# 长沙市一中2024届高考适应性演练（一）

# 数 学 试 卷

**注意事项：**

1．答卷前，考生务将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1．已知集合 $A=\{x\,||x-1|>2\}$，$B=\{x\,|\log_4 x<1\}$，则 $A\cap B=$

A．$(3,4)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(3,4)$

C．$(1,4)$　　D．$(-\infty,4)$

2．若复数 $z$ 满足 $(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$，则在复平面内 $z$ 对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

3．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$，若 $S_3=9$，$S_6=36$，则 $a_7+a_8+a_9=$

A．18　　B．27　　C．45　　D．63

4．若 $n$ 为一组从小到大排列的数 1，2，4，8，9，10 的第六十百分位数，则二项式 $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^n$ 的展开式的常数项是

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

5．折扇是我国古老文化的延续，在我国已有四千年左右的历史，“扇”与“善”谐音，折扇也寓意“善良”“善行”．它常以字画的形式体现我国的传统文化，也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征（如图1）．图2是一个圆台的侧面展开图（扇形的一部分），若两个圆弧 $DE$，$AC$ 所在圆的半径分别是3和6，且 $\angle ABC=120°$，则该圆台的体积为



图1

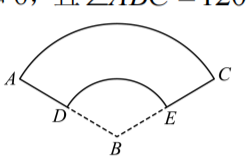



图2

A．$\frac{50\sqrt{2}}{3}\pi$　　B．$9\pi$

C．$7\pi$　　D．$\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$

6．已知函数 $f(x)=x^2-bx+c(b>0,c>0)$ 的两个零点分别为 $x_1,x_2$，若 $x_1,x_2,-1$ 三个数适当调整顺序后可为等差数列，也可为等比数列，则不等式 $\dfrac{x-b}{x-c}\leqslant 0$ 的解集为

A．$\left(1,\dfrac{5}{2}\right]$　　B．$\left[1,\dfrac{5}{2}\right)$

C．$(-\infty,1)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　D．$(-\infty,1]\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

7．已知 $a=\ln(1.2\mathrm{e}),b=\mathrm{e}^{0.2},c=\dfrac{1.2}{\mathrm{e}^{0.2}}$，则有

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

8．已知 $F_1,F_2$ 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 $F_2$ 向双曲线的一条渐近线引垂线，垂足为点 $P,\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$，且 $OQ\perp PF_1$（$O$ 为坐标原点），则双曲线 $C$ 的渐近线方程为

A．$y=\pm 2\sqrt{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{5}x$

C．$y=\pm\sqrt{3}x$　　D．$y=\pm\sqrt{2}x$

**二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）**

9．已知直线 $l$，$m$，平面 $\alpha$，$\beta$，则下列说法错误的是

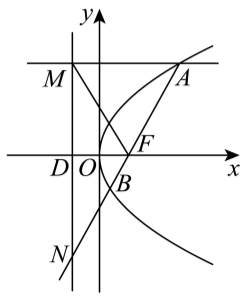
A．$m//l$，$l//\alpha$，则 $m//\alpha$

B．$l//\beta$，$m//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha//\beta$

C．$l//m$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha//\beta$

D．$l//\beta$，$m//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，$l\cap m=M$，则 $\alpha//\beta$

10．如图，已知抛物线 $C$：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，抛物线 $C$ 的准线与 $x$ 轴交于点 $D$，过点 $F$ 的直线 $l$（直线 $l$ 的倾斜角为锐角）与抛物线 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点（$A$ 在 $x$ 轴的上方，$B$ 在 $x$ 轴的下方），过点 $A$ 作抛物线 $C$ 的准线的垂线，垂足为 $M$，直线 $l$ 与抛物线 $C$ 的准线相交于点 $N$，则




A．当直线 $l$ 的斜率为 1 时，$|AB|=4p$

B．若 $|NF|=|FM|$，则直线 $l$ 的斜率为 2

C．存在直线 $l$ 使得 $\angle AOB=90^\circ$

D．若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 $l$ 的倾斜角为 $60^\circ$

11．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=f(2026)$，且 $f(x+1)-1$ 是奇函数.则

A．$f(1)+f(3)=2$

B．$f(2023)+f(2025)=f(2024)$

C．$f(2023)$ 是 $f(2022)$ 与 $f(2024)$ 的等差中项

D．$\sum_{i=1}^{2024} f(i)=2024$

**三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）**

12．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(1,2)$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$，则向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角的余弦值为_____.

13．在四面体 $P-ABC$ 中，$BP\perp PC,\angle BAC=60^\circ$，若 $BC=2$，则四面体 $P-ABC$ 体积的最大值是_____，它的外接球表面积的最小值为_____.

14．已知反比例函数图象上三点 $A,B,P$ 的坐标分别 $\left(3,\frac{a}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},3a\right)\left(a>\frac{1}{3}\right)$ 与 $(x,y)\left(\frac{1}{3}<x<3\right)$，过 $B$ 作直线 $AP$ 的垂线，垂足为 $Q$.若 $|AP|\cdot|PQ|\le\frac{5}{3}+a$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围为_____.

**四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）**

15．（13 分）某商场举行“庆元宵，猜谜语”的促销活动，抽奖规则如下：在一个不透明的盒子中装有若干个标号为 1，2，3 的空心小球，球内装有难度不同的谜语．每次随机抽取 2 个小球，答对一个小球中的谜语才能回答另一个小球中的谜语，答错则终止游戏．已知标号为 1，2，3 的小球个数比为 1：2：1，且取到异号球的概率为 $\frac{5}{7}$.

（1）求盒中 2 号球的个数；

（2）若甲抽到 1 号球和 3 号球，甲答对球中谜语的概率和对应奖金如表所示，请帮甲决策猜谜语的顺序（猜对谜语的概率相互独立）

| 球号 | 1 号球 | 3 号球 |
|---|---|---|
| 答对概率 | 0.8 | 0.5 |
| 奖金 | 100 | 500 |

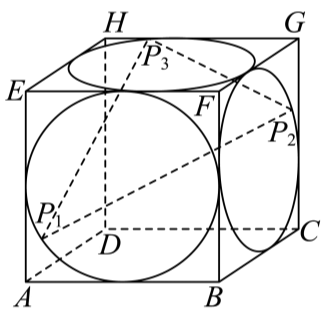
16．（15 分）“费马点”是由十七世纪法国数学家费马提出．该问题是：“在一个三角形内求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小．”意大利数学家托里拆利给出了解答，当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$ 时，使得 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$ 的点 $O$ 即为费马点；当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$ 时，最大内角的顶点为费马点．试用以上知识解决下面问题：

已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，且 $\cos 2B+\cos 2C-\cos 2A=1$

（1）求 A；

（2）若 $bc=2$，设点 $P$ 为 $\triangle ABC$ 的费马点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$．

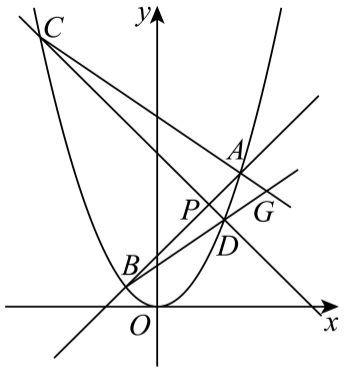
17．（15 分）如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 2，在正方形 $ABFE$ 的内切圆上任取一点 $P_1$，在正方形 $BCGF$ 的内切圆上任取一点 $P_2$，在正方形 $EFGH$ 的内切圆上任取一点 $P_3$．




（1）若 $P_1$，$P_2$，$P_3$ 分别是棱 $AB$，$GC$，$HG$ 的中点，，求棱 $AE$ 和平面 $P_1P_2P_3$ 所成角的余弦值；

（2）求 $|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_1|$ 的最小值与最大值．

18．（17 分）如图，已知抛物线 $E: y=x^2$，点 $P(1,2)$，过点 $P$ 任作两条直线，分别与抛物线 $E$ 交于 $A$，$B$ 与 $C$，$D$.




（1）若 $AB,CD$ 的斜率分别为 $1,-1$，求四边形 $ABCD$ 的面积；

（2）设 $A(x_1,x_1^2),B(x_2,x_2^2)$，$C(x_3,x_3^2),D(x_4,x_4^2)$

（i）找到 $x_1,x_2$ 满足的等量关系；

（ii）$AC,BD$ 交于点 $G$，证明：点 $G$ 在定直线上.

19. （17 分）置换是代数的基本模型，定义域和值域都是集合 $A=\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbf{N}_+$ 的函数称为 $n$ 次置换.满足对任意 $i\in A, f(i)=i$ 的置换称作恒等置换．所有 $n$ 次置换组成的集合记作 $S_n$ .对于 $f(i)\in S_n$，我们可用列表法表示此置换：$f(i)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}$，记 $f(i)=f^1(i), f(f(i))=f^2(i), f(f^2(i))=f^3(i),\cdots, f(f^{k-1}(i))=f^k(i), i\in A, k\in\mathbf{N}_+$ .

（1）若 $f(i)\in S_4, f(i)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$，计算 $f^3(i)$；

（2）证明：对任意 $f(i)\in S_4$，存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使得 $f^k(i)$ 为恒等置换；

（3）对编号从 1 到 52 的扑克牌进行洗牌，分成上下各 26 张两部分，互相交错插入，即第 1 张不动，第 27 张变为第 2 张，第 2 张变为第 3 张，第 28 张变为第 4 张，……，依次类推.这样操作最少重复几次就能恢复原来的牌型？请说明理由.

# 长沙市一中2024届高考适应性演练（一）

# 数学参考答案

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1．A

【解析】由$|x-1|>2$，得$x<-1$或$x>3$，所以$A=\{x|x<-1或x>3\}$，

由$\log_4 x<1$，得$0<x<4$，所以$B=\{x|0<x<4\}$，

所以$A\cap B=\{x|3<x<4\}$.

故选：A.

2．A

【解析】由$z=\dfrac{|4+3\mathrm{i}|}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{5}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{5(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}$，对应点为$(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$在第一象限.

故选：A

3．C

【解析】由题意得$S_3,S_6-S_3,S_9-S_6$成等差数列，

即$9,36-9,a_7+a_8+a_9$成等差数列，

即$2\times(36-9)=9+a_7+a_8+a_9$，解得$a_7+a_8+a_9=45$.

故选：C

4．A【解析】因为$n$为一组从小到大排列的数1，2，4，8，9，10的第六十百分位数，

$6\times60\%=3.6$，

所以$n=8$，

二项式$\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2x}\right)^8$的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-r}\cdot\left(\dfrac{1}{2x}\right)^r=\mathrm{C}_8^r\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot x^{\frac{8-r}{3}-r}$，

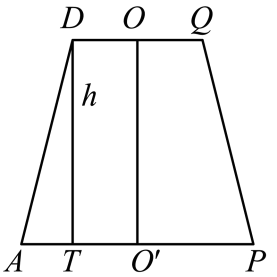
令$\dfrac{8-r}{3}-r=0\Rightarrow r=2$，所以常数项为$\mathrm{C}_8^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{8\times7}{2}\times\dfrac{1}{4}=7$，

故选：A

5．D

【解析】设圆台上下底面的半径分别为$r_1,r_2$，由题意可知$\dfrac{1}{3}\times2\pi\times3=2\pi r_1$，解得$r_1=1$，

$\dfrac{1}{3}\times2\pi\times6=2\pi r_2$，解得：$r_2=2$，作出圆台的轴截面，如图所示：




图中 $OD=r_1=1, O'A=r_2=2$，$AD=6-3=3$，

过点 $D$ 向 $AP$ 作垂线，垂足为 $T$，则 $AT=r_2-r_1=1$，

所以圆台的高 $h=\sqrt{AD^2-AT^2}=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$，

则上底面面积 $S_1=\pi\times1^2=\pi$，$S_2=\pi\times2^2=4\pi$，由圆台的体积计算公式可得：

$$V=\frac{1}{3}\times(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2})\times h=\frac{1}{3}\times7\pi\times2\sqrt{2}=\frac{14\sqrt{2}\pi}{3},$$

故选：D.

6．A

**【解析】**由函数 $f\left(x\right)=x^2-bx+c(b>0,c>0)$ 的两个零点分别为 $x_1,x_2$，

即 $x_1,x_2$ 是 $x^2-bx+c=0$ 的两个实数根据，则 $x_1+x_2=b, x_1x_2=c$

因为 $b>0,c>0$，可得 $x_1>0,x_2>0$，

又因为 $x_1,x_2,-1$ 适当调整可以是等差数列和等比数列，

不妨设 $x_1<x_2$，可得 $\begin{cases}x_1x_2=\left(-1\right)^2=1\\-1+x_2=2x_1\end{cases}$，解得 $x_1=\frac{1}{2},x_2=2$，

所以 $x_1+x_2=\frac{5}{2},x_1x_2=1$，所以 $b=\frac{5}{2},c=1$，

则不等式 $\frac{x-b}{x-c}\leqslant0$，即为 $\frac{x-\frac{5}{2}}{x-1}\leqslant0$，解得 $1<x\leq\frac{5}{2}$，所以不等式的解集为 $\left(1,\frac{5}{2}\right]$.

故选：A.

7．C

**【解析】**令 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\ln\left(x+1\right)-1,x>0$，则 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x+1}$.

当 $x>0$ 时，有 $\mathrm{e}^x>1,\frac{1}{x+1}<1$，所以 $\frac{1}{x+1}<1$，

所以，$f'(x)>0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

所以，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以，$f(x)>f(0)=1-1=0$，

所以，$f(0.2)>0$，即$\mathrm{e}^{0.2}-\ln 1.2-1>0$，所以$a<b$.

令$g(x)=\mathrm{e}^{x}-(x+1),x>0$，则$g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$在$x>0$时恒大于零，故$g(x)$为增函数，

所以$\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}<1,x>0$，而$a=\ln(1.2\mathrm{e})=1+\ln 1.2>1$，所以$c<a$，

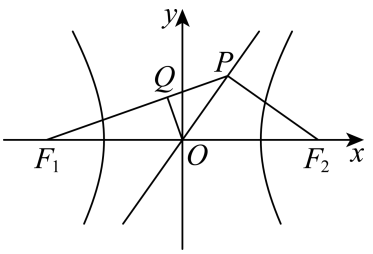
所以$c<a<b$，

故选：C

8．D

【解析】设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$焦距为$2c$，则$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，

不妨设渐近线$OP$的方程为$y=\dfrac{b}{a}x$，如图：




因为直线$PF_2$与直线$y=\dfrac{b}{a}x$垂直，则直线$PF_2$的方程为$y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，

联立$\begin{cases}y=\dfrac{b}{b}x\\ y=-\dfrac{a}{b}(x-c)\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\dfrac{a^2}{c}\\ y=\dfrac{ab}{c}\end{cases}$，即点$P\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，

所以，$\overrightarrow{PF_1}=\left(-c-\dfrac{a^2}{c},-\dfrac{ab}{c}\right)=\left(-\dfrac{a^2+c^2}{c},-\dfrac{ab}{c}\right)$，

因为$OQ\perp PF_1$，所以$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=0$，

又$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$，故$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$，

所以，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\left(\overrightarrow{OP}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}\right)\cdot\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}^2$

$=-\dfrac{a^2b^2+a^2\left(a^2+c^2\right)}{c^2}+\dfrac{\left(a^2+c^2\right)^2+a^2b^2}{3c^2}=0$，

整理可得$b^4-a^2b^2-2a^4=0$，

所以$\left(\frac{b}{a}\right)^4-\left(\frac{b}{a}\right)^2-2=0$，又$\frac{b}{a}>0$，

所以$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，

故该双曲线 C 的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

故选：D.

**二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）**

9．ABC

**【解析】**选项 A 中，$m$ 可能在$\alpha$ 内，也可能与$\alpha$ 平行，故 A 错误；

选项 B 中，$\alpha$ 与$\beta$ 也可能相交，故 B 错误；

选项 C 中，$\alpha$ 与$\beta$ 也可能相交，故 C 错误；

选项 D 中，依据面面平行的判定定理可知$\alpha\parallel\beta$，故 D 正确.

故选：ABC.

10．AD

**【解析】**易知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，可设$AB:y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)(k>0)$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

与抛物线方程联立得$\begin{cases}y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\\y^2=2px\end{cases}\Rightarrow k^2x^2-\left(k^2p+2p\right)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$，

则$x_1+x_2=\frac{k^2p+2p}{k^2},x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，

对于 A 项，当直线 $l$的斜率为 1 时，此时$x_1+x_2=3p$，

由抛物线定义可知$|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=|AB|=4p$，故 A 正确；

易知$\triangle AMN$是直角三角形，若$|NF|=|FM|$，

则$\angle ANM=\angle FMN\Rightarrow\angle AMF=\angle FAM$，

又$|AF|=|AM|$，所以$\triangle AMF$为等边三角形，即$\angle AFx=60^\circ$，

此时$k=\sqrt{3}$，故 B 错误；

由上可知$x_1x_2+y_1y_2=\left(k^2+1\right)x_1x_2-\frac{pk^2}{2}\left(x_1+x_2\right)+\frac{p^2k^2}{4}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/357050012044006060