专题 02　常用逻辑用语综合归类

题型盘点·直击高考

目录

题型突围·精准提分

题型一：命题概念及命题真假

指|点|迷|津

判断命题的真假：

1. 直接法：应用所学过的基本事实和定理进行判断
2. 反例法：举出命题所涉及到的知识中的反例即可。

1.（23-24 高三·上海·模拟）已知命题：“非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素”是假命题，给出下列命题，其中真命题的个数是（　）

①M 中的元素都不是 P 的元素；②M 中有不属于 P 的元素；
③M 中有 P 的元素；④M 中的元素不都是 P 的元素.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【分析】由题意可得集合 M 不是 P 的子集．由此结合子集的定义与集合的运算性质，逐项判断即可.

【详解】根据命题"非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素"是假命题，可得 M 不是 P 的子集
对于①，集合 M 虽然不是所有元素都在 P 中，但有可能有属于 P 的元素，因此①是假命题；
对于②，因为 M 不是 P 的子集，所以必定有不属于 P 的元素，故②是真命题；同理不能确定 M 有没有 P 的元素，故③是假命题；
对于④，由子集的定义可得，既然 M 不是 P 的子集，那么必定有一些不属于 P 的元素，因此 M 的元素不都是 P 的元素，可得④是真命题.
故选：B.

2.（2022·安徽蚌埠·模拟预测）下列四个命题中，是假命题的是（　）

A．$\forall x \in \mathbf{R}$，且 $x \neq 0, x+\dfrac{1}{x} \geq 2$

B．$\exists x \in \mathbf{R}$，使得 $x^2+1 \leq 2x$

C．若 $x>0$，$y>0$，则 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{2xy}{x+y}$

D．若 $x\ge\frac{5}{2}$，则 $\frac{x^2-4x+5}{2x-4}$ 的最小值为 1

【答案】A

【分析】A 举反例，B 找一个满足条件的，C 基本不等式的应用，D 分离常数结合基本不等式.

【详解】解析：选 A.对于 A，$\forall x\in\mathbf{R}$，且 $x\ne0, x+\frac{1}{x}\ge2$ 对 $x<0$ 时不成立；

对于 B，当 $x=1$ 时，$x^2+1=2$，$2x=2$，$x^2+1\le2x$ 成立，正确；

对于 C，若 $x>0$，$y>0$，则 $\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2\ge2xy\cdot4xy=8x^2y^2$，化为 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{2xy}{x+y}$，当且仅当 $x=y>0$ 时取等号，C 正确；

对于 D，$y=\frac{x^2-4x+5}{2x-4}=\frac{(x-2)^2+1}{2(x-2)}=\frac{1}{2}\left[(x-2)+\frac{1}{x-2}\right]$，因为 $x\ge\frac{5}{2}$，所以 $x-2>0$，所以 $\frac{1}{2}\left[(x-2)+\frac{1}{x-2}\right]\ge\frac{1}{2}\times2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}=1$，当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$，即 $x=3$ 时取等号.故 y 的最小值为 1，D 正确.

故选：A

3．（23-24 高三·上海闵行·阶段练习）已知 A 是非空数集，如果对任意 x，$y\in A$，都有 $x+y\in A$，$xy\in A$，则称 A 是封闭集.给出两个命题：命题 p：若非空集合 A_1，A_2 是封闭集，则 $A_1\cup A_2$ 是封闭集；命题 q：若非空集合 A_1，A_2 是封闭集，且 $A_1\cap A_2\ne\varnothing$，则 $A_1\cap A_2$ 是封闭集.则（　　）

A．命题 p 真命题 q 真　　B．命题 p 真命题 q 假

C．命题 p 假命题 q 真　　D．命题 p 假命题 q 假

【答案】C

【分析】对命题 p 举反例 $A_1=\{x\mid x=2k,k\in Z\},A_2=\{x\mid x=3k,k\in Z\}$ 说明即可; 对于命题 q：设 $a,b\in(A_1\cap A_2)$，由 A_1,A_2 是封闭集，可得 $a+b\in(A_1\cap A_2),ab\in(A_1\cap A_2)$，从而判断为正确；

【详解】对命题 p：令 $A_1=\{x\mid x=2k,k\in Z\},A_2=\{x\mid x=3k,k\in Z\}$，则集合 A_1,A_2 是封闭集，

故 $A_1\cup A_2=\{\cdots,-3,-2,0,2,3,4,6,\cdots\}$，

但 $-2+3=1\notin A_1\cup A_2$，故 $A_1\cup A_2$ 不是封闭集，故命题 p 假；

对于命题 q：设 $a,b\in(A_1\cap A_2)$，则有 $a,b\in A_1$，又因为集合 A_1 是封闭集，

所以 $a+b\in A_1,ab\in A_1$，

同理可得 $a+b\in A_2,ab\in A_2$，

所以 $a+b\in(A_1\cap A_2),ab\in(A_1\cap A_2)$，

所以 $A_1\cap A_2$ 是封闭集，故命题 q 真；

故选：C

4．（22-23 高三·上海浦东新·模拟）十七世纪法国数学家费马提出猜想：“当整数 $n>2$ 时，关于 x，y，z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”．经历百多年，于二十世纪九十年代中期由美国数学家安德鲁怀尔斯证明了费马猜想，使它终成为费马大定理根据前面叙述，则下列命题正确的个数为（　　）

（1）存在至少一组正整数组 (x,y,z) 是关于 x，y，z 的方程 $x^3+y^3=z^3$ 的解；

（2）关于 x，y 的方程 $x^3+y^3=1$ 有正有理数解；

（3）关于 x，y 的方程 $x^3+y^3=1$ 没有正有理数解；

（4）当整数 $n>3$ 时关于 x，y，z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 有正实数解

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】C

【分析】当整数 $n>2$ 时方程没有正整数解，（1）错误，$\left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{y}{z}\right)^3=1$，没有正有理数解，（2）错误，（3）

正确，当 $x=y=1$， $z=2^{\frac{1}{n}}$ 满足条件，（4）正确，得到答案.

【详解】当整数 $n>2$ 时，关于 x， y， z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解，故方程 $x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解，（1）错误；

$x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解.即 $\left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{y}{z}\right)^3=1$，$(z\neq 0)$，没有正有理数解，（2）错误，（3）正确；

方程 $x^n+y^n=z^n$，当 $x=y=1$， $z=2^{\frac{1}{n}}$ 满足条件，故有正实数解，（4）正确.

故选：C

5．（21-22 高三·上海·模拟）给出以下命题 ①若 $a,b\in R$，且 $a>b$，则 $a+i>b+i$；② $z_1,z_2\in C$， $z_1-z_2>0$ 是 $z_1>z_2$ 的必要条件；③ $a,b\in R$，则 $a=b$ 是 $(a-b)+(a+b)i$ 为纯虚数的充要条件；④ $z_1,z_2\in C$，若 $z_1\cdot z_2=0$，则 $z_1=0$ 或 $z_2=0$.

其中正确的命题有（　）.

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】B

【分析】①根据虚数不能比较大小判断；②举例 $z_1=1+i,z_2=i$，结合实数能比较大小判断；③举例 $a=b=0$ 判断；④直接利用复数的乘法判断.

【详解】①因为 $a+i,b+i$ 都是虚数，而虚数不能比较大小，故错误；

②因为 $z_1,z_2\in C$，如 $z_1=1+i,z_2=i$，满足 $z_1-z_2>0$，由于虚数不能比较大小，所以推不出 $z_1>z_2$，不充分，当 $z_1>z_2$，则 z_1,z_2 为实数，所以 $z_1-z_2>0$，必要，故正确；

③因为 $a,b\in R$，如 $a=b=0$，满足 $a=b$，推不出 $(a-b)+(a+b)i$ 为纯虚数，故不充分，故错误；

④因为 $z_1,z_2\in C$，设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$，则 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i=0$，所以

$\begin{cases}ac-bd=0\\bc+ad=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}(ac-bd)^2=0\\(bc+ad)^2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}(ac)^2-2abcd+(bd)^2=0\\(bc)^2+2abcd+(ad)^2=0\end{cases}$，两式相加整理得：

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$，则 $a=b=0$ 或 $c=d=0$，所以 $z_1=0$ 或 $z_2=0$，故正确

故选：B

【点睛】本题主要考查有关复数的命题的真假判断，还考查了理解辨析，分析求解问题的能力，属于中档题.

6.（2024 年新高考 2）已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　）

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【解析】

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x=-1$、$x=1$，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解.

【详解】对于 p 而言，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x=1$，则有 $x^3=1^3=1=x$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题，

综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选：B.

题型二：充分不必要条件

指丨点丨迷丨津

充分条件的判断方法

(1)判定 p 是 q 的充分条件要先分清什么是 p，什么是 q，即转化成 $p\Rightarrow q$ 问题.

(2)除了用定义判断充分条件还可以利用集合间的关系判断，若 p 构成的集合为 A，q 构成的集合为 B，$A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件

1.（2023·江苏苏州·模拟）记方程①：$x^2+ax+1=0$，方程②：$x^2+bx+2=0$，方程③：$x^2+cx+4=0$，其中 a,b,c 是正实数.若 a,b,c 成等比数列，则“方程③无实根”的一个充分条件是（　）

A．方程①有实根，且②有实根　　B．方程①有实根，且②无实根

C．方程①无实根，且②有实根　　D．方程①无实根，且②无实根

【答案】B

【分析】根据判别式以及充分条件的定义逐项分析.

【详解】由题意，$b=aq,c=bq=aq^2$，其中 $q>0$；

对于 A，如果 $x^2+ax+1=0$ 有实根，则 $\Delta_1=a^2-4\geq 0,a\geq 2$，如果 $x^2+bx+2=0$ 有实根，

则 $\Delta_2=b^2-8\geq 0,b\geq 2\sqrt{2}$，$q$ 有可能大于等于 $\sqrt{2}$，

则 $\Delta_3=c^2-16=a^2q^4-16$，即 Δ_3 有可能大于等于 0，即由①②不能推出③无实根，A 不是充分条件；

对于 B，有 $a\geq 2,b<2\sqrt{2}$，则必有 $q<\sqrt{2}$，即 $\Delta_3=b^2q^2-16<0$，方程③无实根，

所以 B 是③无实根的充分条件；

对于 C，有 $a<2,b\geq 2\sqrt{2},\therefore q>\sqrt{2}$，$\Delta_3=b^2q^2-16>0$，方程③有实根，C 不是方程③无实根的充分条件；

对于 D，有 $a<2,b<2\sqrt{2}$，q 的值不确定，有可能小于 $\sqrt{2}$，也有可能大于 $\sqrt{2}$，

不能保证方程③无实根，例如 $a=0.1,b=2$，则 $q=\dfrac{b}{a}=20$，$\Delta_3=2^2\times 20^2-16>0$，

所以 D 不是方程③无实根的充分条件；

故选：B.

2.（2023·上海普陀·二模）设 a,b 为实数，则“$a>b>0$”的一个充分非必要条件是（　）

A．$\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$　　B．$a^2>b^2$

C．$\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$　　D．$a-b>b-a$

【答案】A

【分析】由充分非必要条件定义，根据不等式的性质判断各项与 $a>b>0$ 推出关系即可.

【详解】由 $\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$，则 $\begin{cases}a-1>b-1\\b-1\geq 0\end{cases}$，可得 $a>b\geq 1$，可推出 $a>b>0$，反向推不出，满足；

由 $a^2>b^2$，则 $|a|>|b|$，推不出 $a>b>0$，反向可推出，不满足；

由 $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$，则 $a>b>0$ 或 $b>0>a$ 或 $0>a>b$，推不出 $a>b>0$，反向可推出，不满足；

由 $a-b>b-a$，则 $a>b$，推不出 $a>b>0$，反向可推出，不满足；

故选：A

3.（2023·江西·二模）记全集为 U，$\overline{p}$ 为 p 的否定，$\overline{q}$ 为 q 的否定，且 $\overline{p}$ 的必要条件是 q 的必要条件，则（　）

A．存在 q 的必要条件是 q 的充分条件　　B．$p\cup q=U$

C．任意 q 的必要条件是 $\overline{p}$ 的必要条件　　D．存在 $\overline{q}$ 的充分条件是 p 的必要条件

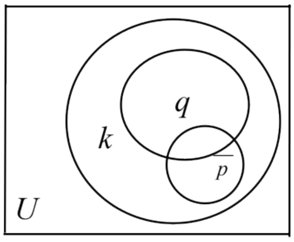
【答案】D

【分析】利用反证法否定选项 A；分别举反例否定选项 B，C；举例验证选项 D 正确.

【详解】令 $\overline{p}$ 的必要条件为 k，则 q 的必要条件为 k，即 $\overline{p}\subseteq k,q\subseteq k,k\subseteq U$，

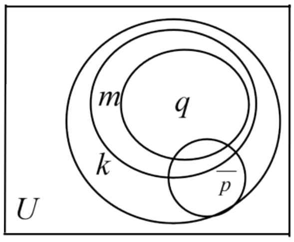
选项 A：若存在 q 的必要条件是 q 的充分条件，则 $k=p$，则 $\overline{p}\subseteq q$.判断错误；

选项 B：由下图可得 $p\cup q\subseteq U$.判断错误；



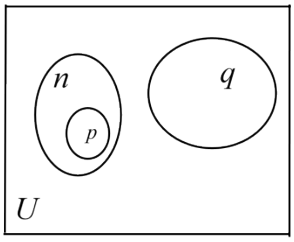
选项 C：如下图得，$m \subseteq U, q \subseteq m, \overline{p} \not\subseteq m$，

则 q 的必要条件 m 不是 $\overline{p}$ 的必要条件.判断错误；



选项 D：如下图得：$k = U, n \subseteq U, n \subseteq \overline{q}, p \subseteq n$，

则存在 $\overline{q}$ 的充分条件是 p 的必要条件.判断正确.



故选：D

4．（23-24 高三·湖南长沙·阶段练习）已知集合 $A=\{3,m\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $m=5$ 是 $A \subseteq B$ 的（　）

A．充分条件　　B．必要条件

C．既不是充分条件也不是必要条件　　D．充分必要条件

【答案】A

【分析】根据充分条件、必要条件的定义，结合子集的定义进行判断即可.

【详解】当 $m=5$ 时，$A=\{3,5\}$，显然 $A \subseteq B$，

当 $A \subseteq B$ 时，$m=1$ 也可以，$m=5$ 不一定成立，

所以 $m=5$ 是 $A \subseteq B$ 的充分条件，

故选：A

5．（23-24 高三·湖北襄阳·阶段练习）若集合 $A=\{x \mid 2<x<3\}$，$B=\{x \mid x>b，b \in \mathrm{R}\}$，则 $A \subseteq B$ 的一个充分不必要条件是（　）

A．$b \geq 3$　　B．$2<b \leq 3$

C．$b \leq 2$　　D．$b<2$

【答案】D

【分析】利用简易逻辑的判定方法，集合之间的关系，不等式的性质即可得出答案.

【详解】因为集合 $A=\{x \mid 2<x<3\}$，$B=\{x \mid x>b，b \in \mathrm{R}\}$，

若 $A \subseteq B$，利用数轴，可求 $b \leq 2$，

故 $A \subseteq B$ 的一个充分不必要条件是 $b<2$.

故选：D.

题型三：充分条件求参

指｜点｜迷｜津

用充分不必要、必要不充分及充要条件求参数值(范围)的一般步骤

(1)根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系.

(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

(3)充分必要条件与集合包含之间的关系.

命题p对应集合M，命题q对应集合是N，则p是q的充分条件$\Leftrightarrow M\subseteq N$，$p$是$q$的必要条件$\Leftrightarrow M\supseteq N$，$p$是$q$的充要条件$\Leftrightarrow M=N$，$p$是$q$的充分不必要条件$\Leftrightarrow M\subsetneqq N$，$p$是$q$的必要不充分条件$\Leftrightarrow M\supsetneqq N$.

1.（23-24高三·江苏连云港·开学考试）若不等式$|x|<a$的一个充分条件为$0<x<1$，则实数a的取值范围是（　）

A．$(0,1]$　　B．$(0,1)$

C．$[1,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】C

【分析】先解$|x|<a$，得到$-a<x<a$，再利用条件即可求出结果.

【详解】由$|x|<a$，得到$-a<x<a$，

又不等式$|x|<a$的一个充分条件为$0<x<1$，所以$a\geq 1$，

故选：C.

2.（21-22高三·全国·课后作业）已知不等式$m-1<x<m+1$成立的充分条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，则实数$m$的取值范围是（ ）

A．$\left\{m\middle|\ m<-\frac{1}{2}或m>\frac{4}{3}\right\}$　　B．$\left\{m\middle|\ m<-\frac{1}{2}或m\geq\frac{4}{3}\right\}$

C．$\left\{m\middle|-\frac{1}{2}<m<\frac{4}{3}\right\}$　　D．$\left\{m\middle|-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{4}{3}\right\}$

【答案】D

【分析】由题意知$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\subseteq(m-1,m+1)$，根据子集关系列式解得参数范围即可.

【详解】由题意得$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\subseteq(m-1,m+1)$，

所以$\begin{cases}m-1\leq\frac{1}{3}\\m+1\geq\frac{1}{2}\end{cases}$，且等号不能同时成立，解得$-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{4}{3}$.

故选：D.

3.（19-20高下·北京·开学考试）“$m<8$”是“方程$\frac{x^2}{m-10}-\frac{y^2}{m-8}=1$表示双曲线”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】根据充分条件与必要条件的判断，看条件与结论之间能否互推，条件能推结论，充分性成立，结论能推条件，必要性成立，由此即可求解.

【详解】若方程$\frac{x^2}{m-10}-\frac{y^2}{m-8}=1$表示双曲线，

则$(m-10)(m-8)>0\Rightarrow m<8$或$m>10$，

所以“$m<8$”是“方程$\frac{x^2}{m-10}-\frac{y^2}{m-8}=1$表示双曲线”的充分而不必要条件.

故选：A

【点睛】本题以双曲线的标准方程及充分必要条件的判断，考查理解辨析能力，属于基础题.

4.（20-21高三·浙江绍兴·模拟）ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，则“$a\le\frac{1}{2}(b+c)$”是“A为锐角”的（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充分必要条件　　D．既非充分又非必要条件

【答案】A

【解析】由题知:$a\le\frac{1}{2}(b+c)\Leftrightarrow a^2\le\frac{1}{4}(b+c)^2<\frac{1}{2}(b+c)^2\le b^2+c^2$,结合余弦定理,可推出A为锐角,反之无法推出,因此“$a\le\frac{1}{2}(b+c)$”是“A为锐角”的充分非必要条件.

【详解】①在ΔABC中,若$a\le\frac{1}{2}(b+c)$,

则$a^2\le\frac{1}{4}(b+c)^2$,即$4a^2\le(b+c)^2\le2(b^2+c^2)$,

$\therefore a^2<b^2+c^2$,

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$,

$\therefore A$为锐角,

即“$a\le\frac{1}{2}(b+c)$”$\Rightarrow$“A为锐角”,

②若A为锐角,则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$,即$b^2+c^2>a^2$,

无法推出$b^2+c^2\ge2a^2$,

所以“A为锐角”$\not\Rightarrow$“$a\le\frac{1}{2}(b+c)$”,

综上所述:“$a\le\frac{1}{2}(b+c)$”是“A为锐角”的充分非必要条件,

故选:A.

【点睛】本题考查了充分必要条件的判定,结合了基本不等式及余弦定理等相关知识,综合性较强.

5.（2023高三·全国·专题练习）若关于x的不等式$|x-1|<a$成立的充分条件是$0<x<4$，则实数a的取值范围是（　）

A．$a\le1$　　B．$a<1$

C．$a>3$　　D．$a\ge3$

【答案】D

【分析】求出不等式的解集，利用充分条件的定义，结合集合的包含关系列式求解即得.

【详解】依题意，$a>0$，解不等式$|x-1|<a$，得$1-a<x<1+a$，

由不等式$|x-1|<a$成立的充分条件是$0<x<4$，得$(0,4)\subseteq(1-a,1+a)$，

于是$\begin{cases}1-a\le0\\1+a\ge4\end{cases}$，解得$a\ge3$，

所以实数a的取值范围是$a\ge3$.

故选：D

题型四：必要不充分条件

指 | 点 | 迷 | 津

充分不必要条件判断

(1)判断 p 是 q 的什么条件，主要判断若 p 成立时，能否推出 q 成立，反过来，若 q 成立时，能否推出 p 成立；若 $p\Rightarrow q$ 为真，则 p 是 q 的充分条件，若 $q\Rightarrow p$ 为真，则 p 是 q 的必要条件.
(2)也可利用集合的关系判断，如条件甲“$x\in A$”，条件乙“$x\in B$”，若 $A\supseteq B$，则甲是乙的必要条件.

1.（22-23 高三·四川绵阳·阶段练习）下列“若 p，则 q”形式的命题中，p 是 q 的必要条件的有（　）个
① 若 x,y 是偶数，则 $x+y$ 是偶数
②若 $a<2$，则方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根
③若四边形的对角线互相垂直，则这个四边形是菱形
④若 $ab=0$，则 $a=0$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D
【分析】根据必要条件的概念找出符合要求的选项即可.
【详解】对于①，$x+y$ 是偶数，不能保证 x，y 均是偶数，也有可能都是奇数，故①不符合题意；
对于②，若方程 $x^2-2x+a=0$，则需满足 $\Delta=4-4a\geqslant 0$，即 $a\le 1$，可推出 $a<2$，故②符合题意；
对于③，若四边形是菱形，则四边形对角线互相垂直，故③符合题意；
对于④，若 $a=0$，则 $ab=0$，故④符合题意.
故选：D.

2.（2022·黑龙江·一模）已知 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$ab\ne 0$”的一个必要条件是（　）

A．$a+b\ne 0$　　B．$a^2+b^2\ne 0$　　C．$a^3+b^3\ne 0$　　D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ne 0$

【答案】B
【分析】利用 $a=3,b=-3$ 否定 ACD 选项，进而得答案.
【详解】解：对于 A 选项，当 $a=3,b=-3$ 时，$ab\ne 0$，此时 $a+b=0$，故 $a+b\ne 0$ 不是 $ab\ne 0$ 的必要条件，故错误；
对于 B 选项，当 $ab\ne 0$ 时，$a^2+b^2\ne 0$ 成立，反之，不成立，故 $a^2+b^2\ne 0$ 是 $ab\ne 0$ 的必要条件，故正确；
对于 C 选项，当 $a=3,b=-3$ 时，$ab\ne 0$，但此时 $a^3+b^3=0$，故 $a^3+b^3\ne 0$ 不是 $ab\ne 0$ 的必要条件，故错误；
对于 D 选项，当 $a=3,b=-3$ 时，$ab\ne 0$，但此时 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$，故故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ne 0$ 不是 $ab\ne 0$ 的必要条件，故错误.
故选：B

3.（2021·江西·模拟预测）设 a，b，$c\in R$，则“$abc=0$”是“$a^4+b^4+c^4=0$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．既不充分也不必要条件　　D．充要条件

【答案】B
【分析】根据充分性和必要性的判断方法来判断即可.
【详解】当 $abc=0$ 时，若 $a=1,b=c=0$，不能推出 $a^4+b^4+c^4=0$，不满足充分性；
当 $a^4+b^4+c^4=0$，则 $a=b=c=0$，有 $abc=0$，满足必要性；
所以“$abc=0$”是“$a^4+b^4+c^4=0$”的必要不充分条件.
故选：B

4.（20-21 高三·全国·单元测试）已知 a，b 为任意实数，则 $a+b>2c$ 的必要不充分条件是（　）

A．$a>c$ 且 $b>c$　　B．$a>c$ 或 $b>c$
C．$a\le c$ 且 $b\le c$　　D．$a\le c$ 或 $b\le c$

【答案】B
【分析】由充分必要条件的定义及特例即得.
【详解】由 $a>c$ 且 $b>c$ 可推出 $a+b>2c$，故 A 错误；
若 $a>c$ 或 $b>c$ 不成立即 $a\le c$ 且 $b\le c$，则 $a+b\le 2c$，即 $a+b>2c$ 不成立，所以由 $a+b>2c$ 可得 $a>c$ 或 $b>c$；令 $a=2,b=-2,c=1$，满足 $a>c$ 或 $b>c$，$a+b>2c$ 不成立即由 $a>c$ 或 $b>c$ 推不出 $a+b>2c$，故 B 正确；
令 $a=b=2,c=1$，$a+b>2c$ 成立，显然 $a\le c$ 且 $b\le c$ 不成立，$a\le c$ 或 $b\le c$ 也不成立，故 CD 错误.

故选：B

5．（20-21 高三·浦东新·阶段练习）已知$p:\begin{cases}a>-3\\b>-3\end{cases}$，$q:\begin{cases}a+b>-6\\ab>9\end{cases}$，则$p$是$q$的（　）

A．充分非必要条件　　　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　D．非充分非必要条件

【答案】B

【分析】直接利用不等式的性质判断充分条件和必要条件.

【详解】解：对于命题$p:\begin{cases}a>-3\\b>-3\end{cases}$，可得到$a+b>-6$，但是$ab$与 9 没有关系，

当命题$q:\begin{cases}a+b>-6\\ab>9\end{cases}$，整理$(a+3)(b+3)=ab+3(a+b)+9>9+9-18=0$，

即得到$\begin{cases}a>-3\\b>-3\end{cases}$，故$p$是$q$的必要不充分条件.

故选：B.

【点睛】本题考查不等式的性质以及利用等价法判断必要不充分条件，考查学生的运算和推理能力，属于

题型五：必要条件求参

指｜点｜迷｜津

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件	
p 是 q 的充分不必要条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$
p 是 q 的必要不充分条件	$p\not\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的充要条件	$p\Leftrightarrow q$

1．（22-23 高三·湖南衡阳·阶段练习）“方程$\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$的曲线是椭圆”的一个必要不充分条件是（　）

A．“$m=6$”　　　　B．“$6<m<7$”

C．“$5<m<7$”　　　　D．“$5<m<7$”且“$m\neq 6$”

【答案】C

【分析】由椭圆的定义可列出m满足的不等式组，从而求出m的取值范围，再结合选项选出必要不充分条件.

【详解】因为方程$\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$的曲线是椭圆，

则由椭圆的定义可知：$\begin{cases}7-m>0\\m-5>0\\7-m\neq m-5\end{cases}$，解得：$5<m<7$且$m\neq 6$，

所以“方程$\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$的曲线是椭圆”的充要条件为“$5<m<7$且$m\neq 6$”，

Q“$5<m<7$”推不出“$5<m<7$且$m\neq 6$”，反之可推出，

所以“$5<m<7$”是方程“$\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$的曲线是椭圆”的必要不充分条件.

所以“方程$\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$的曲线是椭圆”的必要不充分条件是：“$5<m<7$”.

故选：C.

【点睛】本题考查必要不充分条件的判断，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力、运算求解能力，求解时注意利用集合的关系进行解题.

2．（23-24 高三·广西南宁·阶段练习）已知 p：$-2\le x\le 10$，q：$1-m\le x\le 1+m(m>0)$，若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$0<m\le 3$　　　　B．$0\le m\le 3$

C．$m<3$　　　　D．$m\le 3$

【答案】A

【分析】将 p 是 q 的必要不充分条件转化为 $B \subsetneqq A$，然后根据集合间的包含关系列不等式求解即可.

【详解】设 $A=\{x|-2\le x\le 10\}$，$B=\{x|1-m\le x\le 1+m\}$，

因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $B \subsetneqq A$，

所以 $\begin{cases} m>0 \\ 1-m\ge -2 \\ 1+m\le 10 \end{cases}$，解得 $0<m\le 3$，

当 $m=3$ 时，$B=\{x|-2\le x\le 4\}$，成立，

所以 $0<m\le 3$.

故选：A.

3．（2023·云南昆明·模拟预测）已知集合 $A=\{x|x^2-4=0\}$，$B=\{x|ax-2=0\}$，若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，则实数 a 的所有可能取值构成的集合为（　　）

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{-1,1\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{-1\}$

【答案】A

【分析】由题意，对集合 B 分等于空集和不等于空集两种情况讨论，分别求出符合题意的 a 的值即可.

【详解】由题，$A=\{-2,2\}$，$B \subsetneqq A$，

当 $B=\varnothing$ 时，有 $a=0$，符合题意；

当 $B\ne\varnothing$ 时，有 $a\ne 0$，此时 $B=\left\{\frac{2}{a}\right\}$，所以 $\frac{2}{a}=2$ 或 $\frac{2}{a}=-2$，所以 $a=\pm 1$.

综上，实数 a 的所有可能的取值组成的集合为 $\{-1,0,1\}$.

故选：A.

4．（23-24 高上·江苏南通·开学考试）设 $p:|x-a|\le 3$，$q:2x^2+x-1\le 0$，若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{5}{2},2\right]$　　B．$\left(-\frac{5}{2},2\right)$　　C．$\left[-2,\frac{5}{2}\right]$　　D．$\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

【答案】A

【分析】根据充分必要条件和集合的包含关系求解即可.

【详解】由 $|x-a|\le 3$，解得 $a-3\le x\le a+3$，

所以 $p:a-3\le x\le a+3$，

又由 $2x^2+x-1\le 0$，解得 $-1\le x\le \frac{1}{2}$，

所以 $q:-1\le x\le \frac{1}{2}$，

因为 p 是 q 的必要不充分条件，

所以集合 $\left\{x|-1\le x\le \frac{1}{2}\right\}$ 真包含于 $\{x|a-3\le x\le a+3\}$，

所以 $\begin{cases} a-3\le -1 \\ a+3\ge \frac{1}{2} \end{cases}$，解得 $-\frac{5}{2}\le a\le 2$，

经检验，$a=-\frac{5}{2}$ 时，$p:-\frac{11}{2}\le x\le \frac{1}{2}$，满足题意；

$a=2$ 时，$p:-1\le x\le 5$，满足题意；

所以实数a的取值范围是$\left[-\frac{5}{2},2\right]$.

故选:A.

5．（22-23 高三·全国·模拟）若“$x>2$”是“$x>a$”的必要不充分条件，则 a 的取值范围是（　）

A．$\{a|a<2\}$　　B．$\{a|a\le 2\}$　　C．$\{a|a>2\}$　　D．$\{a|a\ge 2\}$

【答案】C

【解析】利用必要不充分的定义进行判断求解即可

【详解】由“$x>2$”是“$x>a$”的必要不充分条件知：$\{x|x>a\}$是$\{x|x>2\}$的真子集，可得知$a>2$

故选：C

题型六：充要条件

指 | 点 | 迷 | 津

充分条件与必要条件的应用技巧

(1)应用：可利用充分性与必要性进行相关问题的求解，特别是求参数的值或取值范围问题.

(2)求解步骤：先把p，q等价转化，利用充分条件、必要条件与集合间的包含关系，建立关于参数的不等式(组)进行求解.

1．（2024·河南信阳·模拟预测）已知复数$z=\frac{a+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R},\mathrm{i}$为虚数单位)，则“$a>0$”是“$z$在复平面内对应的点位于第四象限”的（　）条件

A．充要条件　　B．充分不必要条件　　C．必要不充分条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】A

【分析】根据复数的除法运算化简z，根据复数的几何意义，即可判断和选择.

【详解】$z=\frac{a+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{-a\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2}=3-a\mathrm{i}$，则$z$在复平面内对应的点为$(3,-a)$；

点$(3,-a)$位于第四象限的充要条件是$-a<0$，即$a>0$；

故“$a>0$”是“z在复平面内对应的点位于第四象限”的充要条件.

故选：A

2．（22-23 高三·全国·模拟）以下选项中，p 是 q 的充要条件的是（　　）

A．p：$3x+2>5$，q：$-2x-3>-5$

B．p：$a>2,b<2$，q：$a>b$

C．p：四边形的两条对角线互相垂直平分，q：四边形是正方形

D．p：$a\ne 0$，q：关于x的方程$ax=1$有唯一解

【答案】D

【分析】根据充分必要条件的定义判断即可.

【详解】对于 A，$p:3x+2>5\Rightarrow x>1$，$q:-2x-3>-5\Rightarrow x<1$，所以 p 推不出 q，q 推不出 p，

所以 p 是 q 既不充分也不必要条件；

对于 B，$p:a>2,b<2\Rightarrow q:a>b$；当$a=1,b=0$时，满足$a>b$，但 q 推不出 p，

故 p 是 q 的充分不必要条件；

对于 C，若“两条对角线互相垂直平分”成立推不出“四边形是正方形”；

反之，若“四边形是正方形”成立推出“两条对角线互相垂直平分”成立，故 p 是 q 的必要不充分条件；

对于 D，若$a\ne 0$，则关于x的方程$ax=1$有唯一解；若关于x的方程$ax=1$有唯一解，则$a\ne 0$，

所以$p\Leftrightarrow q$，故 p 是 q 的充分必要条件.

故选：D.

3．（2023 高三·全国·课后作业）关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\ne 0)$，以下命题正确的个数为（　）

（1）方程有二正根的充要条件是$\begin{cases}-\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases}$；（2）方程有二异号实根的充要条件是$\dfrac{c}{a}<0$；（3）方程两根均大于 1 的充要条件是$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\dfrac{b}{a}>2\\ \dfrac{c}{a}>1\end{cases}$.

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】B

【分析】对于（1），举反例$x^2-2x+2=0$，即可判断；对于（2）方程有二异号实根可推出$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$可推出方程有二异号实根，即可判断；对于（3），举反例$x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}=0$，即可判断.

【详解】对于（1），令$x^2-2x+2=0$满足$-\dfrac{b}{a}=2>0,\dfrac{c}{a}=2>0$，但$\Delta=4-8=-4<0$，方程无实数解，（1）错；

对于（2），必要性：Q 方程$ax^2+bx+c=0$，有一正根和一负根，$\therefore x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$.

充分性：由$\dfrac{c}{a}<0$可得$ac<0$，所以$b^2-4ac>0$及$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$，

$\therefore$方程$ax^2+bx+c=0$有一正根和一负根，（2）对；

对于（3），令$x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}=0$，两根为$x_1=\dfrac{1}{2},x_2=3$，满足$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\dfrac{b}{a}>2\\ \dfrac{c}{a}>1\end{cases}$，但不符合方程两根均大于 1，（3）错.

故选：B

4．（22-23 高三·广东·阶段练习）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_{n-1}+d$，$n\ge 2$，$n\in\mathrm{N}$，则“$a_m-a_n=2d$”是“$m-n=2$”的（　）

A．充分必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】由题意可得$\{a_n\}$为等差数列，后据此判断$a_m-a_n=2d$与$m-n=2$间关系可得答案.

【详解】设$\{a_n\}$首项为a_1，由$a_n=a_{n-1}+d$，可得$a_n-a_{n-1}=d$，

则可得$a_n=a_1+(n-1)d$.

则$a_m-a_n=a_1+(m-1)d-a_1-(n-1)d=(m-n)d=2d\Rightarrow m-n=2$

$m-n=2\Rightarrow(m-n)d=2d\Rightarrow a_1+(m-1)d-a_1-(n-1)d=a_m-a_n=2d$.故“$a_m-a_n=2d$”是“$m-n=2$”的充分必要条件.

故选：A

5．（2021 高三·全国·专题练习）设U为全集，A、B是U的子集，则“存在集合M使得$A\subseteq M,B\subseteq \complement_U M$”是“$A\cap B=\varnothing$”的（　）条件

A．必要不充分　　B．充分不必要　　C．充要　　D．既不充分也不必要

【答案】C

【分析】首先通过集合子集的概念与集合的运算确定推导关系，然后再根据充要条件的定义进行判断即可.

【详解】首先由 $A\subseteq M$， $B\subseteq \complement_U M$， 易知 $A\cap B=\varnothing$，所以充分性成立；

$\because A\cap B=\varnothing\Rightarrow B\subseteq \complement_U A$，即存在集合 $M=A$，使得 $A\subseteq M$， $B\subseteq \complement_U M$ 成立，所以必要性成立，因此“$A\subseteq M$， $B\subseteq \complement_U M$”是“$A\cap B=\varnothing$”的充要条件.故选：C.

题型七：充要条件求参型

指 | 点 | 迷 | 津

冲要条件：

命题 p 对应集合 M，命题 q 对应集合是 N，则 p 是 q 的充分条件 $\Leftrightarrow M\subseteq N$， p 是 q 的必要条件 $\Leftrightarrow M\supseteq N$， p 是 q 的充要条件 $\Leftrightarrow M=N$， p 是 q 的充分不必要条件 $\Leftrightarrow M\subsetneqq N$， p 是 q 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow M\supsetneqq N$.

1.（21-22 高二上·江苏常州·模拟）“$\exists x\in[1,2]$， $ax^2+1\le 0$”为真命题的充分必要条件是（　）

A． $a\le -1$　　B． $a\leqslant -\frac{1}{4}$　　C． $a\le -2$　　D． $a\le 0$

【答案】B

【分析】将不等式转化为 $a\le\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{\max}$ ，解得答案.

【详解】$\exists x\in[1,2]$， $ax^2+1\le 0$，即 $a\le\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{\max}=-\frac{1}{4}$，即 $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$.

故选： B.

【点睛】本题考查了充要条件，真命题，意在考查学生的计算能力和推断能力.

2.（23-24 高三·贵州黔西·模拟）关于 x 的方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等的实数根的充要条件是（　）

A． $a>2$ 或 $a<-2$　　B． $a\ge 2$ 或 $a\le -2$

C． $a<1$　　D． $a>2$

【答案】A

【分析】根据题意，结合一元二次方程的的性质，列出不等式，即可求解.

【详解】由方程关于 x 的方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等的实数根，则满足 $a^2-4>0$，

解得 $a>2$ 或 $a<-2$，即方程有两个不相等的实数根的充要条件是 $a>2$ 或 $a<-2$.

故选：A.

3.（21-22 高三·辽宁铁岭·阶段练习）设集合 $U=\{(x,y)|x\in R,y\in R\}$，若集合 $A=\{(x,y)|2x-y+m>0,m\in R\}$， $B=\{(x,y)|x+y-n\le 0,n\in R\}$，则 $(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是（　）

A． $m>-1$， $n<5$　　B． $m<-1$， $n<5$

C． $m>-1$， $n>5$　　D． $m<-1$， $n>5$

【答案】A

【分析】先根据集合的运算，求得 $A\cap(\complement_U B)=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x-y+m>0\\x+y-n>0\end{cases}\right\}$，结合 $(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$，列出不等式组，即可求解.

【详解】由题意，可得 $A\cap(\complement_U B)=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x-y+m>0\\x+y-n>0\end{cases}\right\}$，

因为 $(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$，所以 $\begin{cases}2\times 2-3+m>0\\2+3-n>0\end{cases}$，解得 $m>-1,n<5$，反之亦成立，

所以 $(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 $m>-1,n<5$.

故选：A.