

离散型随机变量及其分布

续本达

复习

设 A, B 是两个随机事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S 。 A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立, 则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

设 A, B 是两个随机事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S 。 A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立, 则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

设 A, B 是两个随机事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S 。 A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立, 则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

随机变量的定义

问题

在概率的研究中为什么需要引入随机变量？

- 为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要将随机试验的结果量化，从而引入随机变量来描述试验的不同结果。
- 试验的结果可以用一个数 x 来表示， x 随着试验的结果不同而变化，也即它是样本点的一个函数，这种量称为随机变量。
- 例如，电脑的寿命可用一个连续变量 T 表示。；抽取一次彩票可能出现中奖和谢谢惠顾两种结果，可以用离散变量来描述

问题

在概率的研究中为什么需要引入随机变量？

- 为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要将随机试验的结果量化，从而引入随机变量来描述试验的不同结果。
- 试验的结果可以用一个数 x 来表示， x 随着试验的结果不同而变化，也即它是样本点的一个函数，这种量称为**随机变量**。
- 例如，电脑的寿命可用一个连续变量 T 表示。；抽取一次彩票可能出现中奖和谢谢惠顾两种结果，可以用离散变量来描述

定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$.

$X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X = X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
 - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$.

$X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X = X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
 - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$.

$X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X = X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
 - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

- 随机变量 $\left\{ \begin{array}{l} \text{离散型} \\ \text{非离散型: } \left\{ \begin{array}{l} \text{连续型} \\ \text{其他} \end{array} \right. \end{array} \right.$
- 离散随机变量：随机变量 X 的可能取值为有限个或可列个。
- 连续随机变量的例子：随机变量 X 的可能取值充满实数轴上一个连续的区间 (a, b) 。其中 a 可以为 $-\infty$, b 可以为 $+\infty$ 。

思路

- 随机变量是将样本空间 S 的样本点映射为单值实数的函数。
 $\Rightarrow$ 样本点可以用实数表示了。
- 概率事件域 $\mathcal{F}$ 到实数的映射。
 $\Rightarrow$ 随机事件发生可能性的大小可以用概率量化了。

- 随机变量
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{离散型} \\ \text{非离散型: } \left\{ \begin{array}{l} \text{连续型} \\ \text{其他} \end{array} \right. \end{array} \right.$
- 离散随机变量**：随机变量 X 的可能取值为**有限个或可列个**。
- 连续随机变量的例子**：随机变量 X 的可能取值充满实数轴上一个**连续的区间** (a, b) 。其中 a 可以为 $-\infty$, b 可以为 $+\infty$ 。

思路

- 随机变量是将样本空间 S 的样本点映射为单值实数的函数。
 $\Rightarrow$ 样本点可以用实数表示了。
- 概率事件域 $\mathcal{F}$ 到实数的映射。
 $\Rightarrow$ 随机事件发生可能性的大小可以用概率量化了。

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数, 定义域为 S , 值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。
- 若 X 为随机变量, 随机事件可表示为实数轴上的点集, 例如: $\{X = k\}, \{a < X \leq b\}, \dots$, 即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}\{X = k\} &= \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\ \{X > b\} &= S - \{X \leq b\}, \\ \{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量; 随机变量的函数一般也是随机变量。

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数, 定义域为 S , 值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。
- 若 X 为随机变量, 随机事件可表示为实数轴上的点集, 例如: $\{X = k\}, \{a < X \leq b\}, \dots$, 即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}\{X = k\} &= \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\ \{X > b\} &= S - \{X \leq b\}, \\ \{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量; 随机变量的函数一般也是随机变量。

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数, 定义域为 S , 值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。
- 若 X 为随机变量, 随机事件可表示为实数轴上的点集, 例如: $\{X = k\}, \{a < X \leq b\}, \dots$, 即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned} \{X = k\} &= \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\ \{X > b\} &= S - \{X \leq b\}, \\ \{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\}. \end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量; 随机变量的函数一般也是随机变量。

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数, 定义域为 S , 值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。
- 若 X 为随机变量, 随机事件可表示为实数轴上的点集, 例如: $\{X = k\}, \{a < X \leq b\}, \dots$, 即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}\{X = k\} &= \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\ \{X > b\} &= S - \{X \leq b\}, \\ \{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量; 随机变量的函数一般也是随机变量。

随机变量：在值域上随机取值，不同值出现的概率不同。

问题

随机变量不同取值的概率如何定义？

- 对离散随机变量，假定样本空间为 $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ ，且概率函数为 P ，随机变量 X 的值域为 $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ 。定义 $\mathcal{X}$ 上的概率函数 P_X 为：

$$P_X\{X = x_i\} = P(\{e_j \in S | X(e_j) = x_i\}).$$

- 对于连续随机变量， P_X 定义为：对任意 $R \subset \mathcal{X}$ ，

$$P_X\{X \in R\} = P(\{e \in S | X(e) \in R\})$$

- 可以证明 P_X 满足柯氏三公理， P_X 经常简写为 P 。

随机变量：在值域上随机取值，不同值出现的概率不同。

问题

随机变量不同取值的概率如何定义？

- 对离散随机变量，假定样本空间为 $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ ，且概率函数为 P ，随机变量 X 的值域为 $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ 。定义 $\mathcal{X}$ 上的概率函数 P_X 为：

$$P_X\{X = x_i\} = P(\{e_j \in S | X(e_j) = x_i\}).$$

- 对于连续随机变量， P_X 定义为：对任意 $R \subset \mathcal{X}$ ，

$$P_X\{X \in R\} = P(\{e \in S | X(e) \in R\})$$

- 可以证明 P_X 满足柯氏三公理， P_X 经常简写为 P 。

例子

将一枚硬币抛掷 3 次，我们感兴趣的是三次投掷中，出现 H 的总次数，而对 H, T 出现的次序不关心。以 X 记三次投掷中出现 H 的总次数，那么对于样本空间 $S = \{e\}$ 中的每一个样本点 e ， X 都有一个值与之对应，即有

样本点	HHH	HHT	HTH	THH
X 的值	3	2	2	2
样本点	HTT	THT	TTH	TTT
X 的值	1	1	1	0

- 随机变量的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率。
- 当且仅当事件 $A = \{HHT, HTH, THH\}$ 发生时有 $\{X = 2\}$ ，而且 $P(A) = \frac{3}{8}$ ，则 $P\{X = 2\} = \frac{3}{8}$ 。

离散型随机变量及其分布律

定义

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k ($k = 1, 2, \dots$), X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$$

则称上式为**离散型随机变量 X 的分布律**。也称为分布列或概率分布列。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

- 离散型随机变量 X 的可能取值是有限个或可列无限多个。
- 描述离散型随机变量 X 的概率特性常用分布律，也称分布列，概率分布列。
- $p_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \dots)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

- 离散型随机变量 X 的可能取值是有限个或可列无限多个。
- 描述离散型随机变量 X 的概率特性常用分布律，也称分布列，概率分布列。
- $p_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \dots)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

例

设汽车在开往甲地途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯盏数，求 X 的概率分布与 $p = 0.4$ 时的分布律。

X	0	1	2	3	4
P_k	$1 - p$	$(1 - p)p$	$(1 - p)p^2$	$(1 - p)p^3$	p^4

或 $P\{X = k\} = p^k(1 - p)^{\min\{1, 4-k\}}$.

将 $p = 0.4$ 代入，得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.0256

例

设汽车在开往甲地途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯盏数，求 X 的概率分布与 $p = 0.4$ 时的分布律。

X	0	1	2	3	4
P_k	$1 - p$	$(1 - p)p$	$(1 - p)p^2$	$(1 - p)p^3$	p^4

或 $P\{X = k\} = p^k(1 - p)^{\min\{1, 4-k\}}$.

将 $p = 0.4$ 代入，得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.0256

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/358017026142007021>