景山学校 2024 年高考仿真卷数学试题

考生请注意：

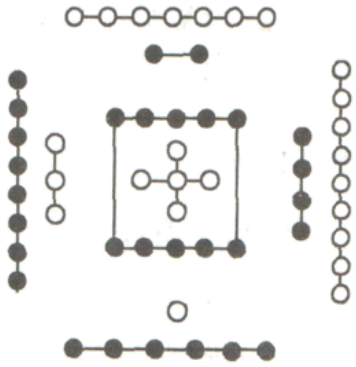
1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中华文化，阴阳术数之源，其中河图的排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中，如图，白圈为阳数，黑点为阴数，若从阴数和阳数中各取一数，则其差的绝对值为 5 的概率为



A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{6}{25}$　　C．$\frac{8}{25}$　　D．$\frac{2}{5}$

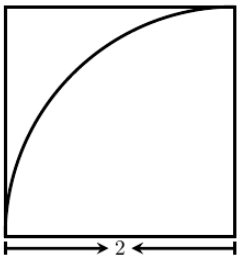
2．正项等比数列$\{a_n\}$中的a_1、a_{4039}是函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-3$的极值点，则$\log_{\sqrt{6}} a_{2020}=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

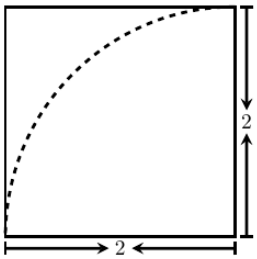
3．已知点 P 在椭圆 τ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，点 P 在第一象限，点 P 关于原点 O 的对称点为 A，点 P 关于 x 轴的对称点为 Q，设$\overrightarrow{PD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，直线 AD 与椭圆 τ 的另一个交点为 B，若 $PA\perp PB$，则椭圆 τ 的离心率 $e=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

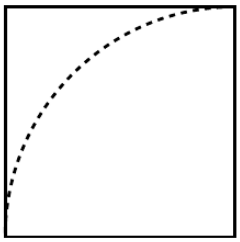
4．一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



正视图



侧视图


俯视图

A． $24+\pi$　　**B．** $24-\pi$

C． $24-2\pi$　　**D．** $24-3\pi$

5．已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的所有三个元素的子集记为 $B_1,B_2,B_3\ldots,B_n,n\in N^*$．记 b_i 为集合 B_i 中的最大元素，则 $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=$（　　）

A． 45　　**B．** 105　　**C．** 150　　**D．** 210

6．函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(0\le x\le\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 的值域为（　　）

A． $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$　　**B．** $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$　　**C．** $\left[0,1\right]$　　**D．** $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

7．若复数 z 满足 $2z-\overline{z}=3+12i$，其中 i 为虚数单位，$\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则复数 $\left|z\right|=$（　　）

A． $3\sqrt{5}$　　**B．** $2\sqrt{5}$　　**C．4**　　**D．5**

8．在 $\triangle ABC$ 中，内角 ***A***，***B***，***C*** 所对的边分别为 ***a***，***b***，***c***，且 $a\cos B+b\sin A=c$.若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2}-1)$，则 $b+c=$（　　）

A．5　　**B．** $2\sqrt{2}$　　**C．4**　　**D．16**

9．已知 m,n 为两条不重合直线，α,β 为两个不重合平面，下列条件中，$\alpha\perp\beta$ 的充分条件是（　　）

A． $m\parallel n,m\subset\alpha,n\subset\beta$　　**B．** $m\parallel n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

C． $m\perp n,m\parallel\alpha,n\parallel\beta$　　**D．** $m\perp n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

10．已知函数 $f\left(x\right)=x+a\cdot2^x$，$g\left(x\right)=\ln x-4a\cdot2^{-x}$，若存在实数 x_0，使 $f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)=5$ 成立，则正数 a

的取值范围为（　　）

A．$(0,1]$　　B．$(0,4]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$(0,\ln 2]$

11．一个盒子里有 4 个分别标有号码为 1，2，3，4 的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取 3 次，则取得小球标号最大值是 4 的取法有（　　）

A．17 种　　B．27 种　　C．37 种　　D．47 种

12．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是平面内三个单位向量，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{a}+2\vec{c}|+|3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|$的最小值（　　）

A．$\sqrt{29}$　　B．$\sqrt{29}-3\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{19}-2\sqrt{3}$　　D．5

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设x、y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geq a\\x-y\leq -1\end{cases}$，且$z=x+ay$的最小值为 7，则$a=$_____.

14．已知$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$是互相垂直的单位向量，若$\sqrt{3}\vec{e_1}-\vec{e_2}$与$\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2}$的夹角为 60°，则实数 λ 的值是__.

15．某市公租房源位于A、B、C三个小区，每位申请人只能申请其中一个小区的房子，申请其中任意一个小区的房子是等可能的，则该市的任意 5 位申请人中，恰好有 2 人申请A小区房源的概率是_____.（用数字作答）

16．已知全集为 R，集合$A=\{x|x^2-x=0\}$，$B=\{-1,0\}$，则$A\cup B=$_____.

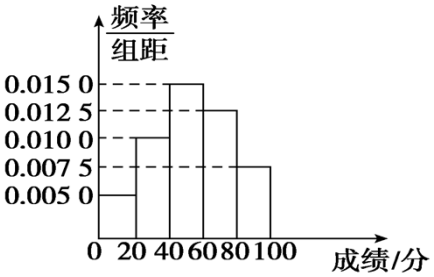
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，点$P(x_0,y_0)$为半圆$x^2+y^2=3(y\geq 0)$上一动点，若过P作椭圆C的两切线分别交x轴于M、N两点.

（1）求证：$PM\perp PN$；

（2）当$x_0\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$时，求$|MN|$的取值范围.

18．（12 分）某中学准备组建“文科”兴趣特长社团，由课外活动小组对高一学生文科、理科进行了问卷调查，问卷共 100 道题，每题 1 分，总分 100 分，该课外活动小组随机抽取了 200 名学生的问卷成绩（单位：分）进行统计，将数据按照$[0,20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100]$分成 5 组，绘制的频率分布直方图如图所示，若将不低于 60 分的称为“文科方向”学生，低于 60 分的称为“理科方向”学生.



	理科方向	文科方向	总计
男			110
女		50	
总计			

（1）根据已知条件完成下面 2×2 列联表，并据此判断是否有 99%的把握认为是否为“文科方向”与性别有关？

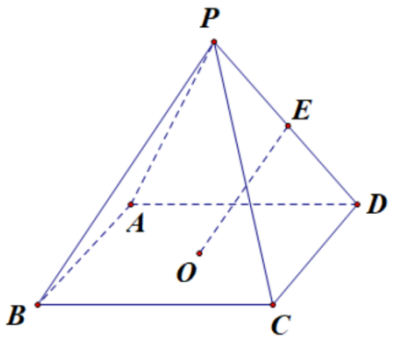
（2）将频率视为概率，现在从该校高一学生中用随机抽样的方法每次抽取 1 人，共抽取 3 次，记被抽取的 3 人中“文科方向”的人数为 ξ，若每次抽取的结果是相互独立的，求 ξ 的分布列、期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考临界值：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

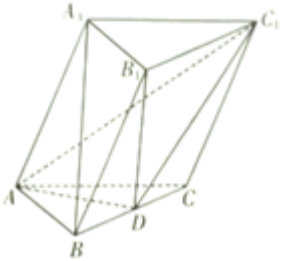
19.（12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，O 为其中心，$\triangle PAD$ 为锐角三角形，且平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，E 为 PD 的中点，$CD\perp DP$.



（1）求证：OE ∥平面 PAB；

（2）求证：$CD\perp PA$.

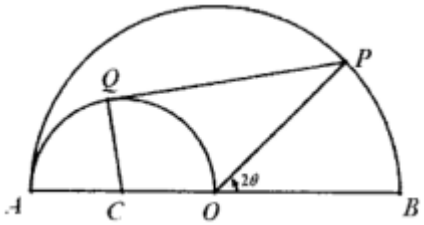
20.（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等，B_1 在底面 ABC 上的投影 D 在棱 BC 上，且 $A_1B\parallel$ 平面 ADC_1



（Ⅰ）证明：平面 $ADC_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1；

（Ⅱ）求直线 AB 与平面 ADC_1 所成角的余弦值.

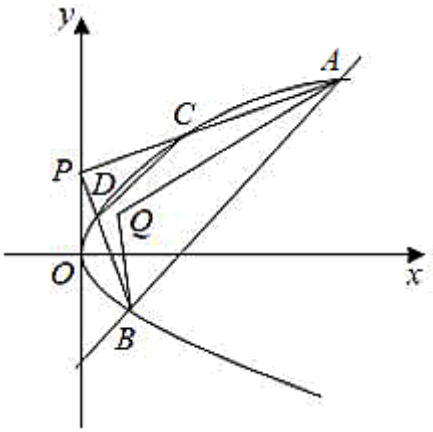
21.（12 分）某广告商租用了一块如图所示的半圆形封闭区域用于产品展示,该封闭区域由以 O 为圆心的半圆及直径 AB 围成. 在此区域内原有一个以 OA 为直径、C 为圆心的半圆形展示区,该广告商欲在此基础上,将其改建成一个凸四边形的展示区 $COPQ$,其中 P、Q 分别在半圆 O 与半圆 C 的圆弧上,且 PQ 与半圆 C 相切于点 Q. 已知 AB 长为 40 米,设 $\angle BOP$ 为 2θ .（上述图形均视作在同一平面内）



（1）记四边形 $COPQ$ 的周长为 $f(\theta)$,求 $f(\theta)$ 的表达式;

（2）要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大,求 $\sin\theta$ 的值.

22.（10 分）已知点 $P(0,1)$，直线 $y=x+t\,(t<0)$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于不同两点 A、B，直线 PA、PB 与抛物线的另一交点分别为两点 C、D，连接 CD，点 P 关于直线 CD 的对称点为点 Q，连接 AQ、BQ .



（1）证明：$AB//CD$；

（2）若 ΔQAB 的面积 $S\geq 1-t$，求 t 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

阳数：$1,3,5,7,9$，阴数：$2,4,6,8,10$，然后分析阴数和阳数差的绝对值为 5 的情况数，最后计算相应概率.

【详解】

因为阳数：$1,3,5,7,9$，阴数：$2,4,6,8,10$，所以从阴数和阳数中各取一数差的绝对值有：$5\times5=25$ 个，满足差的绝对值为 5 的有：$(1,6),(3,8),(5,10),(7,2),(9,4)$ 共 5 个，则 $P=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查实际背景下古典概型的计算，难度一般.古典概型的概率计算公式：$P=\dfrac{\text{目标事件的个数}}{\text{基本本事件的总个数}}$.

2、B

【解析】

根据可导函数在极值点处的导数值为 0，得出 $a_1a_{4039}=6$，再由等比数列的性质可得.

【详解】

解：依题意 a_1、a_{4039} 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x^2+6x-3$ 的极值点，也就是 $f'(x)=x^2-8x+6=0$ 的两个根

$\therefore a_1a_{4039}=6$

又 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，所以 $a_{2020}=\sqrt{a_1\cdot a_{4039}}=\sqrt{6}$

$\therefore \log_{\sqrt{6}}a_{2020}=\log_{\sqrt{6}}\sqrt{6}=1$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等比数列下标和性质以应用，属于中档题.

3、C

【解析】

设$P(x_1,y_1)$，则$A(-x_1,-y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$，$D\left(x_1,-\frac{y_1}{2}\right)$，设$B(x_2,y_2)$，根据$PA\perp PB$化简得到$3a^2=4c^2$，得到答案.

【详解】

设$P(x_1,y_1)$，则$A(-x_1,-y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{PD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，则$D\left(x_1,-\frac{y_1}{2}\right)$，设$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得到：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}$，

$k_{PB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，$k_{AD}=k_{AB}$，即$\frac{y_1}{4x_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4(y_1+y_2)}{x_1+x_2}$，

$PA\perp PB$，故$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，即$-4\frac{b^2}{a^2}=-1$，故$3a^2=4c^2$，故$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力.

4、B

【解析】

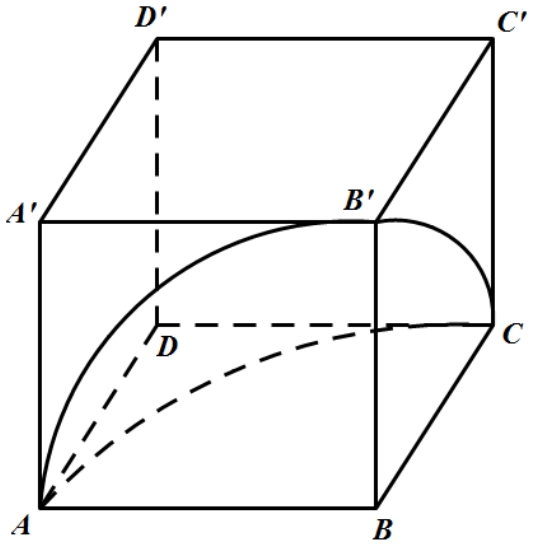
由题意首先确定几何体的空间结构特征，然后结合空间结构特征即可求得其表面积.

【详解】

由三视图可知，该几何体为边长为2正方体$ABCD-A'B'C'D'$挖去一个以B为球心以2为半径球体的$\frac{1}{8}$，

如图，故其表面积为$24-3\pi+\frac{1}{8}\times4\times\pi\times2^2=24-\pi$，

故选：B.



【点睛】

(1)以三视图为载体考查几何体的表面积，关键是能够对给出的三视图进行恰当的分析，从三视图中发现几何体中各元素间的位置关系及数量关系.

(2)多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积应注意重合部分的处理.

(3)圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

5、B

【解析】

分类讨论，分别求出最大元素为3,4,5,6的三个元素子集的个数，即可得解.

【详解】

集合 M 含有3个元素的子集共有 $C_6^3=20$，所以 $k=20$.

在集合 $B_i(i=1,2,3,\ldots,k)$ 中：

最大元素为3的集合有 $C_2^2=1$ 个；

最大元素为4的集合有 $C_3^2=3$；

最大元素为5的集合有 $C_4^2=6$；

最大元素为6的集合有 $C_5^2=10$；

所以 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3\times1+4\times3+5\times6+6\times10=105$.

故选：B.

【点睛】

此题考查集合相关的新定义问题，其本质在于弄清计数原理，分类讨论，分别求解.

6、A

【解析】

由$x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$计算出$2x+\frac{\pi}{3}$的取值范围，利用正弦函数的基本性质可求得函数$y=f\left(x\right)$的值域.

【详解】

$\because x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore -\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$，

因此，函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\left(0\le x\le\frac{5\pi}{12}\right)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

故选：A.

【点睛】

本题考查正弦型函数在区间上的值域的求解，解答的关键就是求出对象角的取值范围，考查计算能力，属于基础题.

7、D

【解析】

根据复数的四则运算法则先求出复数z，再计算它的模长.

【详解】

解：复数$z=a+bi$，a、$b\in\mathbf{R}$；

$\because 2z-\bar{z}=3+12i$，

$\therefore 2(a+bi)-(a-bi)=3+12i$，

即$\begin{cases}2a-a=3\\2b+b=12\end{cases}$，

解得$a=3$，$b=4$，

$\therefore z=3+4i$，

$\therefore|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

故选D.

【点睛】

本题主要考查了复数的计算问题，要求熟练掌握复数的四则运算以及复数长度的计算公式，是基础题.

8、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/356153212212010141