襄阳四中 2021-2022 学年高一下学期 2 月考试

数学试题

一、单选题（8*5=40 分）

1. 下列各式中，值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的是（　　）

A. $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

B. $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$

C. $2\sin^2 15^\circ - 1$

D. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

【答案】D

【解析】

【分析】运用倍角公式逐项计算即可.

【详解】A.$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$，不成立；

B. $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$，不成立

C. $2\sin^2 15^\circ - 1 = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，不成立；

D. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，成立

故选：D.

2. 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，则“$\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线”是“$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用特例法结合共线向量的性质以及充分条件、必要条件的定义判断了得出结论.

【详解】解：已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线，取 $\vec{a} = -\vec{b} \neq \vec{0}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$，

另一方面，若 $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向相同，

即“$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$”$\Rightarrow$“$\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线”，

因此，“$\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线”是“$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$”的必要而不充分条件.

故选：B.

3. 下列各式化简正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$　　B. $0\cdot\overrightarrow{AB}=0$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$　　D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量加减法运算法则计算即可

【详解】对于 A，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DA}$，故错误；

对于 B，$0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$，故错误；

对于 C，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$，故错误；

对于 D，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$，故正确；

故选：D

4. 如图所示的时钟显示的时刻为$4:30$，此时时针与分针的夹角为$\alpha\left(0<\alpha\le\pi\right)$. 若一个半径为$1$的扇形的圆心角为$\alpha$，则该扇形的面积为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$　　D. $\dfrac{\pi}{16}$

【答案】C

【解析】

【分析】求出α的值，利用扇形的面积公式可求得扇形的面积.

【详解】由图可知，$\alpha=\dfrac{1}{8}\times2\pi=\dfrac{\pi}{4}$，所以该扇形的面积$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}\times1^2=\dfrac{\pi}{8}$.

故选：C.

5. 在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点．则$\overrightarrow{EB}=$（　　）

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

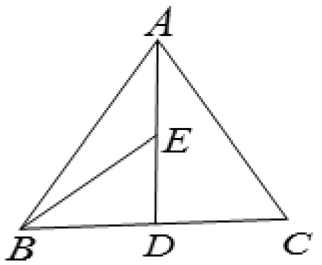
【解析】

【分析】根据平面向量的线性运算即可求解.

【详解】因为$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，

所以$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

故选：A．



6. 定义在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的函数$y=6\cos x$与$y=5\tan x$的图像交点为$P(x_0,y_0)$，则$\sin x_0$的值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用题意得到$y_0=6\cos x_0$，$y_0=5\tan x_0$，两式相除可得$\cos^2 x_0=\frac{5}{6}\sin x_0$，代入$\sin^2 x_0+\cos^2 x_0=1$即可求解

【详解】因为定义在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的函数$y=6\cos x$与$y=5\tan x$的图像交点为$P(x_0,y_0)$，

所以$y_0=6\cos x_0$，$y_0=5\tan x_0$，两式相除可得$\frac{6\cos x_0}{5\tan x_0}=\frac{6\cos^2 x_0}{5\sin x_0}=1$即$\cos^2 x_0=\frac{5}{6}\sin x_0$，

所以$\sin^2 x_0+\cos^2 x_0=\sin^2 x_0+\frac{5}{6}\sin x_0=1$，

解得$\sin x_0=\frac{2}{3}$或$-\frac{3}{2}$（舍去），

故选：C

7. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\pi\omega x-\sqrt{3}\cos\pi\omega x\left(\omega>0\right)$在$\left(0,1\right)$内恰有3个最值点和4个零点，则实数$\omega$

的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{10}{3},\frac{23}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{10}{3},\frac{13}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{17}{6},\frac{13}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{17}{6},\frac{23}{6}\right]$

【答案】A

【解析】

【分析】由第 4 个正零点小于 1，第 4 个正最值点大于等于 1 可解

【详解】$f\left(x\right)=\sin \pi\omega x-\sqrt{3}\cos \pi\omega x=2\sin\left(\pi\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $x\in\left(0,1\right)$，所以 $\pi\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$，

又因为函数 $f\left(x\right)=\sin \pi\omega x-\sqrt{3}\cos \pi\omega x\left(\omega>0\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内恰有 3 个最值点和 4 个零点，

由图像得：$3\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{2}$，解得：$\frac{10}{3}<\omega\le\frac{23}{6}$，

所以实数 ω 的取值范围是 $\left(\frac{10}{3},\frac{23}{6}\right]$.

故选：A

8. 若 $\alpha\in\left[0,\pi\right],\beta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],\lambda\in R$，满足 $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)^3-\cos\alpha-2\lambda=0$，$4\beta^3+\sin\beta\cos\beta+\lambda=0$，则 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ 的值是（　　）

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可得 -2β 和 $\alpha-\frac{\pi}{2}$ 是方程 $x^3+\sin x-2\lambda=0$ 的两个实数解．再由 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 和 2β 的范围都是 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$，方程 $x^3+\sin x-2\lambda=0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上只有一个解，可得 $\frac{\pi}{2}-\alpha=2\beta$，所以 $\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{4}$，由此求得 $\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)$ 的值．

【详解】解：$\because 4\beta^3+\sin\beta\cos\beta+\lambda=0$，

$\therefore(-2\beta)^3-2\sin\beta\cos\beta-2\lambda=0$，即 $(-2\beta)^3+\sin(-2\beta)-2\lambda=0$．

再由 $(\alpha-\frac{\pi}{2})^3-\cos\alpha-2\lambda=0$，可得 $(\alpha-\frac{\pi}{2})^3+\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})-2\lambda=0$．

故 -2β 和 $\alpha-\frac{\pi}{2}$ 是方程 $x^3+\sin x-2\lambda=0$ 的两个实数解．

再由 $\alpha\in[0,\ \pi]$，$\beta\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$，所以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 和 2β 的范围都是 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$，

因为函数 $y=x^3, y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

所以函数 $y=x^3+\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

故方程 $x^3+\sin x-2\lambda=0$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上只有一个解，

所以，$\frac{\pi}{2}-\alpha=2\beta$，所以 $\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：B．

二、多选题（4*5=20 分）

9. 下面的命题正确的有（　　）

A. 方向相反的两个非零向量一定共线

B. 单位向量都相等

C. 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，则 $\vec{a}>\vec{b}$

D. “若 A、B、C、D 是不共线的四点，且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$” $\Leftrightarrow$ “四边形 $ABCD$ 是平行四边形”

【答案】AD

【解析】

【分析】根据向量的定义和性质，逐项判断正误即可.

【详解】对于 A，由相反向量的概念可知 A 正确；

对于 B，任意两个单位向量的模相等，其方向未必相同，故 B 错误；

对于 C，向量之间不能比较大小，只能比较向量的模，故 C 错误；

对于 D，若 A、B、C、D 是不共线的四点，且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

可得 $AB//DC$，且 $AB=DC$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可知 $AB//DC$，且 $AB=DC$，

此时 A、B、C、D 是不共线的四点，且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，故 D 正确.

故选：AD.

10. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}|\cos x|$，下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$的最小正周期为2π

B. 函数$f\left(x\right)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减

C. 函数$y=f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称

D. 函数$y=f\left(x\right)$的最小值为-1

【答案】AD

【解析】

【分析】分别研究$y=\sin x$，$y=\left|\cos x\right|$的最小正周期即可判断A选项；$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，

$f(x)=\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x,\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x,\frac{\pi}{2}<x\le\frac{2}{3}\pi\end{cases}$，再分段研究即可判断B选项；取特殊值$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$判断C选项；研究函数在一个周期内的值域判断D选项.

【详解】解：对于A选项，由于函数$y=\sin x$的最小正周期为2π，$y=\left|\cos x\right|$的最小正周期为π，所以$f\left(x\right)$的最小正周期为2π，故A选项正确；

对于B选项，当$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，$f(x)=\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x,\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x,\frac{\pi}{2}<x\le\frac{2}{3}\pi\end{cases}$，且当$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，

$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，此时函数在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$单调递减；当$\frac{\pi}{2}<x\le\frac{2\pi}{3}$时，$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，此时函数在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递增，故B选项错误；

对于C选项，由于$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\left|\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right|=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ne f(-\frac{\pi}{3})$，故函数$y=f\left(x\right)$的图象不关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，故C选项错误；

对于D选项，由题知$f(x)=\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x,\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，当$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，

$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$-\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，此时函数在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-1,2]$；当$\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}$时，$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$\frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{6}$，此时函数在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上的值域为$[-1,2]$，故函数在一个周期内的值域为$[-1,2]$，进而函数的值域为$[-1,2]$，即最小值为$-1$，故D选项正确.

故选：AD

11. （多选）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，若$\overrightarrow{AB}=\lambda_1\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$，且$A$，$B$，$C$三点共线，则关于实数$\lambda_1$，$\lambda_2$的值可以是（　　）

A. 2，$\frac{1}{2}$　　B. -3，$-\frac{1}{3}$

C. 2，$-\frac{1}{2}$　　D. -3，$\frac{1}{3}$

【答案】AB

【解析】

【分析】利用平面向量共线基本定理即可求解.

【详解】因为A，B，C三点共线，

则存在实数λ，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，

即$\lambda_1\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\lambda_2\vec{b}\right)$，

即$\lambda_1\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{a}+\lambda\lambda_2\vec{b}$，

所以$\left(\lambda_1-\lambda\right)\vec{a}+\left(1-\lambda\lambda_2\right)\vec{b}=\vec{0}$，

又因为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，

所以$\begin{cases}\lambda_1-\lambda=0\\1-\lambda\lambda_2=0\end{cases}$，解得$\lambda_1\lambda_2=1$，

所以实数λ_1，λ_2的值互为倒数即可求解.

故选：AB

12. 若函数$f\left(x\right)=\cos 2x-4a\cos x-2a$的最小值为$-\frac{5}{2}$，则$a$的值可为（　　）

A. -1　　B. $-\frac{7}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】应用二倍角余弦公式可得 $f(x)=2(\cos x-a)^2-2a^2-2a-1$，结合余弦函数、二次函数的性质及已知最小值，讨论 a 与区间 $[-1,1]$ 的位置关系，求 a 的值.

【详解】由题设，$f(x)=2\cos^2 x-4a\cos x-2a-1=2(\cos x-a)^2-2a^2-2a-1$，

令 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $f(x)=g(t)=2(t-a)^2-2a^2-2a-1$，其开口向上且对称轴为 $t=a$，

当 $a<-1$ 时，$f(x)_{\min}=g(-1)=2a+1=-\frac{5}{2}$，则 $a=-\frac{7}{4}$；

当 $-1\le a\le 1$ 时，$f(x)_{\min}=g(a)=-2a^2-2a-1=-\frac{5}{2}$，则 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$(舍)；

当 $a>1$ 时，$f(x)_{\min}=g(1)=1-6a=-\frac{5}{2}$，则 $a=\frac{7}{12}$ 不合前提；

综上，$a=-\frac{7}{4}$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

故选：BC

三、填空题（4*5=20 分）

13. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=8$，$|\overrightarrow{AC}|=12$，则 $|\overrightarrow{BC}|$ 的取值范围是______.

【答案】$[4,20]$

【解析】

【分析】由于 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$，再利用三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，当三点共线时取等号，可得答案.

【详解】由已知 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$，

又 $\left||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|\right|\le|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|\le|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|$

$\therefore 4\le|\overrightarrow{BC}|\le 20$

当 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ 反向，$|\overrightarrow{BC}|$ 取到最大值，当 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ 同向，$|\overrightarrow{BC}|$ 取到最小值

故答案为：$[4,20]$.

14. 当函数 $y=2\cos\alpha-3\sin\alpha$ 取得最大值时，$\tan\alpha=$_________.

【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】利用辅助角θ将函数利用两角差的正弦公式进行化简，求得函数取得最大值时的θ与α的关系，从而求得$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，可得结果.

【详解】因为函数 $y=2\cos\alpha-3\sin\alpha=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}cos\alpha-\frac{3}{\sqrt{13}}sin\alpha\right)=\sqrt{13}\sin\left(\theta-\alpha\right)$，其中

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$，当$\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$时，函数$y=2\cos\alpha-3\sin\alpha$取得最大值，此时$\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}$，$\therefore$

$\sin\alpha=\sin\theta-\frac{\pi}{2}=-\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\cos\theta-\frac{\pi}{2}=\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$，

$\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{2}$

故答案为$-\frac{3}{2}$

【点睛】本题考查了两角差的正弦公式的逆用，着重考查辅助角公式的应用与正弦函数的性质，属于中档题.

15. $\triangle ABC$中，D为AC上的一点，满足$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$．若$P$为$BD$上的一点，满足$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $(m>0,n>0)$，$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为______.

【答案】16

【解析】

【分析】利用向量共线的推论可得$m+4n=1$，再由$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)$，利用基本不等式即可求解.

【详解】由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+4n\overrightarrow{AD}(m>0,n>0)$，

又因为B,P,D三点共线，所以$m+4n=1$，

所以$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+4n)=8+\frac{16n}{m}+\frac{m}{n}\geq 8+2\sqrt{\frac{16n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=8+2\times4=16$，

当且仅当$\begin{cases}\frac{16n}{m}=\frac{m}{n}\\ m+4n=1\end{cases}$即$\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\ n=\frac{1}{8}\end{cases}$时等号成立，

所以 $\frac{4}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为16，

故答案为：16．

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)\\ -\frac{6\sqrt{3}}{\pi}x+3\sqrt{3}, x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在区间 D 上的最大值存在，记该最大值为 $K\{D\}$，则满足等式 $K\{[0,a)\}=3\cdot K\{[a,2a]\}$ 的实数 a 的取值集合是__________.

【答案】$\left\{\frac{4\pi}{9},\frac{7\pi}{12}\right\}$

【解析】

【分析】先确定 $f(x)$ 在区间 $[0,a)$ 上有最大值 $\sqrt{3}$，且 $a\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，因此 $f(x)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 然后按 $f(x)$ 在 $x=a$ 处或 $x=2a$ 处取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 分类讨论，数形结合，进而可得结果.

【详解】依题意可知，$f(x)$ 在区间 $[0,a)$ 上有最大值必然为 $\sqrt{3}$，且 $a\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $-\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\cdot a+3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=\frac{4\pi}{9}$，此时 $2a=\frac{8\pi}{9}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $a=\frac{4\pi}{9}$ 适合题意；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=2a$ 处取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\tan 2a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=\frac{7\pi}{12}$，此时 $a>\frac{4\pi}{9}$，所以 $a=\frac{7\pi}{12}$ 适合题意.

综上可知，a 的取值集合是 $\left\{\frac{4\pi}{9},\frac{7\pi}{12}\right\}$.

故答案为：$\left\{\frac{4\pi}{9},\frac{7\pi}{12}\right\}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/357121164063010011