪知识”志愿活动，并指定 2 名负责人，求从第 4 组抽取的学生中至少有一名是负责人的概率.

组号	分组	频数	频率
第 1 组	$[50,60)$	15	0.15
第 2 组	$[60,70)$	35	0.35
第 3 组	$[70,80]$	b	0.20
第 4 组	$[80,90]$	20	c
第 5 组	$[90,100)$	10	0.1
合计		a	1.00

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$ ， 在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程可解得 x ， 然后由

$$P=\frac{x}{x+2}$$

得出答案.

【详解】

解：由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$

在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程得： $5^2+x^2=(x+2)^2$ ， 解得 $x=\frac{21}{4}$

所以从该蓆上随机取一点， 则该点取自水下的概率为 $P=\frac{x}{x+2}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}+2}=\frac{21}{29}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何概型中的长度型，属于基础题.

2、C

【解析】

设切点为 (x_0, y_0) ，则 $y_0 = x_0^3$ ，由于直线 l 经过点 $(1, 1)$ ，可得切线的斜率，再根据导数的几何意义求出曲线在点 x_0 处的切线斜率，建立关于 x_0 的方程，从而可求方程.

【详解】

若直线与曲线切于点 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$)，则 $k = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^3 - 1}{x_0 - 1} = x_0^2 + x_0 + 1$ ，

又 $\because y' = 3x^2$ ， $\therefore y'|_{x=x_0} = 3x_0^2$ ， $\therefore 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0$ ，解得 $x_0 = 1$ ， $x_0 = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 过点 $P(1, 1)$ 与曲线 $C: y = x^3$ 相切的直线方程为 $3x - y - 2 = 0$ 或 $3x - 4y + 1 = 0$ ，

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了利用导数求曲线上过某点切线方程的斜率，求解曲线的切线的方程，其中解答中熟记利用导数的几何意义求解切线的方程是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

3、C

【解析】

根据 $A * B$ 定义，求出 $A * B$ ，即可求出结论.

【详解】

因为集合 $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ ，所以 $B = \{x \mid -5 \leq x \leq -1\}$ ，

则 $A * B = \{x \mid -6 < x \leq 1\}$ ，所以 $B * (A * B) = \{x \mid -11 < x \leq 0\}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查集合的新定义运算，理解新定义是解题的关键，属于基础题.

4、A

【解析】

画出不等式组所表示的平面区域，结合图形确定目标函数的最优解，代入即可求解，得到答案.

【详解】

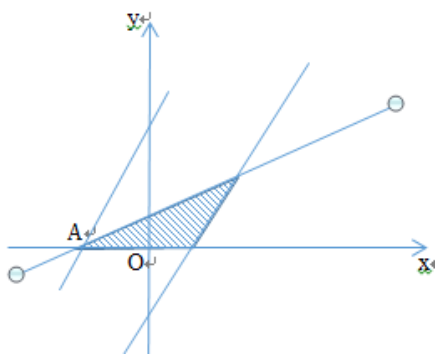
画出不等式组 $\begin{cases} x-2y+1 \geq 0 \\ 2x-y-1 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所表示平面区域，如图所示，

由目标函数 $z = -3x + y$ ，化为直线 $y = 3x + z$ ，当直线 $y = 3x + z$ 过点 A 时，

此时直线 $y = 3x + z$ 在 y 轴上的截距最大，目标函数取得最大值，

又由 $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y=0 \end{cases}$ ，解得 $A(-1, 0)$ ，

所以目标函数的最大值为 $z = -3 \times (-1) + 0 = 3$ ，故选 A.



【点睛】

本题主要考查简单线性规划求解目标函数的最值问题. 其中解答中正确画出不等式组表示的可行域, 利用“一画、二移、三求”, 确定目标函数的最优解是解答的关键, 着重考查了数形结合思想, 及推理与计算能力, 属于基础题.

5、A

【解析】

依题意可得 $C_{\triangle PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1 \geq 2PF_1 - 2a = 4b$

即可得到 $2a + 4b > 2(a + c)$ ，从而求出双曲线的离心率的取值范围；

【详解】

解：依题意可得如下图象， $C_{\triangle PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1$

$$= PE + PF_1 + EF_1 - 2a$$

$$\geq 2PF_1 - 2a = 4b$$

$$\therefore 2PF_1 = 2a + 4b > 2(a + c)$$

所以 $2b > c$

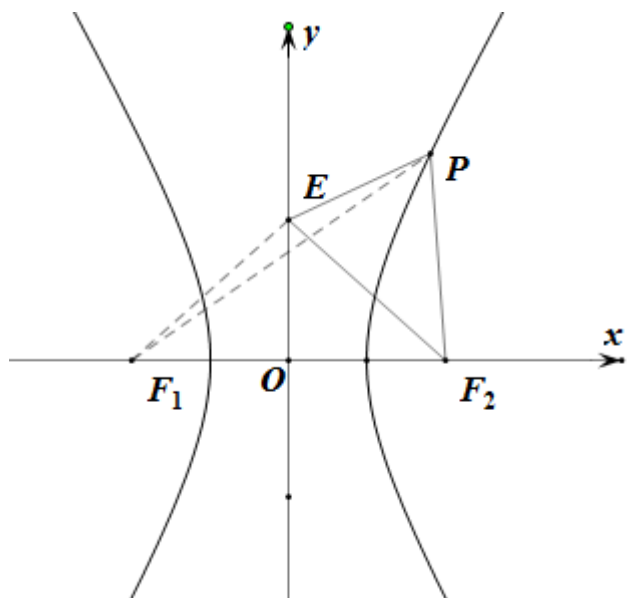
$$\text{则 } 4c^2 - 4a^2 > c^2$$

$$\text{所以 } 3c^2 > 4a^2$$

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} > \frac{4}{3}$$

$$\text{所以 } e > \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } e \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$$

故选：A



【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，属于中档题.

6、A

【解析】

根据向量的运算法则展开后利用数量积的性质即可.

【详解】

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 + 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查数量积的运算，属于基础题.

7、B

【解析】

直接利用向量的坐标运算得到向量 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 的坐标，利用 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ 求得参数 m ，再用 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 计算即可.

【详解】

依题意, $\vec{a} - 2\vec{b} = (m+2, -3)$, 而 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 即 $-m - 2 - 6 = 0$, 解得 $m = -8$, 则

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算、向量数量积的应用, 考查运算求解能力以及化归与转化思想.

8、B

【解析】

$m\vec{AC} = \vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ 变形为 $\vec{AP} = m\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$, 由 $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ 得 $\vec{AC} = 3\vec{AN}$, 转化在 $\triangle ABN$ 中, 利用 B 、 P 、 N

三点共线可得.

【详解】

解: 依题: $\vec{AP} = m\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} = 3m\vec{AN} + \frac{2}{3}\vec{AB}$,

又 B 、 P 、 N 三点共线,

$$\therefore 3m + \frac{2}{3} = 1, \text{ 解得 } m = \frac{1}{9}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量基本定理及用向量共线定理求参数. 思路是(1)先选择一组基底, 并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式, 再通过向量的运算来解决. 利用向量共线定理及向量相等的条件列方程(组)求参数的值. (2)直线的向量式参数方程:

A 、 P 、 B 三点共线 $\Leftrightarrow \vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ (O 为平面内任一点, $t \in \mathbb{R}$)

9、D

【解析】

由图可知, 收入最高值为90万元, 收入最低值为30万元, 其比是3:1, 故A项正确;

结余最高为7月份, 为 $80 - 20 = 60$, 故B项正确;

1至2月份的收入的变化率为4至5月份的收入的变化率相同, 故C项正确;

前6个月的平均收入为 $\frac{1}{6}(40 + 60 + 30 + 30 + 50 + 60) = 45$ 万元, 故D项错误.

综上, 故选D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/356052232201010203>