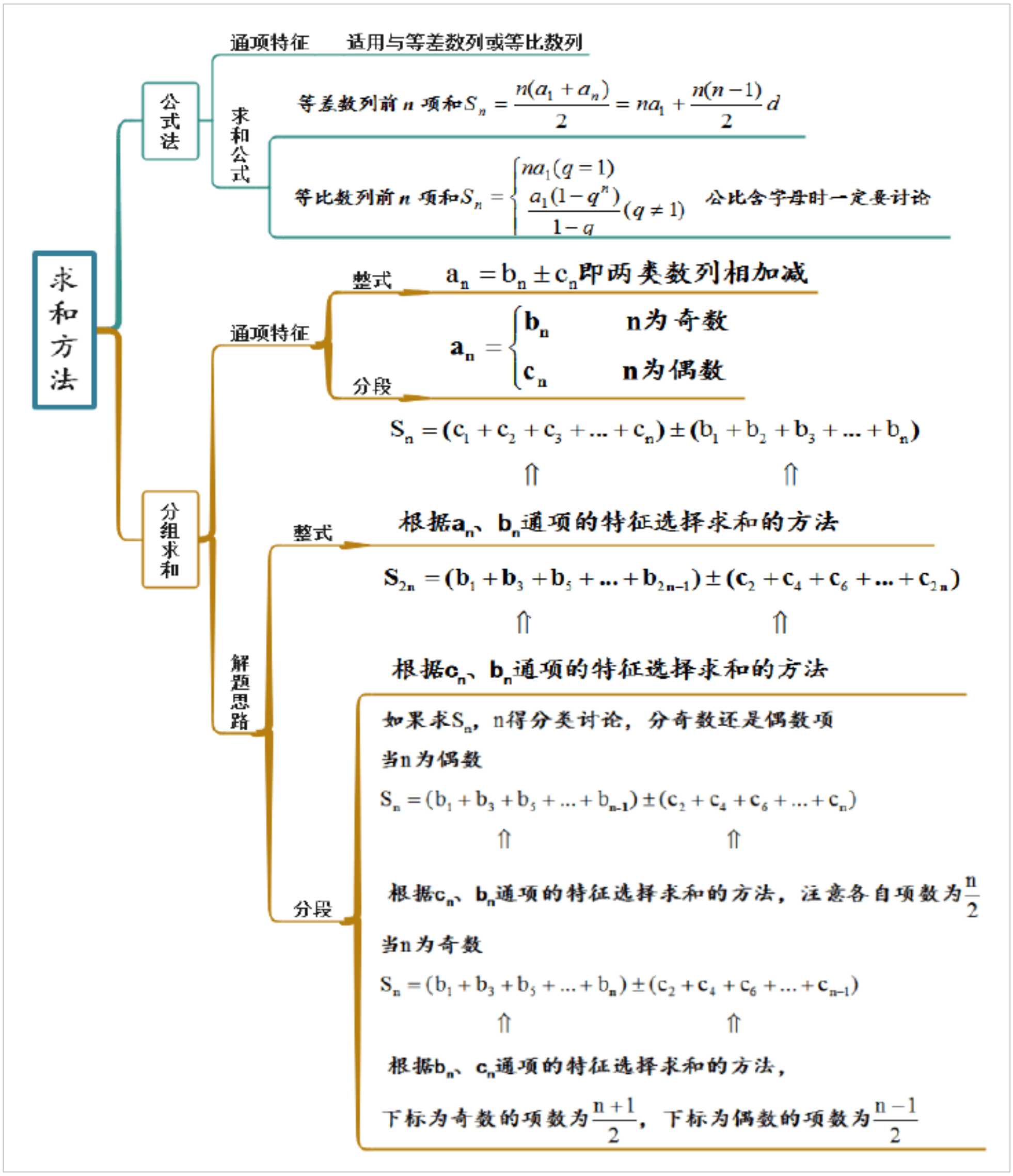
6.4 求和方法（精讲）（提升版）

思维导图



裂项相消

通项特征

分式

分母可拆成偶数个因式因式相乘

裂项后通分过程的总结，除了 (-1)"把分母的"-"变成"+"

$$a=\frac{\text{分子}}{\text{分母大因式}-\text{分母小因式}}=\begin{cases}\text{常数}\Rightarrow\text{可裂项}\\ \text{非常数}\Rightarrow\text{不可裂项}\end{cases}$$

根式

形如 $\frac{a}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{a}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$ 利用平方差进行有理化

解题思路

通项原式=$a(\frac{1}{\text{分母小因式}}-\frac{1}{\text{分母大因式}})$ ⇐通项裂项

前n项和=a[( )+( )+( )+...+( )]=相消后化简

将n=1、2...n分别代入通项原式的括号中

常见模型

一次函数	$a_n=\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$
二次函数	$a_n=\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$
指数函数	$a_n=\frac{kc^n}{(c^{n+1}+b)(c^n+b)}=a(\frac{1}{c^n+b}-\frac{1}{c^{n+1}+b})$
$(-1)^n$	$(-1)^n\frac{pn}{(kn+b)(kn-b)}=a[\frac{(-1)^n}{kn-b}+\frac{(-1)^n}{kn+b}]$

a都是通过上面公式计算得到

错位相减法

通项特征

- 乘法：等差数列×等比数列（即一次函数×指数型函数）
- 除法：$\frac{\text{等差数列}}{\text{等比数列}}$（即$\frac{\text{一次函数}}{\text{指数型函数}}$）

解题思路

$S_n =$ ＿ ＋ ＿ ＋ ＿ ＋…＋ ＿ ①

⇑ ⇑ ⇑ ⇑

n=1 n=2 n=3 n=n

代入通项公式，等差数列当等比数列的系数

$qS_n =$ ＿ ＋ ＿ ＋ ＿ ＋…＋ ＿ ②

在①的基础上左右同时乘q，即在①式中指数加1

①-②得

$(1-q)S_n =$ [①中的第一项]+k(指数函数相加)－[②的最后一项]

=[①中的第一项]+k(等比求和公式)－[②的最后一项]

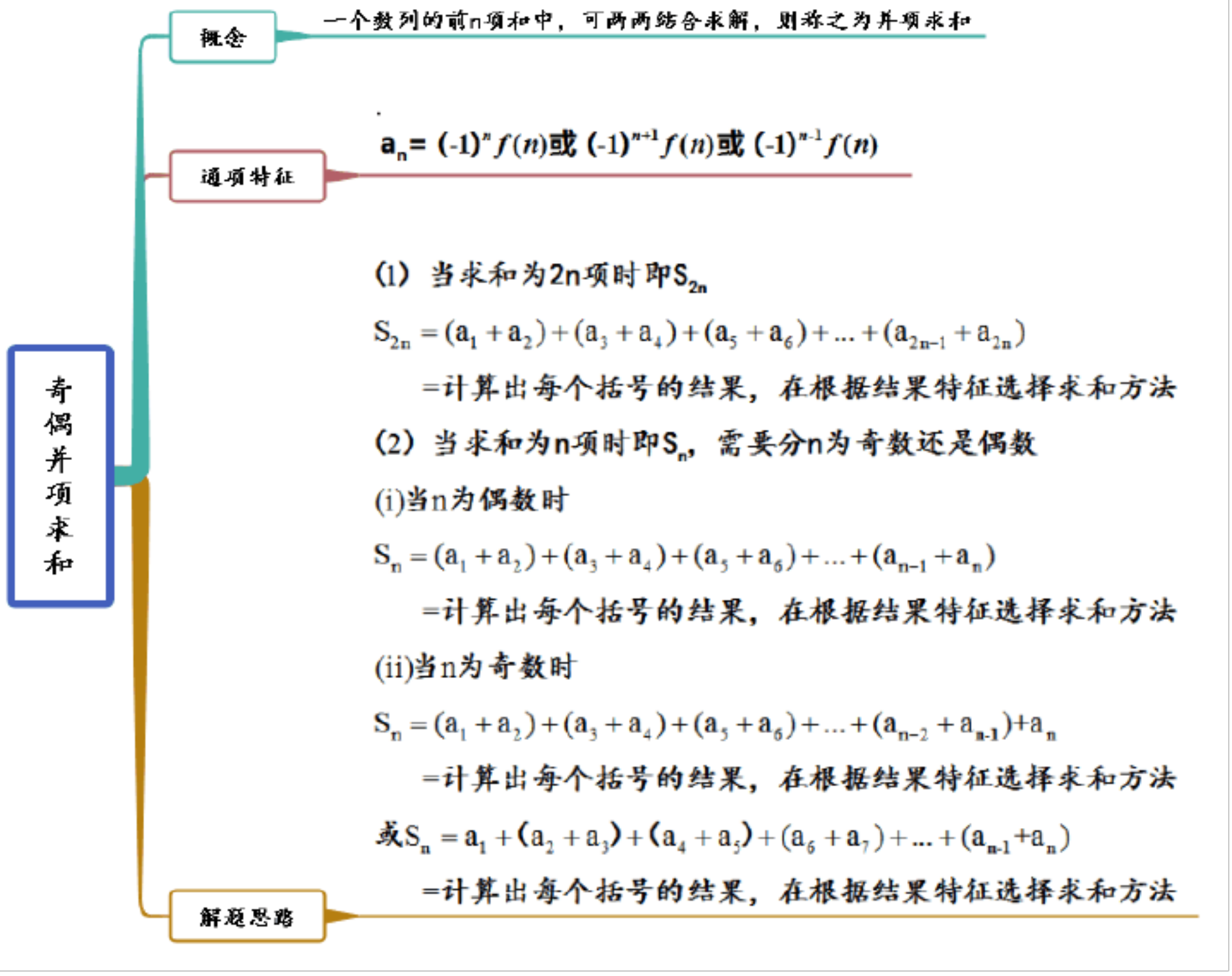
=化简

两边同时除以（1-q）即得S_n

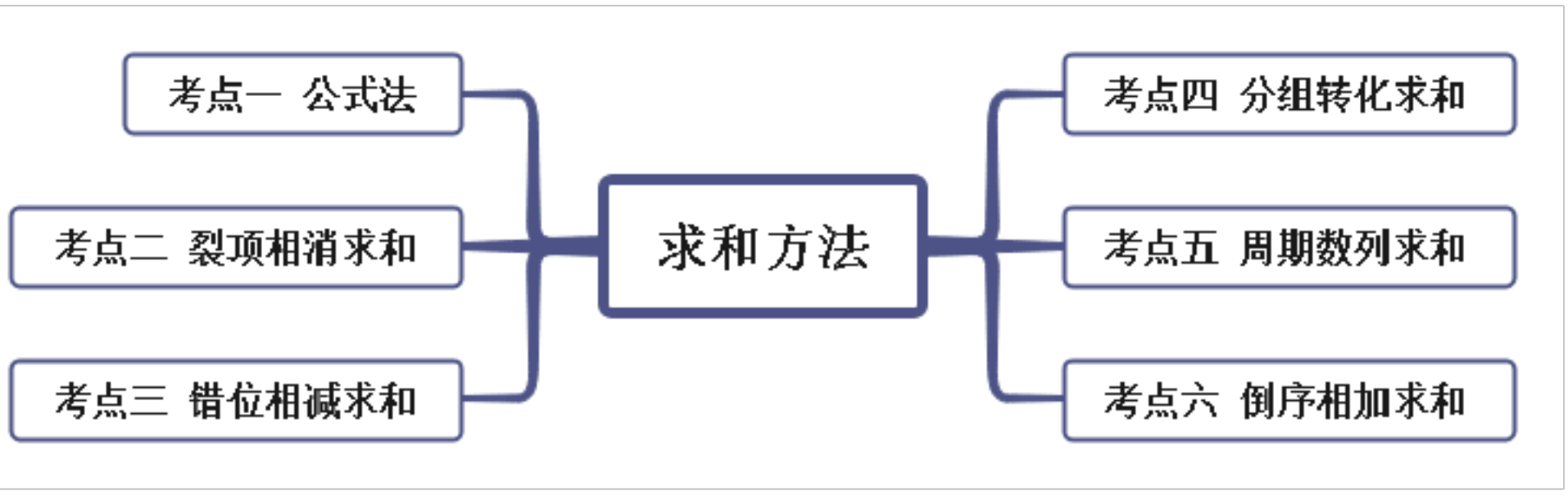
k为指数函数指数相同前面系数差

注意事项

(1)两式相减时最后一项因为没有对应项而忘记变号.
(2)对相减后的和式的结构认识模糊，错把中间的n－1项和当作n项和.
(3)在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，
应分公比q＝1和q≠1两种情况求解.



考点呈现



例题剖析

考点一 公式法求和

【例 1】（2022·江苏江苏·高三期末）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_2=15,a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$.

(1)设$b_n=a_{n+1}-a_n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=10-\log_2|a_n-1|$，求数列$\{|c_n|\}$的前 20 项和T_{20}.

【一隅三反】

1.（2022·全国·模拟预测）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$2S_n-1=3a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求S_n；

(2)证明：当$n\geq 2$时，$2S_n-\frac{3}{a_n}\geq 9$.

2.（2022·湖南·一模）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=3,S_n=1-a_{n+1}$.

(1)证明：数列$\{S_n-1\}$为等比数列；(2)记数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和为$T_n$，证明：$T_n<1$.

3.（2022·广东深圳·一模）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且满足$a_{n+1}-a_n=4\times 3^n$.

(1)证明：$\{a_n-3^n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n.

考点二 裂项相消求和

【例 2-1】(2022·辽宁·鞍山一中模拟预测)已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_n>0$，$S_3=15$，公差$d>1$，且_____.从①a_2-1为a_1-1与a_3-1等比中项，①等比数列$\{b_n\}$的公比为$q=3$，$b_1=a_1,b_2=a_4$这两个条件中，选择一个补充在上面问题的横线上，使得符合条件的数列$\{a_n\}$存在并作答.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前 n 项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{6}$.

【例 2-2】（2022·广东肇庆·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且$8a_3=a_6$，$a_2-a_5=36$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n$，并证明：$T_n<\frac{1}{3}$.

【例 2-3】（2022·广东梅州·二模）已知S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=1$，_____.

①$n\in N^*$，$a_n=a_{n+1}-4n$；①数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，且$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前3项和为6.从以上两个条件中任选一个补充在横线处，并求解：

(1)求a_n；(2)设$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+1}^2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n$.

【例2-4】（2022·广东茂名·二模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_2=8$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$.

(1)证明：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

(2)若$b_n=\frac{1+2n^2+6n+5}{\log_3^2(1+a_{n+1})\log_3^2(1+a_{n+2})}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n$.

【一隅三反】

1.（2022·广东梅州·二模）已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，_____.

①$n\in N^*$，$a_n=a_{n+1}-4n$；①数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，且$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前3项和为6.从以上两个条件中任选一个补充在横线处，并求解：

(1)求a_n；(2)设$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+1}^2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n$.

2.（2022·全国·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$$n\in N^*$满足$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n+\frac{1}{n}$，$a_1=1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{4n+1+3^{n+1}}{2n+1\cdot a_n}$，求$\{b_n\}$的前n项和$T_n$.

3.（2022·全国·模拟预测）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，给出以下三个条件：①$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ $n\in N^*$；①$S_n^2=(n^2+1)S_n+n^2+0$ $n\in N^*$；①$a_1=1$，$a_n^2=2a_n+4S_n+1$ $n\in N^*$.从这三个条件中任选一个解答下面的问题.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{4S_n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分

4.（2022·江苏南通·模拟预测）已知正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n是其前n项和，且满足$S_{n+1}=\sqrt{S_n}+S_1^2$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式：

(2)已知数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，设数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$的最小值.

考点三 错位相减求和

【例3】（2022·广东茂名·二模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2, S_{n+1}=a_{n+1}+2S_n-1=0\ (n\in N^*)$.

(1)求证：数列$\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$为等差数列；

(2)求数列$\left\{\frac{2n}{S_n-1}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

【一隅三反】

1.（2022·广东广东·一模）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-a_1\ (n\in N^*)$，且$a_1=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n\log_2 a_n$，求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

2.（2021·浙江·高考真题）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-\frac{9}{4}$，且$4S_{n+1}=3S_n-9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n+4)a_n=0\ (n\in N^*)$，记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$T_n\le\lambda b_n$对任意$n\in N^*$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

3.（2021·全国·高考真题（理））记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

考点四 分组转化求和

【例4-1】（2022·全国·模拟预测（理））已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$\frac{3}{2S_n}=\frac{1}{a_n+2}+\frac{1}{a_n+4}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{(-1)^n S_n+3n\right\}$的前$n$项和$T_n$.

【例4-2】（2022·山东日照·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=ka_n$（$k>1$），$n\in N$，$a_2=a_3$，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列.

(1)求 k 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\begin{cases}a_n^2, & n\text{为奇数}\\ \log_2 a_n, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【一隅三反】

1.（2022·安徽·高三期末（理））已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n^2+3n}{2}$，$n\in N^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=3^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 2n 项和.

2.（2022·全国·模拟预测（理））已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2na_{n+1}=(n+1)a_n$（$n\in N^*$），且 $a_1=1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\frac{a_n}{n}+(-1)^n n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 2n 项的和 S_{2n}

3.（2022·湖南·高三阶段练习）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n a_{n+1}=2^n$，令 $b_n=a_{2n}$.

(1)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $c_n=\begin{cases}\sqrt{\frac{b_n}{2}}, & n\text{为奇数}\\ \frac{2}{\sqrt{\log_2 b_n}\cdot\sqrt{\log_2 b_{n+2}}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 14 项和.

考点五 周期数列

【例 5】（2022·江西赣州·一模）设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $2S_n=a_n^2+a_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 $b_n=a_n^2\cos\frac{2a_n\pi}{3}$，$T_n$ 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 T_{3n}.

【一隅三反】

1.（2022·江苏·高三专题练习）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}$，$n\in N^*$，其前 n 项和为 S_n，则 $S_{2020}=$_____.

2.（2022·全国·高三专题练习（理））数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+n^2\sin\frac{n\pi}{2}$，前 n 项和为 S_n，则 $S_{100}=$_____.

考点六 倒序相加法

【例 6】（2022 •全国 •高三专题练习）已知函数 f x x 3sin x 1 1 ，数列 a n 满足 a n n 2019 ，则 f a 1 f a 2 ... f a 2018 （　　）

A．2018　　B．2019　　C．4036　　D．4038

【一隅三反】

1．（2022 •全国 •高三专题练习）已知函数 f(x) x 1 3 1 2 ，则 f 1 2021 f 2 2021 f 2019 2021 f 2020 2021 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．2020　　D．2021

2．（2022 •全国 •高三专题练习）已知 F(x) f x 1 2 1 是 R 上的奇函数，

a n f(0) f 1 n f 2 n ... f n 1 n f(1) n N* ，则数列 a n 的通项公式为（　　）

A．a n n　　B．a n 2n　　C．a n n 1　　D．a n n2 2n 3

3．（2022 •全国 •高三专题练习）已知函数 f x x 3sin x 1 2 1 2 ，则 f 1 2019 f 2 2019 f 2018 2019 （　　）

A．2018　　B．2019

C．4036　　D．4038

（提升版）

求和方法

公式法

通项特征　　适用与等差数列或等比数列

求和公式

等差数列前 n 项和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

等比数列前 n 项和 $S_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)\end{cases}$　　公比含字母时一定要讨论

分组求和

通项特征

整式　$a_n=b_n\pm c_n$ 即两类数列相加减

分段　$a_n=\begin{cases}b_n & n\text{为奇数}\\ c_n & n\text{为偶数}\end{cases}$

$S_n=(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n)\pm(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$

⇑　　⇑

根据a_n、b_n通项的特征选择求和的方法

解题思路

整式

$S_{2n}=(b_1+b_3+b_5+\ldots+b_{2n-1})\pm(c_2+c_4+c_6+\ldots+c_{2n})$

⇑　　⇑

根据c_n、b_n通项的特征选择求和的方法

分段

如果求S_n，n得分类讨论，分奇数还是偶数项

当n为偶数

$S_n=(b_1+b_3+b_5+\ldots+b_{n-1})\pm(c_2+c_4+c_6+\ldots+c_n)$

⇑　　⇑

根据c_n、b_n通项的特征选择求和的方法，注意各自项数为$\frac{n}{2}$

当n为奇数

$S_n=(b_1+b_3+b_5+\ldots+b_n)\pm(c_2+c_4+c_6+\ldots+c_{n-1})$

⇑　　⇑

根据b_n、c_n通项的特征选择求和的方法，

下标为奇数的项数为$\frac{n+1}{2}$，下标为偶数的项数为$\frac{n-1}{2}$

裂项相消

通项特征

分式

分母可拆成偶数个因式因式相乘

裂项后通分过程的总结，除了 (-1)"把分母的"-"变成"+"

$$a=\frac{\text{分子}}{\text{分母大因式}-\text{分母小因式}}=\begin{cases}\text{常数}\Rightarrow\text{可裂项}\\ \text{非常数}\Rightarrow\text{不可裂项}\end{cases}$$

根式

形如 $\frac{a}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{a}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$ 利用平方差进行有理化

解题思路

通项原式=$a(\frac{1}{\text{分母小因式}}-\frac{1}{\text{分母大因式}})$ ⇐通项裂项

前n项和=a[( )+( )+( )+...+( )]=相消后化简

将n=1、2...n分别代入通项原式的括号中

常见模型

一次函数	$a_n=\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$
二次函数	$a_n=\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$
指数函数	$a_n=\frac{kc^n}{(c^{n+1}+b)(c^n+b)}=a(\frac{1}{c^n+b}-\frac{1}{c^{n+1}+b})$
$(-1)^n$	$(-1)^n\frac{pn}{(kn+b)(kn-b)}=a[\frac{(-1)^n}{kn-b}+\frac{(-1)^n}{kn+b}]$

a都是通过上面公式计算得到

错位相减法

通项特征

- 乘法：等差数列×等比数列（即一次函数×指数型函数）
- 除法：$\frac{\text{等差数列}}{\text{等比数列}}$（即$\frac{\text{一次函数}}{\text{指数型函数}}$）

解题思路

$S_n =$ ＿ ＋ ＿ ＋ ＿ ＋…＋ ＿ ①

⇑ ⇑ ⇑ ⇑

n=1 n=2 n=3 n=n

代入通项公式，等差数列当等比数列的系数

$qS_n =$ ＿ ＋ ＿ ＋ ＿ ＋…＋ ＿ ②

在①的基础上左右同时乘q，即在①式中指数加1

①-②得

$(1-q)S_n =$ [①中的第一项]+k(指数函数相加)－[②的最后一项]

=[①中的第一项]+k(等比求和公式)－[②的最后一项]

=化简

两边同时除以（1-q）即得S_n

k为指数函数指数相同前面系数差

注意事项

(1)两式相减时最后一项因为没有对应项而忘记变号.
(2)对相减后的和式的结构认识模糊，错把中间的n－1项和当作n项和.
(3)在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，
应分公比q＝1和q≠1两种情况求解.

奇偶并项求和

概念

一个数列的前n项和中，可两两结合求解，则称之为并项求和

通项特征

$a_n=(-1)^n f(n)$或$(-1)^{n+1} f(n)$或$(-1)^{n-1} f(n)$

解题思路

(1) 当求和为2n项时即S_{2n}

$S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

=计算出每个括号的结果，在根据结果特征选择求和方法

(2) 当求和为n项时即S_n，需要分n为奇数还是偶数

(i)当n为偶数时

$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)$

=计算出每个括号的结果，在根据结果特征选择求和方法

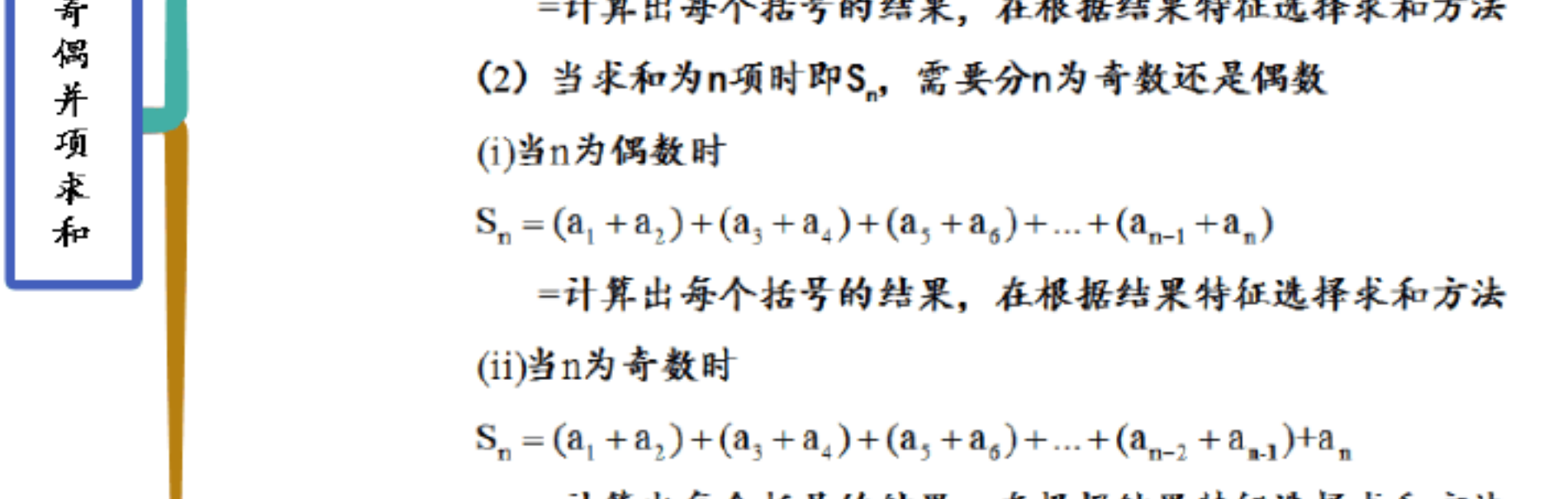
(ii)当n为奇数时

$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\ldots+(a_{n-2}+a_{n-1})+a_n$

=计算出每个括号的结果，在根据结果特征选择求和方法

或$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)$

=计算出每个括号的结果，在根据结果特征选择求和方法



例题剖析

公式法求和

1】（　　江苏江苏·高三期末）已知数列 a_n 满足 $a_1=3, a_2=15, a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$．(1)设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=10\log_2\left(\frac{a_n}{3}+1\right)$，求数列 $\{|c_n|\}$ 的前 20 项和 T_{20}．

【答案】(1)$b_n=3\times4^n$ (2)$T_{20}=260$

【解析】(1)由 $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$ 可知，$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$，即 $b_{n+1}=4b_n$，

由 $a_1=3, a_2=15$ 可知，$b_1=a_2-a_1=12$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 12 为首项，4 为公比的等比数列，

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=12\times4^{n-1}=3\times4^n$．

(2)由（1）知，$a_{n+1}-a_n=3\times4^n$，

所以 $a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1=3\times4^{n-1}+3\times4^{n-2}+\cdots+4+1=\frac{3\times(1-4^n)}{1-4}+4^n=4^n+1, n\geq2$，

又 $a_1=3$ 符合上式，所以 $a_n=4^n+1$，所以 $C_n=10\log_2 4^n=10\times2n$，

所以 $\{|C_n|\}$ 的前 20 项和 $T_{20}=8+6+4+2+0+2+4+\cdots+30=260$．

【一隅三反】

1．（2022·全国·模拟预测）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=1+3a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1)求 S_n；

(2)证明：当 $n\geq2$ 时，$2S_n<\frac{3}{a_n}+9$．

【答案】(1)$S_n=\frac{3^n+1}{2}$ (2)见解析

【解析】(1)当 $n=1$ 时，$2S_1=1+2a_1=1+3a_1$，解得 $a_1=S_1=1$，

当 $n\geq2$ 时，$2S_n=1+3a_n=3(S_n-S_{n-1})$，$S_n=3S_{n-1}+1$，

即 $S_n+\frac{1}{2}=3\left(S_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$，$S_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq0$，

$\left\{S_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，3 为公比的等比数列，

则 $S_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，即 $S_n=\frac{3^n+1}{2}$，

$S_n=\frac{1}{2}$，得$a_n=\frac{2S_n-1}{3^n}$，则$2S_n=\frac{3}{a_n}\cdot 3^n-1=\frac{9}{3^n}$，令$t=3^n,n\geq 2$，则$t\geq 9$，

令$f(t)=t-1-\frac{9}{t}$，则$f'(t)=1+\frac{9}{t^2}$，当$t\geq 9$时，$f'(t)>0$，

$\therefore f(t)$在$[9,+\infty)$上单调递增，$f(t)\geq f(9)=9$，即$3^n-1-\frac{9}{3^n}\geq 9$，

当且仅当$n=2$时，取等，得证.

2.（2022·湖南·一模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3,S_n=1+a_{n+1}$.

(1)证明：数列$\{S_n-1\}$为等比数列；

(2)记数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<1$.

【答案】(1)证明见解析；(2)证明见解析.

【解析】

(1)$\because S_{n+1}=a_{n+1}+1=S_{n+1}-S_n+1$，$\therefore 2S_n=S_{n+1}+1$，$\therefore S_{n+1}=2S_n-1$，$\because S_1=3>0$，①$S_n>0$，$\frac{S_{n+1}-1}{S_n-1}=2$，

故数列$\{S_n-1\}$为等比数列，首项为$S_1-1=2$，公比为2；

(2)由(1)可知$S_n-1=2^n$，①$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}$，$\therefore T_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1$.

3.（2022·广东深圳·一模）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且满足$a_{n+1}-a_n=4\cdot 3^n$.

(1)证明：$\{a_n-3^n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

【答案】(1)证明见解析(2)$S_n=\frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2}-2$

【解析】(1)由$a_{n+1}-a_n=4\cdot 3^n$，得$a_{n+1}-3^{n+1}=-\left(a_n-3^n\right)$，又$a_1=2$，故$a_1-3=-1$，

故$a_{n+1}-3^{n+1}=-\left(a_n-3^n\right)\neq 0$，所以$\frac{a_{n+1}-3^{n+1}}{a_n-3^n}=-1$，所以数列$\{a_n-3^n\}$是以$-1$为首项，$-1$为公比的等比数列.

(2)由（1）可知$a_n-3^n=(-1)^n$，所以$a_n=3^n+(-1)^n$，

所以$S_n=\frac{3\left(1-3^n\right)}{1-3}+\frac{(-1)\left[1-(-1)^n\right]}{1-(-1)}=\frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2}-2$.

考点二 裂项相消求和【例 2-1】(2022·辽宁·鞍山一中模拟预测)已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_n\neq 0$，$S_3=15$，公差$d\neq 1$，且_____.从①a_2-1为a_1-1与a_3-1等比中项，①等比数列$\{b_n\}$的公比为$q=3$，$b_1=a_1$,$b_2=a_4$这两个条件中，选择一个补充在上面问题的横线上，使得符合条件的数列$\{a_n\}$存在并作答.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前n项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{6}$.

【答案】(1)选择条件见解析，$a_n=2n-1$ (2)证明见解析

【解析】(1)若选①，a_2-1为a_1-1与a_3-1的等比中项，

则$(a_1-1)(a_3-1)=(a_2-1)^2$，由$\{a_n\}$为等差数列，$S_3=15$，得$3a_2=15$，①$a_2=5$，

把$a_2=5$代入上式，可得$(4-d)(6+d)=16$，解得$d=2$或$d=-4$（舍）

①$a_1=3$，$a_n=2n-1$；

若选①，$q=3$为等比数列$\{b_n\}$的公比，且$b_1=a_1$,$b_2=a_4$，

可得$b_2=3b_1$，即$a_4=3a_1$，即有$(a_1+3d)=3a_1$，即$2a_1=3d$；

又$S_3=15$，可得$3a_1+\frac{1}{2}\times 3\times 2d=15$，即$a_1+d=5$，解得$d=2$,$a_1=3$，此时$a_n=2n-1$；

(2)①$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

①$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$；①$T_n<\frac{1}{6}$，得证

【例 2-2】（2022·广东肇庆·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且$8a_3=a_6$，$a_2+a_5=36$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n$，并证明：$T_n<\frac{1}{3}$.

【答案】(1)$a_n=2^n$ (2)$\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，证明见解析.

【解析】(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比是q，首项是a_1.

由$8a_3=a_6$，可得$q=2$.由$a_2+a_5=36$，可得$a_1q(1+q^3)=36$，所以$a_1=2$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/356153221225010032