

四川省成都市东辰国际学校 2023-2024 学年高三第四次模拟考试数学试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - y + 3 \leq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ 则 $x + y + 1$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_8 = 16$ ， $a_6 = 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

3. 甲乙丙丁四人中，甲说：我年纪最大，乙说：我年纪最大，丙说：乙年纪最大，丁说：我不是年纪最大的，若这四人中只有一个人说的是真话，则年纪最大的是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$ ，当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = x - \frac{2}{x}$ ，则 $\{x | f(x+2) > 1\} =$ ()

- A. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 0\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$ D. $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$

5. 下列四个结论中正确的个数是

(1) 对于命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \exists x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ；

(2) 已知 $X: N(2, \sigma^2)$ ，则 $P(X > 2) = 0.5$

(3) 已知回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，则回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ ；

(4) “ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”的充分不必要条件.

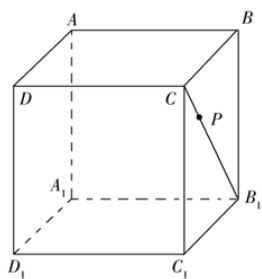
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知 a, b 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，且 $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$ ，则“ $a \parallel b$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在线段 CB_1 上，且 $B_1P = 2PC$ ，平面 α 经过点 A, P, C_1

，则正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为（ ）



- A. $3\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$ ，公差 $d \neq 0$ ，且 a_1, a_2, a_5 成等比数列，则 $d=$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 设 i 是虚数单位，则 $(2+3i)(3-2i)=$ （ ）

- A. $12+5i$ B. $6-6i$ C. $5i$ D. 13

10. 正 $\triangle ABC$ 的边长为 2，将它沿 BC 边上的高 AD 翻折，使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$ ，此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为（ ）

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{13\pi}{3}$ D. 7π

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 -2，前 n 项和为 S_n ，若 a_2, a_3, a_4 为某三角形的三边长，且该三角形有一个内角为 120° ，则 S_n 的最大值为（ ）

- A. 5 B. 11 C. 20 D. 25

12. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F ，准线为 l ， P 是 l 上一点，直线 PF 与抛物线交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{AF}$ ，则 $|AB|$ 为（ ）

- A. $\frac{40}{9}$ B. 40 C. 16 D. $\frac{16}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$ ，其中 $b \in R$ ，若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}$ ，且 $a_2 + a_4 = \frac{5}{4}$ ，则 $\frac{S_6}{a_6} =$ _____.

15. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ 4x - y \geq -6 \end{cases}$, 则 $z = x - 2y$ 的最小值为_____.

16. $\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项的系数为_____ (用数字作答).

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知动圆过定点 $F(0,1)$, 且与直线 $l: y = -1$ 相切, 动圆圆心的轨迹为 C , 过 F 作斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线 m 与 C 交于两点 A, B , 过 A, B 分别作 C 的切线, 两切线的交点为 P , 直线 PF 与 C 交于两点 M, N .

(1) 证明: 点 P 始终在直线 l 上且 $PF \perp AB$;

(2) 求四边形 $AMBN$ 的面积的最小值.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A 为椭圆上一动点 (异于左右顶点), $\triangle AF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 C 相交于点 A, B 两点, 问 y 轴上是否存在点 M , 使得 $\triangle ABM$ 是以 M 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, a_n 是 -1 与 a_{n+1} 的等差中项.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n + 2n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M 在椭圆 C 上且

$MF_2 \perp x$ 轴, 直线 MF_1 交 y 轴于 H 点, $OH = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且满足 $|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}|$, 求 $\triangle ABO$ 的面积.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的边长分别为 a, b, c , 且 $c = 2$.

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $b = 3$, 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 3 \sin C$, 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{25}{2} \sin C$, 求 a 和 b 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 5x + 2 \ln x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极值;
- (2) 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 证明: $x_1 + x_2 > 1$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

画出可行域和目标函数，根据目标函数的几何意义平移得到答案.

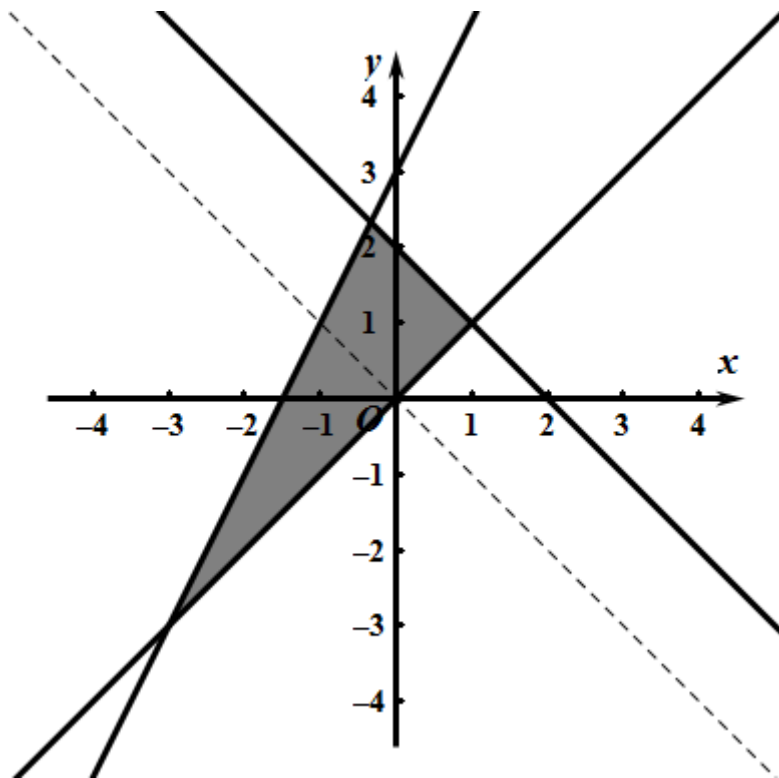
【详解】

如图所示：画出可行域和目标函数，

$z = x + y + 1$ ，即 $z = -x + y - 1$ ， z 表示直线在 y 轴的截距加上 1，

根据图像知，当 $x + y = 2$ 时，且 $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$ 时， $z = x + y + 1$ 有最大值为 3.

故选：C.



【点睛】

本题考查了线性规划问题，画出图像是解题的关键.

2、D

【解析】

根据等差数列公式直接计算得到答案.

【详解】

依题意， $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(a_3 + a_6)}{2} = 16$ ，故 $a_3 + a_6 = 4$ ，故 $a_3 = 3$ ，故 $d = \frac{a_6 - a_3}{3} = -\frac{2}{3}$ ，故选：D.

【点睛】

本题考查了等差数列的计算，意在考查学生的计算能力.

3、C

【解析】

分别假设甲乙丙丁说的是真话，结合其他人的说法，看是否只有一个说的是真话，即可求得年纪最大者，即可求得答案.

【详解】

①假设甲说的是真话，则年纪最大的是甲，那么乙说谎，丙也说谎，而丁说的是真话，而已知只有一个人说的是真话，故甲说的不是真话，年纪最大的不是甲；

②假设乙说的是真话，则年纪最大的是乙，那么甲说谎，丙说真话，丁也说真话，而己知只有一个人说的是真话，故乙说谎，年纪最大的也不是乙；

③假设丙说的是真话，则年纪最大的是乙，所以乙说真话，甲说谎，丁说的是真话，而己知只有一个人说的是真话，故丙在说谎，年纪最大的也不是乙；

④假设丁说的是真话，则年纪最大的不是丁，而己知只有一个人说的是真话，那么甲也说谎，说明甲也不是年纪最大的，同时乙也说谎，说明乙也不是年纪最大的，年纪最大的只有一人，所以只有丙才是年纪最大的，故假设成立，年纪最大的是丙。

综上所述，年纪最大的是丙

故选：C.

【点睛】

本题考查合情推理，解题时可从一种情形出发，推理出矛盾的结论，说明这种情形不会发生，考查了分析能力和推理能力，属于中档题.

4、C

【解析】

简单判断可知函数关于 $x=1$ 对称，然后根据函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}$ 的单调性，并计算 $\begin{cases} x-\frac{2}{x}=1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，结合对称性，可得结果.

【详解】

由 $f(1-x)=f(1+x)$,

可知函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称

当 $x \geq 1$ 时, $f(x)=x-\frac{2}{x}$,

可知 $f(x)=x-\frac{2}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增

则 $\begin{cases} x-\frac{2}{x}=1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2$

又函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，所以 $f(0)=1$

且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，

所以 $x+2 < 0$ 或 $x+2 > 2$ ，故 $x < -2$ 或 $x > 0$

$$\text{所以}\{x|f(x+2)>1\}=\{x|x<-2\text{ 或 }x>0\}$$

故选：C

【点睛】

本题考查函数的对称性以及单调性求解不等式，抽象函数给出式子的意义，比如： $f(1-x)=f(1+x)$ ，

$f(1-x)+f(1+x)=0$ ，考验分析能力，属中档题.

5、C

【解析】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，即可判定是正确的；(2)中，根据正态分布曲线的性质，即可判定是正确的；(3)中，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，即可判定是正确；(4)中，基本不等式和充要条件的判定方法，即可判定.

【详解】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，可知命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \forall x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ，是错误的；

(2)中，已知 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，正态分布曲线的性质，可知其对称轴的方程为 $x = 2$ ，所以 $P(X > 2) = 0.5$ 是正确的

(3)中，回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，可得回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ 是正确；

(4)中，当 $x \geq 1$ 时，可得 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ 成立，当 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 时，只需满足 $x > 0$ ，所以“ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”成立的充分不必要条件.

【点睛】

本题主要考查了命题的真假判定及应用，其中解答中熟记含有量词的否定、正态分布曲线的性质、回归直线方程的性质，以及基本不等式的应用等知识点的应用，逐项判定是解答的关键，着重考查了分析问题和解答问题的能力，属于基础题.

6、D

【解析】

根据面面平行的判定及性质求解即可.

【详解】

解： $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$,

由 $a \parallel b$ ，不一定有 $a \parallel \beta$ ， α 与 β 可能相交；

反之，由 $a \parallel \beta$ ，可得 $a \parallel b$ 或 a 与 b 异面，

$\therefore a, b$ 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$,

则“ $a \parallel b$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的既不充分也不必要条件.

故选: D .

【点睛】

本题主要考查充分条件与必要条件的判断, 考查面面平行的判定与性质, 属于基础题.

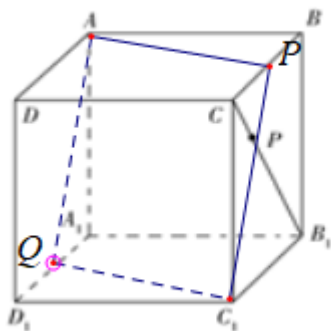
7、B

【解析】

先根据平面的基本性质确定平面, 然后利用面面平行的性质定理, 得到截面的形状再求解.

【详解】

如图所示:



A, P, C_1 确定一个平面 α ,

因为平面 $AA_1DD_1 \parallel$ 平面 BB_1CC_1 ,

所以 $AQ \parallel PC_1$, 同理 $AP \parallel QC_1$,

所以四边形 APC_1Q 是平行四边形.

即正方体被平面截的截面.

因为 $B_1P = 2PC$,

所以 $C_1B_1 = 2PC$,

即 $PC = PB = 1$

所以 $AP = PC_1 = \sqrt{5}, AC_1 = 2\sqrt{3}$

由余弦定理得: $\cos \angle APC_1 = \frac{AP^2 + PC_1^2 - AC_1^2}{2AP \times PC_1} = \frac{1}{5}$

$$\text{所以 } \sin \angle APC_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形 } APQC_1} = 2 \times \frac{1}{2} AP \times PC_1 \times \sin \angle APC_1 = 2\sqrt{6}$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查平面的基本性质，面面平行的性质定理及截面面积的求法，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

8、D

【解析】

先用公差 d 表示出 a_2, a_5 ，结合等比数列求出 d .

【详解】

$a_2 = 2 + d, a_5 = 2 + 4d$,因为 a_1, a_2, a_5 成等比数列，所以 $(2 + d)^2 = 2(2 + 4d)$ ，解得 $d = 4$.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式.属于简单题，化归基本量，寻求等量关系是求解的关键.

9、A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2 + 3i)(3 - 2i) = 6 + 5i - 6i^2 = 12 + 5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

10、D

【解析】

如图所示，设 AD 的中点为 O_2 ， $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O ，连接

OO_1, OO_2, OD ，利用正弦定理可得 $DO_1 = 1$ ，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，

最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/356231023221011042>