非线性代数方程组的数值解法

非线性问题可分为三类：材料非线性 、几何非线性和边界非线性。我们只讨论前两类问题。

不管那类非线性问题，最终都归结为一组非线性方程$\Psi(a)=0$，a为待求的未知量。

对许多问题，用某些方法可将$\Psi(a)=0$改造成

$$\Psi(a)=P(a)-R=K(a)\,a-R=0$$

的形式。

对非线性问题的方程$\Psi(a)=0$，一般只能用数值方法求近似解答。其实质是，用一系列线性方程组的解去逼近所讨论非线性方程组的解。本章将简单介绍有限元分析中常见的各种求解非线性方程组的数值方法。

1.1 直接迭代法

当用某些方法将$\Psi(a)=0$改造成迭代格式

$$\Psi(a)=P(a)-R=K(a)\,a-R=0$$

后，设一初始未知量a^0，则由它可得

$$a^1=K(a^0)^{-1}R$$

如果问题是收敛的，a^1将比a^0有所改善。如此反复迭代可得

$$a^{n+1}=K(a^n)^{-1}R \qquad \Delta a^n=a^{n+1}-a^n$$

当设范数为 $\|\Delta a^n\| = \max \Delta a_i$

或设范数为 $\|\Delta a^n\| = [(\Delta a^n)^{\mathrm{T}} \Delta a^n]^{1/2}$

收敛条件则为 $\|\Delta a^n\| \le \alpha \|a^n\| \quad 0<\alpha<1$

1.1 直接迭代法

如果考虑到每步迭代

$$\Psi(a^n) = P(a^n) - R = K(a^n)\, a^n - R \neq 0$$

将$\Psi(a^n)$视为不平衡力（或失衡力）并作为衡量收敛的标准，则收敛条件也可改为

$$\|\Psi(a^n)\| \leq \beta \|R\| \quad 0 < \beta < 1$$

应指出的是，对单变量情况，如讲义图示，直接迭代实质是“割线”法，一定条件下这种迭代过程是收敛的，但对多自由度情况，由于未知量通过矩阵$K(a^n)$的元素互相耦合，在迭代过程中往往出现不稳定现象。

1.2 牛顿法和修正牛顿法

如果将非线性方程$\Psi(a)=0$在a^n附近展开，则

$$\Psi(a)=\Psi(a^n)+[\Psi'(a)]_n\Delta a^n+\cdots=0$$

或用求和约定可写为

$$\Psi_i(a_j)=\Psi_i(a_j^n)+\Psi_{i,j}(a^n)\Delta a_j+\cdots=0\quad(i,j=1,2,\cdots)$$

又如果$[\Psi'(a)]_n$的逆存在，则Δa^n近似等于

切线矩阵

$$\Delta a^n\approx-[\Psi'(a)]_n^{-1}\Psi(a^n)$$

不平衡力

记 $K_T(a^n)=[\Psi'(a)]_n$，$P_n=\Psi(a^n)$

则 $\Delta a^n\approx-K_T(a^n)^{-1}P_n$， $a^{n+1}=a^n+\Delta a^n$

如此逐步计算，即可得到非线性方程的解答，这就是牛顿-拉夫森法。

1.2 牛顿法和修正牛顿法

牛顿法要每步都计算切线矩阵K_T（也称刚度）并解线性方程组，虽精度高，但工作量也大。

此外，在某些非线性问题(如理想塑性和软化塑性问题)中用牛顿法，迭代过程中切线矩阵可能是奇异的或病态的，为了克服这一现象，可有多种处理方法，其一是按下式来求

$$\Delta a_i = -(\Psi_{i,j}(a_k^n) + \mu^n \delta_{ij})^{-1} \Psi_j(a_k^n)$$

其中μ^n的作用是改变切线矩阵K_T的主对角元素，使奇异性或病态得到改善。更多的改进方法可参看沈聚敏《钢筋混凝土有限元与板壳极限分析》等。

1.2 牛顿法和修正牛顿法

如果在计算的每一步内，矩阵K_T都用初始近似解K_T^0计算，在这种情况下，仅第一步迭代需要完全求解一个线性方程组，如果将K_T^0三角分解并存储起来，而以后各步迭代中采用公式

$$\Delta a^n = -(K_T(a^0))^{-1}\Psi(a^n)$$

则只需对上式右端项中的 $\Psi(a^n)$进行回代就行了。这种方法称为修正的牛顿法。

为了提高修正牛顿法的收敛速度可采用某些过量修正技术。讲义上作了简要介绍，请大家自己看。

1.3 拟牛顿法

拟牛顿法的主要思想是：

首先设$(K_T)^{n+1}$可写成如下修正形式

$$(K_T)^{n+1}=(K_T)^n+(\Delta K_T)^n$$

式中$(\Delta K_T)^n$称为修正矩阵。

接着设$(K_T)^{n+1}$必须满足如下所谓拟牛顿方程

$$\boldsymbol{K}^{n+1}\cdot(\boldsymbol{a}^{n+1}-\boldsymbol{a}^n)=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^{n+1})-\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^n)$$

由此可建立拟牛顿法迭代格式(略去了下标T)

$$\Delta a_i^n=-(K_{ij}^n)^{-1}\Psi_j(a_k^n) \qquad a_i^{n+1}=a_i^n+\Delta a_i^n$$

$$K_{ij}^{n+1}\cdot(a_j^{n+1}-a_j^n)=\Psi_i(a_k^{n+1})-\Psi_i(a_k^n)$$

$$\boldsymbol{K}^{n+1}=\boldsymbol{K}^n+\Delta\boldsymbol{K}^n$$

要用拟牛顿法，还需给出修正矩阵的计算。

推导修正矩阵算式的思路是：

设 $(\Delta K_T)^n=(u^n)(v^n)^T$

(u^n)和(v^n)是秩1（或秩2，讲义为秩2）的列向量，将修正矩阵代入拟牛顿方程可得

$$[(K_T)^n+(u^n)(v^n)^T](\Delta a)^n=(\Delta\Psi)^n$$

假设$(v^n)^T(\Delta a)^n\neq0$，则有

$$(u^n)=[(v^n)^T(\Delta a)^n]^{-1}[(\Delta\Psi)^n-(K_T)^n(\Delta a)^n]$$

如果取$(v^n)=(\Delta a)^n$，则当$(\Delta a)^n\neq(0)$时

$$(\Delta K_T)^n=[((\Delta a)^n)^T(\Delta a)^n]^{-1}[(\Delta\Psi)^n-(K_T)^n(\Delta a)^n](\Delta a^n)^T$$

当$(\Delta a)^n=(0)$时，迭代已收敛，$(\Delta K_T)^n=(0)$。

讲义上的内容比这里说明的多，但基本思路是一样的。关于秩2的算法，请大家自己看。

讲义上的塞尔曼公式可用逆矩阵定义验证。

对秩1算法来说，实际使用的步骤为：

1. 设$(a)^0$求$(K_T)^0$；
2. 求$(\Delta a)^0=-[(K_T)^0]^{-1}(\Psi)^0$；$a^1=a^0+\Delta a^0$
3. 计算$(\Delta\Psi)^0$；$a^0=a^1$。
4. 计算$(\Delta K_T)^0=[(\Delta\Psi)^0-(K_T)^0(\Delta a)^0]$
$(\Delta a^0)^T/(\Delta a^0)^T(\Delta a)^0$；
5. 计算$(K_T)^1=(K_T)^0+(\Delta K_T)^0$；$(K_T)^0=(K_T)^1$.
6. 重复第2步，直到达到精度要求为止。

讲义上给出了
三种方法的对比，
指出了选用什么算法
应考虑的因素。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/357000106021010002