3.3　三角恒等变换与解三角形

命题角度1 利用正弦定理和余弦定理解三角形

高考真题体验·对方向

1.(2018全国Ⅰ·17)在平面四边形ABCD中,∠ADC=90°,∠A=45°,AB=2,BD=5.

(1)求cos∠ADB;

(2)若DC=2,求BC.

解 (1)在△ABD中,由正弦定理得.

由题设知,,

所以sin∠ADB=.

由题设知,∠ADB<90°,

所以cos∠ADB=.

(2)由题设及(1)知,cos∠BDC=sin∠ADB=.

在△BCD中,由余弦定理得$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot \cos∠BDC=25+8-2\times5\times2=25$.

所以BC=5.

2.(2018全国Ⅰ·17)△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知△ABC的面积为.

(1)求sin Bsin C;

(2)若6cos Bcos C=1,a=3,求△ABC的周长.

解 (1)由题设得acsin B=,即csin B=.

由正弦定理得sin Csin B=.

故sin Bsin C=.

(2)由题设及(1)得cos Bcos C-sin Bsin C=-,即cos(B+C)=-.

所以B+C=,故A=.

由题设得bcsin A=,即bc=8.

由余弦定理得$b^2+c^2-bc=9$,即$(b+c)^2-3bc=9$,得b+c=.

故△ABC 的周长为 3+.

3.(2018 全国Ⅱ·17)△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 sin(A+C)=8sin².

(1)求 cos B;

(2)若 a+c=6,△ABC 的面积为 2,求 b.

解 (1)由题设及 A+B+C=π,得 sin B=8sin²,

故 sin B=4(1-cos B).

上式两边平方,整理得 $17\cos^2B-32\cos B+15=0$,

解得 cos B=1(舍去),cos B=.

(2)由 cos B=得 sin B=,

故 $S_{\triangle ABC}$=acsin B=ac.

又 $S_{\triangle ABC}$=2,则 ac=.

由余弦定理及 a+c=6 得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$

=36-2×

=4.

所以 b=2.

4.(2018 全国Ⅲ·17)△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 sin A+cos A=0,a=2,b=2.

(1)求 c;

(2)设 D 为 BC 边上一点,且 AD⊥AC,求△ABD 的面积.

解 (1)由已知可得 tan A=-,所以 A=.

在△ABC 中,由余弦定理得 $28=4+c^2-4c\cos$,

即 $c^2+2c-24=0$.解得 c=-6(舍去),c=4.

(2)由题设可得∠CAD=,

所以∠BAD=∠BAC-∠CAD=.故△ABD 面积与△ACD 面积的比值为=1.

又△ABC 的面积为×4×2sin∠BAC=2,所以△ABD 的面积为.

5.(2018 全国Ⅰ·17)△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 2cos

C(acos B+bcos A)=c.

(1)求 C;

(2)若 c=,△ABC 的面积为,求△ABC 的周长.

解 (1)由已知及正弦定理得,

2cos C(sin Acos B+sin Bcos A)=sin C,

即 2cos Csin(A+B)=sin C.

故 2sin Ccos C=sin C.

可得 cos C=,所以 C=.

(2)由已知,absin C=.

又 C=,所以 ab=6.

由已知及余弦定理得,a^2+b^2-2abcos C=7.

故 a^2+b^2=13,从而$(a+b)^2$=25.

所以△ABC 的周长为 5+.

新题演练提能·刷高分

1.(2018 山东淄博一模)在△ABC 中,角 A,B,C 对边分别为 a,b,c,已知 2=$a^2-(b+c)^2$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 a=6,b=2,求△ABC 的面积.

解 (1)由已知 2=$a^2-(b+c)^2$,得 2bccos A=$a^2-(b+c)^2$,由余弦定理 $a^2=b^2+c^2$-2bccos A,得 4bccos A=-2bc,所以 cos A=-.又 0<A<π,故 A=.

(2)由(1)知 cos A=-,sin A=,由正弦定理,得 sin B=,

所以 B=π(舍去).

从而 C=,所以△ABC 的面积为 S=absin C=×6×2=3.

2.(2018 河南郑州第二次质量预测)△ABC 内接于半径为 R 的圆,a,b,c 分别是 A,B,C 的对边,且 2R($\sin^2$B-$\sin^2$A)=(b-c)sin C,c=3.

(1)求 A;

(2)若 AD 是 BC 边上的中线,AD=,求△ABC 的面积.

解 (1)由正弦定理,得 2R($\sin^2$B-$\sin^2$A)=(b-c)sin C,可化为 bsin B-asin

$A=b\sin C-c\sin C$,即 $b^2-a^2=bc-c^2$,$\cos A=$,$A=60°$.

(2)以 AB,AC 为邻边作▱ABEC,在△ABE 中,∠ABE=120°,AE=.

在△ABE 中,由余弦定理得 $AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos 120°$.

即 $19=9+AC^2-2\times3\times AC\times\left(-\right)$,

解得 AC=2.

故 $S_{\triangle ABC}=bc\sin A=$.

3.(2018 山东济南一模)在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $b\cos A-a\cos B=2c$.

(1)证明:$\tan B=-3\tan A$;

(2)若 $b^2+c^2=a^2+bc$,且△ABC 的面积为,求 a.

(1)证明 根据正弦定理,由已知得 $\sin B\cos A-\cos B\sin A=2\sin C=2\sin(A+B)$,展开得 $\sin B\cos A-\cos B\sin A=2(\sin B\cos A+\cos B\sin A)$,

整理得 $\sin B\cos A=-3\cos B\sin A$,所以 $\tan B=-3\tan A$.

(2)解 由已知得 $b^2+c^2-a^2=bc$,

∴$\cos A=$,

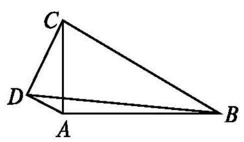
由 $0<A<\pi$,得 $A=$,$\tan A=$,

∴$\tan B=-$,

由 $0<B<\pi$,得 $B=$,∴$C=$,∴$a=c$,

由 $S=ac\sin a^2=$,得 $a=2$.

4.(2018 河北唐山二模)



如图,在平面四边形 ABCD 中,AB=2,AC=2,∠ADC=∠CAB=90°,设∠DAC=θ.

(1)若 θ=60°,求 BD 的长度;

(2)若∠ADB=30°,求 tan θ.

解 (1)由题意可知,AD=1.

在△ABD 中,∠DAB=150°,AB=2,AD=1,由余弦定理可知,

$BD^2=(2)^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\right)=19$，BD=.

(2)由题意可知，$AD=2\cos\theta$，$\angle ABD=60°-\theta$，

在△ABD中，由正弦定理可知，，

∴=4，∴$\tan\theta$=.

5.(2018新疆乌鲁木齐第二次质监)在△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知A=2B.

(1)求证：$a^2=b(b+c)$；

(2)若△ABC的面积为a^2，求B的大小.

(1)证明 由A=2B，可得$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

又由正、余弦定理得$a=2b\cdot$，有$(c-b)(a^2-b^2-bc)=0$.

当$b\neq c$时，$a^2-b^2-bc=0$，即$a^2=b^2+bc=b(b+c)$.

当b=c时，B=C.又A=2B，

∴A=90°，B=C=45°.

∴a=b，∴$a^2-b^2-bc=(b)^2-b^2-b\cdot b=0$，

∴$a^2=b^2+bc$.

综上，当A=2B时，$a^2=b^2+bc$.

(2)解 ∵$S_{\triangle ABC}=ac\sin B=a^2$，

∴$c\sin B=a$，

∴$\sin C\sin B=\sin A$.

又A=2B，∴$\sin C\sin B=\sin B\cos B$.

∵$\sin B\neq0$，∴$\sin C=\cos B$.

又$B,C\in(0,\pi)$，∴C=±B.

当B+C=时，B=；

当C-B=时，B=；

∴B=或B=.

6.(2018广东深圳第二次调研)在△ABC中，记内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知B为锐角，且$a\cos B+b\sin B=c$.

(1)求角C.

(2)若 B=,延长线段 AB 至 D,使得 CD=,且△ACD 的面积为,求线段 BD 的长度.

解 (1)由正弦定理可知 sin Acos B+$\sin^2$B=sin C.

∵sin C=sin(A+B)=sin Acos B+cos Asin B,

∴$\sin^2$B=cos Asin B.

∴B∈$\left(0,\right)$,sin B>0,

∴sin B=cos A,即 cos$\left(-B\right)$=cos A.

∴A∈(0,π),-B∈$\left(0,\right)$,

∴-B=A,即 A+B=. ∴C=.

(2)设 BD=x,CB=a.

∵∠ABC=,∠ACB=,

∴AC=a,AB=2a,AD=2a+x.

∴$S_{\triangle ACD}$=AC·AD·sin A

=a×(2a+x)×,

即 a(2a+x)=3.①

在△BCD 中,由余弦定理可得

$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle DBC$,

即 $x^2+a^2+ax=3$.②

联立①②可解得 x=a=1.

即 BD=1.

命题角度 2 解三角形中的最值与范围问题

高考真题体验·对方向

(2013 全国Ⅱ·17)△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 a=bcos C+csin B.

(1)求 B;

(2)若 b=2,求△ABC 面积的最大值.

解 (1)由已知及正弦定理得

$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$.①

又 $A=\pi-(B+C)$,故

$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$.②

由①,②和 $C\in(0,\pi)$ 得 $\sin B=\cos B$,

又 $B\in(0,\pi)$,所以 B=.

(2)△ABC 的面积 S=acsin B=ac.

由已知及余弦定理得 $4=a^2+c^2-2ac\cos$.

又 $a^2+c^2\geq 2ac$,故 ac≤,当且仅当 a=c 时,等号成立.

因此△ABC 面积的最大值为+1.

新题演练提能·刷高分

1.(2018 四川资阳 4 月模拟)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin C-\sin B)$.

(1)求 A.

(2)若 a=4,求 b^2+c^2 的取值范围.

解 (1)根据正弦定理,得 $(a+b)(a-b)=c(c-b)$,即 $a^2-b^2=c^2-bc$,

则,即 cos A=.

由于 $0<A<\pi$,所以 A=.

(2)根据余弦定理,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos$,

所以 $b^2+c^2=16+bc\leq 16+$,

则有 $b^2+c^2\leq 32$.又 $b^2+c^2=16+bc>16$,

所以 b^2+c^2 的取值范围是(16,32].

2.(2018 山东烟台一模)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,$(b-c)(\sin B+\sin C)=a(\sin A-\sin C)$.

(1)求 B 的值;

(2)若 b=3,求 a+c 的最大值.

解 (1)在△ABC 中,由正弦定理得,$(b-c)(b+c)=a(a-c)$,即 $b^2=a^2+c^2-ac$,

由余弦定理,得 cos B=.

∵$B\in(0,\pi)$,∴B=.

(2)由(1)知,$9=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$.

于是$=ac\leq\left(\right)^2$,解得 $a+c\leq6$,

当且仅当 $a=c=3$ 时,取等号.所以 $a+c$ 的最大值为 6.

3.(2018 辽宁大连一模)已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $b=2$,且 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$.

(1)求 B 的大小;

(2)求△ABC 面积的最大值.

$\boxed{解}$(1)由 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$,可得 $2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin B$,∵$\sin B\neq0$,

∴$\cos B=$,∴$B=$.

(2)方法一:由 $b=2$,$B=$,根据余弦定理可得 $ac=a^2+c^2-4$,

由基本不等式可得 $ac=a^2+c^2-4\geq2ac-4$,

所以 $ac\leq4$,当且仅当 $a=c$ 时,等号成立.

从而 $S_{\triangle ABC}=ac\sin B\leq\times4\times$,

故△ABC 面积的最大值为.

方法二:因为,

所以 $a=\sin A$,$c=\sin C$,

$S=ac\sin B=\sin A\cdot\sin C\cdot\sin B$

$=\sin A\sin\left(-A\right)=\cos\left(2A-\pi\right)+$,

当 $2A-\pi=0$,即 $A=$时,$S_{max}=$,

故△ABC 面积的最大值为.

4.(2018 贵州凯里模拟)已知在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,$m=(2\cos C,a\cos B+b\cos A)$,$n=(c,-1)$,且 $m\perp n$.

(1)求角 C;

(2)若 $c=3$,求△ABC 周长的最大值.

$\boxed{解}$(1)∵$m\perp n$,

∴$2c\cos C-(a\cos B+b\cos A)=0$.

由正弦定理得 $2\sin C\cos C-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=0$.即 $2\sin C\cos C-\sin(A+B)=0$.

$\therefore 2\sin C\cos C-\sin C=0$.

在△ABC 中，$0<C<\pi$，$\therefore \sin C\neq 0$.

$\therefore \cos C=$. $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=$.

(2)由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)=9$.

即$(a+b)^2-3ab=9$，

$\therefore ab=[(a+b)^2-9]\leqslant\left(\right)^2$.

$\therefore (a+b)^2\leqslant 36$. $\therefore a+b\leqslant 6$，

当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，∴△ABC 周长的最大值为 $6+3=9$.

5.(2018 山西太原二模)已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\tan A=(c\cos B+b\cos C)$.

(1)求角 A；

(2)若点 D 满足=2，且 BD=3，求 2b+c 的取值范围.

解 (1)$\because a\tan A=(c\cos B+b\cos C)$，

$\therefore \sin A\cdot\tan A=(\sin C\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos C)$，

$\therefore \sin A\cdot\tan A=\sin(B+C)=\sin A$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq 0$，

$\therefore \tan A=$，$\therefore A=60°$.

(2)在△ABD 中，根据余弦定理得 $AD^2+AB^2-BD^2=2AD\cdot AB\cos A$，

即$(2b)^2+c^2-9=2bc$，$\therefore (2b+c)^2-9=6bc$，

又 $2bc\leqslant\left(\right)^2$，

$\therefore =2bc\leqslant\left(\right)^2$.

$\therefore (2b+c)^2\leqslant 36$，$\therefore 2b+c\leqslant 6$.

又 $2b+c>3$，$\therefore 3<2b+c\leqslant 6$.

6.(2018 东北三省三校二模)已知△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，若$(a-c)(\sin A+\sin C)=b(\sin A-\sin B)$.

(1)求角 C；

(2)若△ABC 的外接圆半径为 2，求△ABC 周长的最大值.

解 (1)由正弦定理得$(a-c)(a+c)=b(a-b)$，