

专题 6.5 线段与角中的常见思想方法的应用【八大题型】

【苏科版】

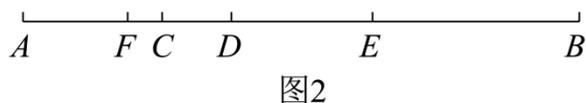
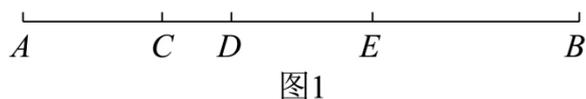
题型先知

【题型 1 线段中的整体思想】	1
【题型 2 线段中的方程思想】	5
【题型 3 线段中的分类讨论思想】	11
【题型 4 线段中的数形结合思想】	17
【题型 5 角中的整体思想】	22
【题型 6 角中的方程思想】	30
【题型 7 角中的分类讨论思想】	37
【题型 8 角中的数形结合思想】	42

举一反三

【题型 1 线段中的整体思想】

【例 1】（2022·全国·七年级专题练习）线段 $AB=16$ ， C ， D 是线段 AB 上的两个动点（点 C 在点 D 的左侧），且 $CD=2$ ， E 为 BC 的中点。



(1)如图 1，当 $AC=4$ 时，求 DE 的长。

(2)如图 2， F 为 AD 的中点。点 C ， D 在线段 AB 上移动的过程中，线段 EF 的长度是否会发生变化，若会，请说明理由；若不会，请求出 EF 的长。

【答案】(1) $DE=4$

(2) $EF=7$

【分析】(1) 首先根据题意求出 BC 的长度，然后由 E 为 BC 的中点求出 BE 的长度，最后即可求出 DE 的长；

(2) 由题意可得 $AD+BC=AB+CD$ ，由 F 为 AD 的中点和 E 为 BC 的中点表示出 $FD+CE=\frac{1}{2}(AD+BC)$ ，代入 $EF=FD+CE-CD$ ，即可求出 EF 长。

【详解】(1) $\because AB=16, CD=2, AC=4,$

$\therefore BC = AB - AC = 16 - 4 = 12, AD = AC + CD = 6,$

$\because E$ 为 BC 的中点,

$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 6,$

$\therefore DE = AB - AD - BE = 16 - 6 - 6 = 4;$

(2) 线段 EF 的长度不会发生变化, $EF = 7,$

$\because AB=16, CD=2,$

$\therefore AD + BC = AB + CD = 16 + 2 = 18,$

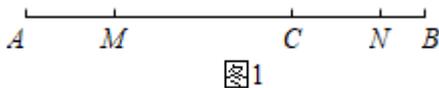
$\because F$ 为 AD 的中点, E 为 BC 的中点,

$\therefore FD + CE = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2} \times 18 = 9,$

$\therefore EF = FD + CE - CD = 9 - 2 = 7.$

【点睛】此题考查了线段的和差计算以及有关线段中点的计算问题, 解题的关键是正确分析题目中线段之间的数量关系.

【变式 1-1】(2022·黑龙江大庆·期末) 如图 1, 已知点 C 在线段 AB 上, 且 $AM = \frac{1}{3}AC, BN = \frac{1}{3}BC.$



(1) 若 $AC = 12, CB = 6,$ 求线段 MN 的长.

(2) 若 C 为线段 AB 上任意一点, 且满足 $AC + BC = a,$ 其他条件不变, 求线段 MN 的长.

【答案】(1)12

(2) $\frac{2}{3}a$

【分析】(1) 若 $AC=12, CB=6,$ 求线段 MN 的长;

(2) 若点 C 为线段 AB 上任意一点, 且满足 $AC+BC=a,$ 请直接写出线段 MN 的长;

(1)

解: 因为 $AM = \frac{1}{3}AC, BN = \frac{1}{3}BC, AC = 12, CB = 6,$

所以 $AM = \frac{1}{3} \times 12 = 4, BN = \frac{1}{3} \times 6 = 2.$

$$AB = AC + BC = 12 + 6 = 18.$$

$$\text{所以 } MN = AB - AM - NB = 18 - 4 - 2 = 12.$$

(2)

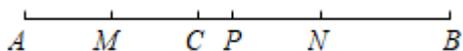
$$\text{解: 因为 } AM = \frac{1}{3}AC, \quad BN = \frac{1}{3}BC, \quad AC + BC = a,$$

$$\text{所以: } AM + BN = \frac{1}{3}(AC + BC) = \frac{1}{3}a,$$

$$\text{所以 } MN = AB - (AM + BN) = AC + BC - (AM + BN) = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a.$$

【点睛】 本题考查了两点间的距离，利用 $AM = \frac{1}{3}AC$ 、 $BN = \frac{1}{3}BC$ ，得出 AM 的长， BN 的长是解题关键。

【变式 1-2】 (2022·四川德阳·七年级期末) 如图，点 C 是线段 AB 上的一点，点 M 、 N 、 P 分别是线段 AC 、 BC 、 AB 的中点。



(1) 若 $AB=10\text{cm}$ ，求线段 MN 的长；

(2) 若 $AC=3\text{cm}$ ， $CP=1\text{cm}$ ，求线段 PN 的长。

【答案】 (1) $MN=5\text{cm}$

(2) $PN=\frac{3}{2}\text{cm}$

【分析】 (1) 根据线段中点的性质可得 $MC = \frac{1}{2}AC$ ， $CN = \frac{1}{2}BC$ 。再根据 $MN = MC + CN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + BC)$ 代入计算即可得出答案；

(2) 先根据题意可计算出 AP 的长度，由线段中点的性质可得 $AB = 2AP$ ， $CB = AB - AC$ ， $CN = \frac{1}{2}CB$ ，再根据 $PN = CN - CP$ 代入计算即可得出答案。

(1)

解: $\because M$ 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点，

$$\therefore MC = \frac{1}{2}AC, \quad CN = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore MN = MC + CN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + BC) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ (cm)}.$$

(2)

解: $\because AC=3$ ， $CP=1$ ，

$$\therefore AP = AC + CP = 4,$$

\because 点 P 是线段 AB 的中点,

$$\therefore AB = 2AP = 8, \quad CB = AB - AC = 5,$$

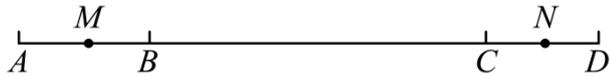
\because 点 N 是线段 CB 的中点,

$$\therefore CN = \frac{1}{2}CB = \frac{5}{2} \text{ (cm)},$$

$$\therefore PN = CN - CP = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \text{ (cm)}.$$

【点睛】 本题主要考查了两点间距离的计算, 熟练掌握两点间的距离计算方法进行求解是解决本题的关键.

【变式 1-3】 (2022·湖南长沙·七年级期末) 如图, 已知 B 、 C 在线段 AD 上, M 是 AB 的中点, N 是 CD 的中点, 且 $AB = CD$.



(1) 如图线段 AD 上有 6 个点, 则共有_____条线段;

(2) 比较线段的大小: AC _____ BD (填“>”、“=”或“<”);

(3) 若 $AD = 12$, $BC = 8$, 求 MN 的长度.

【答案】 (1)15

(2)=

(3)10

【分析】 (1) 根据线段有两个端点, 得出所有线段的条数;

(2) 依据 $AB = CD$, 即可得到 $AB + BC = CD + BC$, 进而得出 $AC = BD$;

(3) 依据线段的和差关系以及中点的定义, 即可得到 MN 的长度.

(1)

\because 线段 AD 上有 6 个点,

$$\therefore \text{图中共有线段条数为 } 6 \times (6-1) \div 2 = 15;$$

故答案为: 15;

(2)

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore AB + BC = CD + BC,$$

即 $AC=BD$;

故答案为: =;

(3)

$$\because AD = 12, BC = 8,$$

$$\therefore AB + CD = AD - BC = 4,$$

$\because M$ 是 AB 的中点, N 是 CD 的中点,

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AB, CN = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore BM + CN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore MN = BM + CN + BC = 2 + 8 = 10.$$

【点睛】 本题主要考查了两点间的距离以及线段的和差关系, 利用中点性质转化线段之间的倍分关系, 在不同情况下灵活选用它的不同表示方法, 有利于解题的简洁性.

【题型 2 线段中的方程思想】

【例 2】 (2022·河南信阳·七年级期末) 如图, A, B, C, D 四点在同一条直线上.



(1) 若 $AB = CD$,

① 比较线段的大小: AC _____ BD ; (填“>”“=”或“<”)

② 若 $BC = \frac{3}{4}AC$, 且 $AC = 24\text{cm}$, 则 AD 的长为 _____ cm ;

(2) 若线段 AD 被点 B, C 分成了 3:4:5 三部分, 且 AB 的中点 M 和 CD 的中点 N 之间的距离是 20cm , 求 AD 的长.

【答案】 (1) ① =; ② 30

(2) 30cm

【分析】 (1) ① 根据等式的性质, 得出答案; ② 求出 BC 的值, 再求出 AB, CD 的长, 进而求出 AD 的长即可;

(2) 根据线段的比, 线段中点的意义, 设未知数, 列方程求解即可.

(1)

$$\textcircled{1} \because AB = CD,$$

$$\therefore AB + BC = CD + BC,$$

即, $AC = BD$,

故答案为: =;

② $\because BC = \frac{3}{4}AC$, 且 $AC = 24\text{cm}$,

$\therefore BC = \frac{3}{4} \times 24 = 18(\text{cm})$,

$\therefore AB = CD = AC - BC = 24 - 18 = 6(\text{cm})$

$\therefore AD = AC + CD = 24 + 6 = 30(\text{cm})$

故答案为: 30;

(2)

解: 如图 1 所示,



图1

\because 线段 AD 被点 B, C 分成了 $3:4:5$ 三部分,

设 $AB = 3x$, 则 $BC = 4x$, $CD = 5x$,

因为 M 是 AB 的中点, N 是 CD 的中点,

所以 $BM = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}x$, $CN = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}x$,

所以 $\frac{3}{2}x + 4x + \frac{5}{2}x = 20$;

得 $x = \frac{5}{2}$;

所以 $AD = 3x + 4x + 5x = 12x = 12 \times \frac{5}{2} = 30\text{cm}$.

【点睛】 本题考查线段的和差及其中点的有关计算, 理解线段中点的意义是正确计算的前提, 以及根据已知, 用方程思想解决问题是解题关键.

【变式 2-1】 (2022·山东枣庄东方国际学校七年级阶段练习) 如图, 点 A, B 在线段 EF 上, 点 M, N 分别是线段 EA, BF 的中点, $EA:AB:BF = 1:2:3$, 若 $MN = 6\text{cm}$, 求线段 EF 的长.



【答案】 EF 的长为 9cm .

【分析】 由于 $EA:AB:BF = 1:2:3$, 可以设 $EA = x$, $AB = 2x$, $BF = 3x$, 而 M, N 分别为 EA, BF 的中点, 那

么线段 MN 可以用 x 表示，而 $MN=6\text{cm}$ ，由此即可得到关于 x 的方程，解方程即可求出线段 EF 的长度。

【详解】解：设 $EA = x\text{cm}$

$$\because EA:AB:BF = 1:2:3,$$

$$\therefore AB = 2x\text{cm}, BF = 3x\text{cm},$$

而 M 、 N 分别为 EA 、 BF 的中点，

$$\therefore MA = \frac{1}{2}EA, NB = \frac{1}{2}BF,$$

$$\therefore MN = MA + AB + BN = \frac{1}{2}x + 2x + \frac{3}{2}x = 4x\text{cm},$$

$$\because MN = 6\text{cm},$$

$$\therefore 4x = 6,$$

$$\therefore x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EF = EA + AB + BF = 6x = 9\text{cm}.$$

$\therefore EF$ 的长为 9cm 。

【点睛】 本题考查了两点间的距离。利用线段中点的性质转化线段之间的倍分关系是解题的关键，同时，灵活运用线段的和、差、倍、分转化线段之间的数量关系也是十分关键的一点。

【变式 2-2】（2022·山东泰安·期中）如图，已知数轴上有两点 A ， B ，它们的对应数分别是 a ， b ，其中 $a=12$ 。



(1) 在 B 左侧作线段 $BC=AB$ ，在 B 的右侧作线段 $BD=3AB$ （要求尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2) 若点 C 对应的数是 c ，点 D 对应的数是 d ，且 $AB=40$ ，求 c ， d 的值。

(3) 在（2）的条件下，设点 M 是 BD 的中点， N 是数轴上一点，且 $CN=4DN$ ，请直接写出 MN 的长。

【答案】(1) 见解析

$$(2) c = -68, d = 92$$

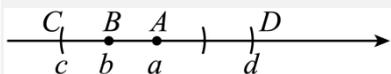
$$(3) MN = 28 \text{ 或 } \frac{340}{3}$$

【分析】（1）利用圆规量得 AB 的长度，以点 B 为圆心， AB 为半径画弧，交点 B 左边的坐标轴于一点，即为点 C ；再以点 A 为圆心， AB 为半径画弧，交点 A 右边的坐标轴于一点，再以此点为圆心， AB 为半径画弧，交圆心右边的坐标轴于另一点，则此交点为点 D ；

(2) 根据线段之间的等量关系求得 AC 、 AD 的长度，从而得出点所表示的数；

(3) 分两种情况分析：①点 N 在线段 CD 上；②点 N 在线段 CD 的延长线上.

【详解】(1) 解：线段 BC 、 BD 为所求线段，如图所示：



(2) 解：∵ $AB=40$, $BC=AB$,

$$\therefore AC=2AB=80,$$

$$\therefore a=12,$$

$$\therefore c=12-80=-68,$$

$$\therefore BD=3AB,$$

$$\therefore BD=120,$$

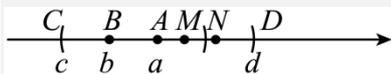
$$\therefore AD=80,$$

设 d 为 x 则, $x-12=80$,

解得: $x=92$,

$$\therefore d=92.$$

(3) 解：①当点 N 在线段 CD 上时，



由(2)得 $CD=92-(-68)=160$ ，点 B 对应的数为 $12-40=-28$ ，

$$\therefore BD=92-(-28)=120,$$

∵点 M 是 BD 的中点，

$$\therefore \text{点 } M \text{ 对应的数为 } 92-60=32,$$

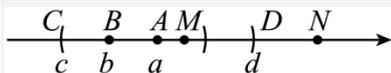
$$\therefore CN=4DN,$$

$$\therefore DN=\frac{1}{5}CD=32,$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 对应的数为 } 92-32=60,$$

$$\therefore MN=60-32=28;$$

②当点 N 在线段 CD 的延长线上时，



$$\therefore CN=4DN,$$

$$\therefore CD=3DN=160,$$

$$\therefore DN = \frac{160}{3},$$

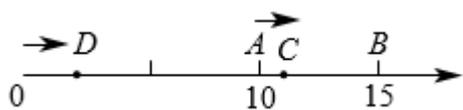
$$\therefore \text{点 } N \text{ 对应的数为 } 92 + \frac{160}{3} = \frac{436}{3},$$

$$\therefore MN = \frac{436}{3} - 32 = \frac{340}{3};$$

故 MN 的长为 28 或 $\frac{340}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了数轴与有理数的关系和线段中点的有关计算，解题关键是抓住线段之间的关系，体现了数形结合思想.

【变式 2-3】 (2022·山西晋城·七年级期末) 如图，数轴上点 A 、 B 对应着数 10、15. C 、 D 两点同时从点 A 、原点 O 出发分别以 1cm/s 和 2cm/s 的速度沿数轴向右运动. 设运动时间为 $t\text{s}$.



(1) 当 $t = 2$ 时，请说明 $BC = \frac{1}{2}AD$;

(2) 当 $t > 5$ ，且 $CD = AB$ 时，求 t 的值;

(3) 取线段 CD 的中点 M ，当 $BM = \frac{1}{4}OA$ 时，求 t 的值.

【答案】 (1) $BC = \frac{1}{2}AD$

(2) $t = 15$

(3) $t = 5$ 或 $t = \frac{25}{3}$

【分析】 (1) 分别计算出 BC 和 AD 即可等到 $BC = \frac{1}{2}AD$;

(2) 先计算得到 CD 的关于 t 的表达式，再根据 $CD = AB$ 求出 t 即可;

(3) 根据 M 在点 B 前面和后面两种情况分别计算出 BM 关于 t 的表达式，再根据 $BM = \frac{1}{4}OA$ 即可计算出 t .

(1)

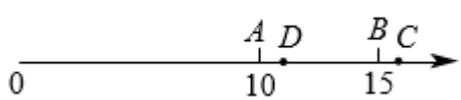
当 $t = 2$ 时， $AC = 1 \times t = 2$, $BC = OB - (OA + AC) = 15 - 10 - 2 = 3$,

$OD = 2 \times t = 4$, $AD = OA - OD = 10 - 4 = 6$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}AD$;

(2)

当 D 在 C 后面时，如下图所示，



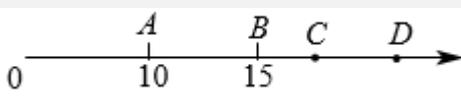
$$OD = 2t, OC = OA + AC = 10 + t, CD = OC - OD = 10 - t, AB = 15 - 10 = 5$$

$$\therefore CD = AB,$$

$$\therefore 10 - t = 5,$$

$$\therefore t = 5 \text{ (舍去)},$$

点 D 在点 C 的前面时，如下图所示，



$$CD = OD - OC = 2t - (10 + t) = t - 10,$$

$$\therefore CD = AB,$$

$$\therefore t - 10 = 5,$$

$$\text{即 } t = 15.$$

(3)

当点 M 在点 B 左边时，

$$\begin{aligned} BM &= OB - OM \\ &= OB - OD - DM \\ &= 15 - 2t - \frac{1}{2}(10 + t - 2t) \\ &= 10 - \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

$$\text{又 } \therefore BM = \frac{1}{4}OA,$$

$$\therefore 10 - \frac{3}{2}t = \frac{1}{4} \times 10$$

$$\text{即 } t = 5;$$

当点 M 在点 B 右边时，

$$\begin{aligned} BM &= OM - OB \\ &= OD + DM - OB \\ &= 2t + \frac{1}{2}(10 + t - 2t) - 15 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}t - 10$$

$$\text{又} \because BM = \frac{1}{4}OA$$

$$\frac{3}{2}t - 10 = \frac{1}{4} \times 10$$

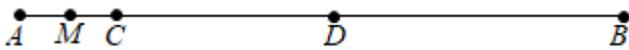
$$\text{即} t = \frac{25}{3},$$

$$\therefore t = 5 \text{ 或 } t = \frac{25}{3}.$$

【点睛】 本题考查数轴上的点及线段的长度，解题的关键是根据题意建立等式.

【题型3 线段中的分类讨论思想】

【例3】 (2022·全国·七年级专题练习) 已知线段 AB 上有两点 C 、 D ，使得 $AC:CD:DB = 1:2:3$ ， M 是线段 AC 的中点，点 N 是线段 AB 上的点，且满足 $DN = \frac{1}{4}DB$ ， $AB = 24$ ，求 MN 的长.



【答案】 7 或 13

【分析】 设 $AC = x$ ，则 $CD = 2x$ ， $DB = 3x$ ，根据题意得 $x + 2x + 3x = 24$ ，计算得 $x = 4$ ，即可得 $AC = 4$ ， $CD = 8$ ， $DB = 12$ ， $CB = 20$ ，根据点 M 是线段 AC 的中点得 $MC = \frac{1}{2}AC = 2$ ，根据 $DB = 12$ ， $DN = \frac{1}{4}DB$ 得 $DN = 3$ ，分以下两种情况：①当点 N 在线段 CD 上时，②当点 N 在线段 DB 上时，进行计算即可得.

【详解】 解：设 $AC = x$ ，则 $CD = 2x$ ， $DB = 3x$ ，

$$\therefore AB = 24,$$

$$\therefore x + 2x + 3x = 24,$$

$$6x = 24$$

解得 $x = 4$ ，

$$\therefore AC = 4, CD = 8, DB = 12, CB = 20,$$

\therefore 点 M 是线段 AC 的中点，

$$\therefore MC = \frac{1}{2}AC = 2,$$

$$\therefore DB = 12, DN = \frac{1}{4}DB,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{4} \times 12 = 3,$$

分以下两种情况：

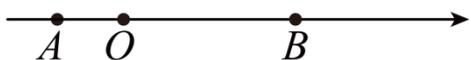
①当点 N 在线段 CD 上时, $MN = MC + CD - DN = 2 + 8 - 3 = 7$,

②当点 N 在线段 DB 上时, $MN = MC + CD + DN = 2 + 8 + 3 = 13$,

综上所述, 线段 MN 的长度为 7 或 13.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用, 两点间的距离的计算, 线段的中点的性质, 解题的关键是掌握线段中点的性质, 分类讨论.

【变式 3-1】 (2022·福建省永春第一中学七年级阶段练习) 如图, 在数轴上 A 点表示数 a , B 点表示数 b , AB 表示 A 点和 B 点之间的距离, 且 a 、 b 满足 $(a+1)^2 + |b-3| = 0$.



(1) 填空: $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $AB = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若数轴上存在一点 C , 且 $AC = 2BC$, 求 C 点表示的数;

(3) 若在原点 O 处放一挡板, 一小球甲从点 A 处以 1 个单位/秒的速度向左运动, 同时另一小球乙从点 B 处以 2 个单位/秒的速度也向左运动, 在碰到挡板后 (忽略球的大小, 可看作一点) 以原来的速度向相反的方向运动, 设运动的时间为 t (秒).

① 分别表示甲、乙两小球到原点的距离 (用 t 表示);

② 求甲、乙两小球到原点的距离相等时经历的时间.

【答案】 (1) -1, 3, 4

(2) $\frac{5}{3}$ 或 7

(3) ① 甲: $t+1$; 乙: $3-2t$ 或 $2t-3$; ② $t = \frac{2}{3}$ 秒 或 $t = 4$ 秒

【分析】 (1) 先根据非负数的性质求出 a 、 b 的值, 再根据两点间的距离公式求得 A 、 B 两点之间的距离;

(2) 分 C 点在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上两种情况讨论即可求解;

(3) ① 甲球到原点的距离 = 甲球运动的路程 + OA 的长, 乙球到原点的距离分两种情况: (I) 当 $0 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 乙球从点 B 处开始向左运动, 一直到原点 O , 此时 OB 的长度 - 乙球运动的路程即为乙球到原点的距离;

(II) 当 $t > \frac{3}{2}$ 时, 乙球从原点 O 处开始向右运动, 此时乙球运动的路程 - OB 的长度即为乙球到原点的距离;

② 分两种情况: (I) $0 < t \leq \frac{3}{2}$, (II) $t > \frac{3}{2}$, 根据甲、乙两小球到原点的距离相等列出关于 t 的方程, 解方程即可.

(1)

因为 $(a+1)^2 + |b-3| = 0$,

所以 $a+1=0, b-3=0$,

所以 $a=-1, b=3$;

所以 AB 的距离 $=|b-a|=4$,

故答案为: $-1, 3, 4$;

(2)

设数轴上点 C 表示的数为 c .

因为 $AC = 2BC$,

所以 $|c-a| = 2|c-b|$, 即 $|c+1| = 2|c-3|$.

因为 $AC = 2BC > BC$,

所以点 C 不可能在 BA 的延长线上, 则 C 点可能在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上.

①当 C 点在线段 AB 上时, 则有 $-1 < c < 3$,

得 $c+1 = 2(3-c)$, 解得 $c = \frac{5}{3}$;

②当 C 点在线段 AB 的延长线上时, 则有 $c > 3$,

得 $c+1 = 2(c-3)$, 解得 $c = 7$.

故当 $AC = 2BC$ 时, $c = \frac{5}{3}$ 或 $c = 7$;

(3)

①因为甲球运动的路程为: $1 \times t = t, OA = 1$,

所以甲球与原点的距离为: $t+1$;

乙球到原点的距离分两种情况:

(I) 当 $0 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 乙球从点 B 处开始向左运动, 一直到原点 O ,

因为 $OB = 3$, 乙球运动的路程为: $2 \times t = 2t$,

所以乙球到原点的距离为: $3-2t$;

(II) 当 $t > \frac{3}{2}$ 时, 乙球从原点 O 处开始一直向右运动, 此时乙球到原点的距离为: $2t-3$;

②当 $0 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 得 $t+1 = 3-2t$,

解得 $t = \frac{2}{3}$;

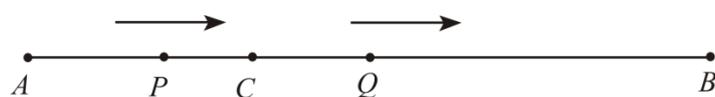
当 $t > \frac{3}{2}$ 时, 得 $t+1 = 2t-3$,

解得 $t = 4$.

故当 $t = \frac{2}{3}$ 秒或 $t = 4$ 秒时，甲乙两小球到原点的距离相等.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，非负数的性质，方程的解法，数轴，两点间的距离，有一定难度，运用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想是解题的关键.

【变式 3-2】 (2022·全国·七年级专题练习) 如图，点 C 是线段 AB 上的一点，线段 $AC = 8m$ ， $AB = \frac{3}{2}BC$. 机器狗 P 从点 A 出发，以 $6m/s$ 的速度向右运动，到达点 B 后立即以原来的速度返回；机械猫 Q 从点 C 出发，以 $2m/s$ 的速度向右运动，设它们同时出发，运动时间为 x s. 当机器狗 P 与机械猫 Q 第二次相遇时，机器狗和机械猫同时停止运动.



(1) $BC = \underline{\quad\quad} m$, $AB = \underline{\quad\quad} m$;

(2) 试通过计算说明：当 x 为何值时，机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处？

(3) 当 x 为何值时，机器狗和机械猫之间的距离 $PQ = 2m$ ？请直接写出 x 的值.

【答案】 (1) 16, 24.

(2) 当 $x = \frac{4}{5}$ ，即运动 $\frac{4}{5}$ 秒时，机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处.

(3) 当 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = \frac{19}{4}$ ，即运动 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = \frac{19}{4}$ 秒时，机器狗和机械猫之间的距离 $PQ = 2m$.

【分析】 (1) 由 $AB = \frac{3}{2}BC$ 且 $AC = 8cm$ 得 $8 + BC = \frac{3}{2}BC$ ，先求出 BC 的长，然后再求出 AB 的长即可；

(2) 先确定机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处只存在一种情况，即机器狗 P 与机械猫 Q 第一次相遇之前，再根据线段 $AP = \frac{1}{2}AQ$ 列方程求出 x 的值即可；

(3) 分三种情况，一是点 P 在线段 AQ 上，可根据 $AP + 2 = AQ$ 列方程求出 x 的值；二是点 P 在线段 BQ 上且点 P 到达点 B 之前，可根据 $AP - 2 = AQ$ 列方程求出 x 的值；三是点 P 在线段 BQ 上且点 P 从点 B 返回时，可

根据 $2AB$ 减去点 P 运动的距离等于 $AQ+2$ 列方程求出 x 的值即可.

【详解】(1) 解: $\because AB = \frac{3}{2}BC, AB=AC+BC, AC=8m,$

$\therefore 8+BC = \frac{3}{2}BC,$ 解得: $BC=16m,$

$\therefore AB = \frac{3}{2} \times 16 = 24m.$

故答案为: 16, 24.

(2) 解: 由题意可得: 机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处只存在一种情况, 即机器狗 P 与机械猫 Q 第一次相遇之前,

$\therefore 6x = \frac{1}{2}(8+2x),$ 解得 $x = \frac{4}{5}.$

答: 当 $x = \frac{4}{5}$, 即运动 $\frac{4}{5}$ 秒时, 机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处.

(3) 解: 当点 P 在线段 AQ 上且 $PQ=2m$ 时, 则 $6x+2=8+2x,$ 解得 $x = \frac{3}{2};$

当点 P 在线段 BQ 上且 $PQ=2m$ 时, 则 $6x-2=8+2x$ 或 $24 \times 2 - 6x = 8 + 2x + 2,$ 解得 $x = \frac{5}{2}$ 或 x

$\frac{19}{4}.$

答: 当 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = \frac{19}{4},$ 即运动 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = \frac{19}{4}$ 秒时, 机器狗和机械猫之间的距离 $PQ=2m.$

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程、一元一次方程的应用、线段上的动点问题的求解等知识点, 正确地用含 x 的代数式表示线段 AP 和 AQ 的长是解答本题的关键.

【变式 3-3】(2022·江西省丰城中学七年级期中) 已知数轴上 A 点表示的数是 $a,$ B 点表示的数是 $b,$ 且 a, b 满足式子 $(a+3)^2 + |b-6| = 0.$

(1) 写出 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 将数轴上线段 AB 剪下来, 并把 AB 这条线段沿着某点折叠, 然后在重叠部分某处剪一刀得到三条线段, 若这三条线段的长度之比为 1: 2: 2, 求折痕处对应的点所表示的数.

【答案】(1) -3; 6

(2) $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{12}{5}$

【分析】(1) 根据绝对值的非负性与偶次方的非负性, 非负数的性质得出 $a+3=0, b-6=0,$ 再解方程即可求解.

(2) 设折痕处点表示数为 $x,$ 被剪处为点 $C, D,$ 分三种情况: ① 当 $AC:CD:DB = 1:2:2$ 时, ② 当

$AC:CD:DB = 2:1:2$ 时，③当 $AC:CD:DB = 2:2:1$ 时，分别求解好戏可。

(1)

解：∵ $(a+3)^2 + |b-6| = 0$,

又∵ $(a+3)^2 \geq 0, |b-6| \geq 0$,

∴ $a+3 = 0, b-6 = 0$,

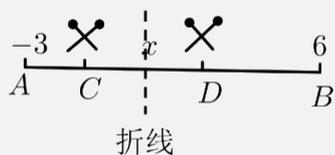
∴ $a = -3, b = 6$.

故答案为：-3；6.

(2)

解：设折痕处点表示数为 x ,

①当 $AC:CD:DB = 1:2:2$ 时，

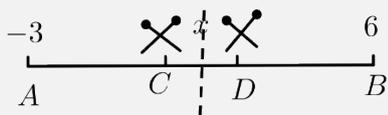


$AB = 5AC = 9$,

∴ $AC = \frac{9}{5}$,

∴ $x = -3 + 2 \times \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$.

②当 $AC:CD:DB = 2:1:2$ 时，



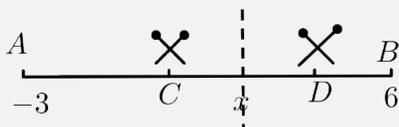
则 $AB = 5CD = 9$,

∴ $CD = \frac{9}{5}$,

∴ $AC + \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}CD = \frac{5}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{2}$,

∴ $x = -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$.

③当 $AC:CD:DB = 2:2:1$ 时，



则 $AB = 5DB = 9$,

$$\therefore DB = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AC + \frac{1}{2}CD = 3DB = 3 \times \frac{9}{5} = \frac{27}{5}.$$

$$\therefore x = -3 + \frac{27}{5} = \frac{12}{5}.$$

\therefore 综上, 折痕处表示的数为: $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{12}{5}$.

【点睛】 本题考查用数轴上的点表示有理数, 非负数的性质, 线段和差倍分, 熟练掌握偶次方与绝对值的非负性, 分类讨论思想的应用是解题的关键.

【题型 4 线段中的数形结合思想】

【例 4】 (2022·广东东莞·七年级期末) 如图, C 是线段 AB 上一点, $AB=12\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$, P 、 Q 两点分别从 A 、 C 出发以 1cm/s 、 2cm/s 的速度沿直线 AB 向右运动, 运动的时间为 $t\text{s}$.



(1) 当 $t=1\text{s}$ 时, $CP=$ _____ cm , $QB=$ _____ cm ;

(2) 当运动时间为多少时, PQ 为 AB 的一半?

(3) 当运动时间为多少时, $BQ=AP$?

【答案】 (1) 3, 6;

(2) 运动时间为 2s 时, PQ 为 AB 的一半;

(3) 运动时间为 $\frac{8}{3}\text{s}$ 或 8s 时, $BQ=AP$

【分析】 (1) 根据 $CP = AC - AP$, $QB = AB - AQ$ 的关系, 由 P 、 Q 两点分别从 A 、 C 出发以 1cm/s 、 2cm/s 的速度沿直线 AB 向右运动, 求解当 $t = 1\text{s}$ 对应的长度即可;

(2) 通过建立一元一次方程进行求解即可;

(3) 通过分类讨论的思想, 当点 Q 到点 B 的左边或右边时, 通过建立一元一次方程进行求解.

(1)

解: $\because CP = AC - AP$,

当 $t = 1\text{s}$, $AP = 1\text{cm}$,

$$\therefore CP = 4 - 1 = 3\text{cm},$$

$$\because QB = AB - AQ,$$

当 $t = 1\text{s}$, $CQ = 2\text{cm}$,

$$\therefore QB = 12 - 4 - 2 = 6\text{cm},$$

故答案为: 3, 6;

(2)

解: 设运动 t 秒时, PQ 是 AB 的一半,

当点 P 到点 C 的左边时,

$$\therefore PQ = PC + CQ = 4 - t + 2t = 6,$$

解得: $t = 2$,

当点 P 到点 C 的右边时, PQ 的距离大于 AB 的一半, 不满足题意,

故运动时间为 2s 时, PQ 是 AB 的一半;

(3)

解: 当点 Q 到点 B 的左边时,

设运动 t 秒时, $BQ = AP$,

$$\text{则 } 8 - 2t = t,$$

解得: $t = \frac{8}{3}$,

当点 Q 到点 B 的右边时,

设运动 t 秒时, $BQ = AP$,

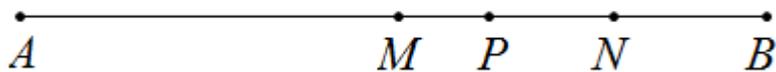
$$\text{则 } 2t - 8 = t,$$

解得: $t = 8$,

故运动时间为 $\frac{8}{3}\text{s}$ 或 8s 时, $BQ = AP$.

【点睛】 本题考查了数轴上的动点问题, 一元一次方程, 两点间的距离, 解题的关键是通过数形结合及分类讨论的思想进行求解.

【变式 4-1】 (2022·山东德州·七年级期末) 已知, 线段 $AB = 20$, M 是线段 AB 的中点, P 是线段 AB 上任意一点, N 是线段 PB 的中点.



(1) 当 P 是线段 AM 的中点时, 求线段 NB 的长;

(2) 当线段 $MP = 1$ 时, 求线段 NB 的长;

(3) 若点 P 在线段 BA 的延长线上, 猜想线段 PA 与线段 MN 的数量关系, 并画图加以证明.

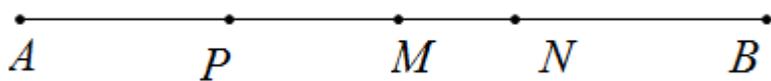
【答案】(1) 7.5; (2) 4.5 或 5.5; (3) $PA = 2MN$, 画图证明见解析.

【分析】(1) 画出符合题意的图形, 先求解 $AM = 10$, 再求解 $AP = 5$, 可得 $PB = 15$, 再利用中点的含义可得答案;

(2) 分两种情况讨论: 当 P 在 M 左边时, 当 P 在 M 右边时, 先求解 PB , 再利用中点的含义可得答案;

(3) 当 P 在线段 BA 延长线上时, 如图, 设 $PA = t$, 求解 $NB = 10 + \frac{1}{2}t$, 再求解 $MN = NB - MB = \frac{1}{2}t$, 从而可得结论.

【详解】解: (1) 如图, $\because M$ 是线段 AB 的中点, $AB = 20$



$$\therefore MA = \frac{1}{2}AB = 10$$

$\because P$ 是线段 AM 的中点,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AM = 5$$

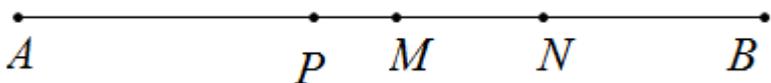
$$\therefore PB = AB - AP = 20 - 5 = 15$$

$\because N$ 是线段 PB 的中点

$$\therefore NB = \frac{1}{2}PB = 7.5$$

$$(2) \because MP = 1,$$

\therefore 当 P 在 M 左边时, 如图,

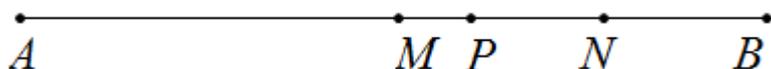


$$BP = MB + MP = 11,$$

$\because N$ 是线段 PB 的中点,

$$\therefore NB = \frac{1}{2}PB = 5.5,$$

如图, 当 P 在 M 右边时, $BP = MB - MP = 9,$

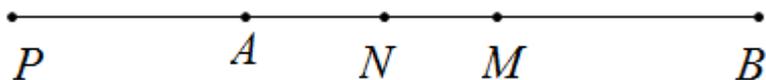


$\therefore N$ 是线段 PB 的中点,

$$\therefore NB = \frac{1}{2}PB = 4.5.$$

(3) 线段 PA 和线段 MN 的数量关系是: $PA = 2MN$, 理由如下:

当 P 在线段 BA 延长线上时, 如图, 设 $PA = t$,



则 $PB = 20 + t$

$\therefore N$ 是线段 PB 的中点

$$\therefore NB = \frac{1}{2}PB = 10 + \frac{1}{2}t$$

$\therefore M$ 是线段 AB 的中点, $AB = 20$

$$\therefore MB = \frac{1}{2}AB = 10$$

$$\therefore MN = NB - MB = \frac{1}{2}t$$

又 $\therefore PA = t$

$$\therefore PA = 2MN$$

【点睛】 本题考查的是线段的和差关系, 线段的中点的含义, 整式的加减运算, 分类思想的运用, 掌握以上知识是解题的关键.

【变式 4-2】 (2022·全国·七年级专题练习) 如图, 已知直线 l 上有两条可以左右移动的线段: $AB = m$, $CD = n$, 且 m, n 满足 $|m-4| + (n-8)^2 = 0$, 点 M, N 分别为 AB, CD 中点.



(1) 求线段 AB, CD 的长;

(2) 线段 AB 以每秒 4 个单位长度向右运动, 线段 CD 以每秒 1 个单位长度也向右运动. 若运动 6 秒后, $MN = 4$, 求此时线段 BC 的长;

(3) 若 $BC = 24$, 将线段 CD 固定不动, 线段 AB 以每秒 4 个单位速度向右运动, 在线段 AB 向右运动的某一个时间段 t 内, 始终有 $MN + AD$ 为定值. 求出这个定值, 并直接写出 t 在哪个时间段内.

【答案】 (1) 线段 AB 的长是 4, 线段 CD 的长是 8

(2) 16 或 8

(3) 当 $7.5 \leq t \leq 9$ 时, $MN + AD$ 为定值, 定值为 6

【分析】(1) 利用绝对值和平方的非负性求出 m 和 n 的值即可；

(2) 分 M' 在 N' 的左侧和 M' 在 N' 的右侧两种情况，根据线段的和差关系列出方程，即可求解；

(3) 由题意，运动 t 秒后， $MN = |30-4t|$ ， $AD = |36-4t|$ ，分段讨论即可求解。

(1)

$$\text{解：} \because |m-4| + (n-8)^2 = 0,$$

$$\therefore |m-4| = 0, (n-8)^2 = 0,$$

$$\therefore m = 4, n = 8,$$

$$\therefore AB = 4, CD = 8,$$

即线段 AB 的长是 4，线段 CD 的长是 8；

(2)

$$\text{解：} \because AB = 4, CD = 8,$$

$$\therefore MB = \frac{1}{2}AB = 2, CN = \frac{1}{2}CD = 4,$$

设运动后点 M 对应点为 M' ，点 N 对应点为 N' ，分两种情况，

若 6 秒后， M' 在 N' 的左侧时： $MN + NN' = MM' + M'N'$ ，

$$\therefore MB + BC + CN + NN' = MM' + M'N',$$

$$\text{即 } 2 + BC + 4 + 6 \times 1 = 6 \times 4 + 4,$$

解得 $BC = 16$ 。

若 6 秒后， M' 在 N' 的右侧时： $MM' = MN + NN' + M'N'$ ，

$$\therefore MM' = MB + BC + CN + NN' + M'N',$$

$$\text{即 } 6 \times 4 = 2 + BC + 4 + 6 \times 1 + 4,$$

解得 $BC = 8$ 。

即线段 BC 的长为 16 或 8；

(3)

$$\text{解：} \because BC = 24, AB = 4, CD = 8,$$

$$\therefore MN = BC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = 24 + 2 + 4 = 30, AD = BC + AB + CD = 24 + 4 + 8 = 36,$$

\therefore 线段 CD 固定不动，线段 AB 以每秒 4 个单位速度向右运动，

$$\therefore \text{运动 } t \text{ 秒后，} MN = |30-4t|, AD = |36-4t|,$$

当 $0 \leq t < 7.5$ 时, $MN + AD = 30 - 4t + 36 - 4t = 66 - 8t$;

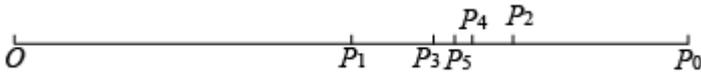
当 $7.5 \leq t \leq 9$ 时, $MN + AD = 4t - 30 + 36 - 4t = 6$;

当 $t > 9$ 时, $MN + AD = 4t - 30 + 4t - 36 = 8t - 66$;

故当 $7.5 \leq t \leq 9$ 时, $MN + AD$ 为定值, 定值为 6.

【点睛】 本题考查非负数的性质, 一元一次方程的应用, 线段的和差关系, 以及数轴上的动点问题, 解题的关键是掌握分类讨论思想.

【变式 4-3】 (2022·河南周口·七年级期末) 学习了线段的中点之后, 小明利用数学软件 *GeoGebra* 做了 n 次取线段中点实验: 如图, 设线段 $OP_0 = 1$. 第 1 次, 取 OP_0 的中点 P_1 ; 第 2 次, 取 P_0P_1 的中点 P_2 ; 第 3 次, 取 P_1P_2 的中点 P_3 , 第 4 次, 取 P_2P_3 的中点 P_4 ; ...



(1) 请完成下列表格数据.

次数	$P_{i-1}P_i$	线段 OP_i 的长
第 1 次	$P_0P_1 = \frac{1}{2}$	$OP_1 = OP_0 - P_0P_1 = 1 - \frac{1}{2}$
第 2 次	$P_1P_2 = \frac{1}{2^2}$	$OP_2 = OP_1 + P_1P_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$
第 3 次	$P_2P_3 = \frac{1}{2^3}$	$OP_3 = OP_2 - P_2P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}$
第 4 次	$P_3P_4 = \frac{1}{2^4}$	$OP_4 = OP_3 + P_3P_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$
第 5 次		
...

(2) 小明对线段 OP_4 的表达式进行了如下化简:

$$\text{因为 } OP_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4},$$

$$\text{所以 } 2OP_4 = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}.$$

$$\text{两式相加, 得 } 3OP_4 = 2 + \frac{1}{2^4}.$$

所以 $OP_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 2^4}$.

请你参考小明的化简方法，化简 OP_5 的表达式.

(3) 类比猜想: $P_{n-1}P_n =$ _____, $OP_n =$ _____, 随着取中点次数 n 的不断增大, OP_n 的长最终接近的值是 _____.

【答案】 (1) $P_4P_5 = \frac{1}{2^5}$, $OP_5 = OP_4 - P_4P_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$

(2) $OP_5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \times 2^5}$

(3) $\frac{1}{2^n}$, $\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n}$, $\frac{2}{3}$

【分析】 (1) 根据表中的规律可求出 P_4P_5 , 根据 $OP_5 = OP_4 - P_4P_5$ 可得出答案;

(2) 参照小明对线段 OP_4 的表达式化简可得 OP_5 的表达式;

(3) 根据类比猜想可得答案.

(1)

解: $P_4P_5 = \frac{1}{2^5}$, $OP_5 = OP_4 - P_4P_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$;

故答案为: $P_4P_5 = \frac{1}{2^5}$, $OP_5 = OP_4 - P_4P_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$;

(2)

解: 因为 $OP_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$,

所以 $2OP_5 = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}\right) = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}$.

两式相加, 得 $3OP_5 = 2 - \frac{1}{2^5}$.

所以 $OP_5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \times 2^5}$;

(3)

解: $P_{n-1}P_n = \frac{1}{2^n}$, $OP_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n}$, 随着取中点次数 n 的不断增大 OP_n 的长最终接近的值是 $\frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{2^n}$, $\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n}$, $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查规律型: 图形的变化类, 找到规律并会表现出来是解题关键.

【题型 5 角中的整体思想】

【例 5】 (2022·山西·七年级期末) 数学课上, 李老师出示了如下题目.

将一副三角板按如图 1 所示方式摆放，分别作出 $\angle AOC$ ， $\angle BOD$ 的平分线 OM ， ON ，然后提出问题：求 $\angle MON$ 的度数。

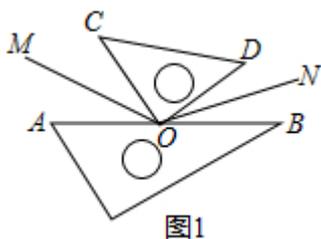


图1

小明与同桌小丽讨论后，进行了如下解答：

特殊情况，探索思路

将三角板分别按图 2，图 3 所示的方式摆放， OM 和 ON 仍然是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的平分线，其中，按图 2 方式摆放时，可以看成是 ON ， OD ， OB 在同一直线上。按图 3 方式摆放时， $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 相等。

(1) 请你直接写出计算结果：图 2 中 $\angle MON$ 的度数为_____，图 3 中 $\angle MON$ 的度数为_____；

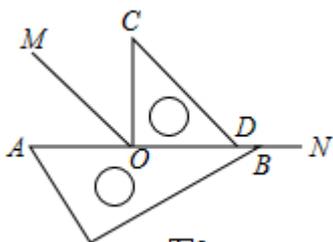


图2

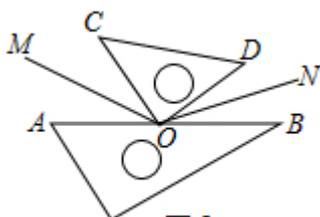


图3

特例启发，解答题目

(2) 请你完成李老师出示的题目的解答过程；

拓展结论，设计新题

(3) 若将李老师出示的题目中条件“分别作出 $\angle AOC$ ， $\angle BOD$ 的平分线 OM ， ON ”改为“分别作出射线 OM ， ON ，使 $\angle AOM = \frac{3}{4}\angle AOC$ ， $\angle DON = \frac{1}{4}\angle BOD$ ”，请你直接写出 $\angle MON$ 的度数。

【答案】 (1) 135° ； 135° ； (2) 答案见解析； (3) 112.5°

【分析】 (1) 根据角平分线的定义和角的和差即可得到结论；

(2) 根据已知条件得到 $\angle AOC + \angle BOD = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle MOC + \angle NOD = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD) = 45^\circ$ ，于是得到结论；

(3) 根据已知条件得到 $\angle AOC + \angle BOD = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle MOC + \angle NOD = \frac{1}{4}(\angle AOC + \angle BOD) = 22.5^\circ$ ，于是得到结论。

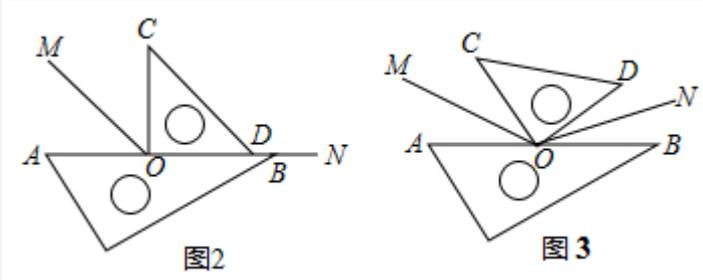
【详解】（1）解：图2中， $\angle MON = \frac{1}{2} \times 90^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ ，

图3中， $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD + \angle COD$

$$= \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD) + 90^\circ$$

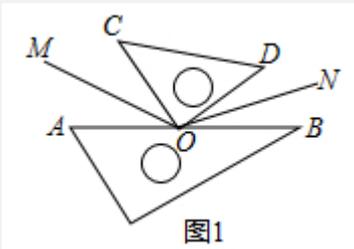
$$= \frac{1}{2} \times 90^\circ + 90^\circ$$

$= 135^\circ$;



故答案为：135°，135°；

（2）图1中， $\because \angle COD = 90^\circ$ ，



$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ$ ，

$\because OM$ 和 ON 是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的角平分线，

$\therefore \angle MOC + \angle NOD = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD) = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle MON = (\angle MOC + \angle NOD) + \angle COD = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ ；

（3） $\because \angle COD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOM = \frac{3}{4}\angle AOC$ ， $\angle DON = \frac{1}{4}\angle BOD$ ，

$\therefore \angle MOC = \frac{1}{4}\angle AOC$ ，

$\therefore \angle MOC + \angle NOD = \frac{1}{4}\angle AOC + \frac{1}{4}\angle BOD = \frac{1}{4}(\angle AOC + \angle BOD) = 22.5^\circ$ ，

$\therefore \angle MON = (\angle MOC + \angle NOD) + \angle COD = 22.5^\circ + 90^\circ = 112.5^\circ$ ；

故答案为：112.5°。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/356151054110011002>