

考点 09 二分法与求方程近似解 (5 种题型与基础、易错专练)



一、2022 真题抢先刷, 考向提前知

一. 选择题 (共 1 小题)

1. (2020·天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点,

则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

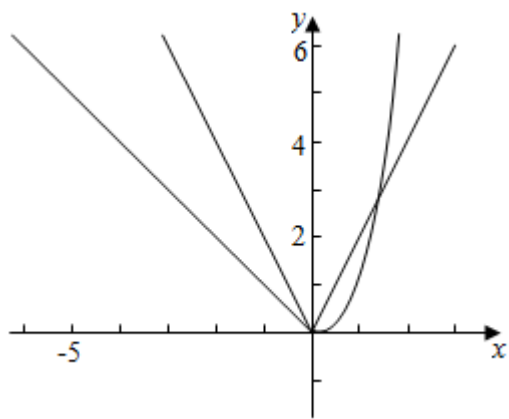
【分析】 问题转化为 $f(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个根, $\Rightarrow y=f(x)$ 与 $y=h(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个交点, 再分三种情况当 $k=0$ 时, 当 $k<0$ 时, 当 $k>0$ 时, 讨论两个函数是否能有 4 个交点, 进而得出 k 的取值范围.

【解答】 解: 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点,

则 $f(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个根,

即 $y=f(x)$ 与 $y=h(x) = |kx^2 - 2x|$ 有四个交点,

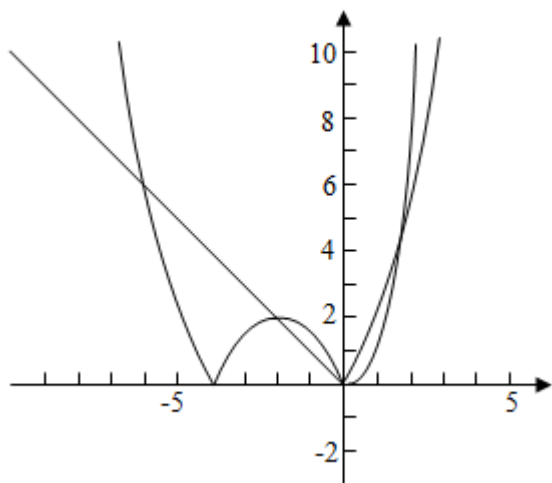
当 $k=0$ 时, $y=f(x)$ 与 $y=|-2x|=2|x|$ 图象如下:



两图象只有两个交点, 不符合题意,

当 $k<0$ 时, $y=|kx^2 - 2x|$ 与 x 轴交于两点 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{k}$ ($x_2<x_1$)

图象如图所示,



当 $x = \frac{1}{k}$ 时, 函数 $y = |kx^2 - 2x|$ 的函数值为 $-\frac{1}{k}$,

当 $x = \frac{1}{k}$ 时, 函数 $y = -x$ 的函数值为 $-\frac{1}{k}$,

所以两图象有 4 个交点, 符合题意,

当 $k > 0$ 时,

$y = |kx^2 - 2x|$ 与 x 轴交于两点 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{k}$ ($x_2 > x_1$)

在 $[0, \frac{2}{k})$ 内两函数图象有两个交点, 所以若有四个交点,

只需 $y = x^3$ 与 $y = kx^2 - 2x$ 在 $(\frac{2}{k}, +\infty)$ 还有两个交点, 即可,

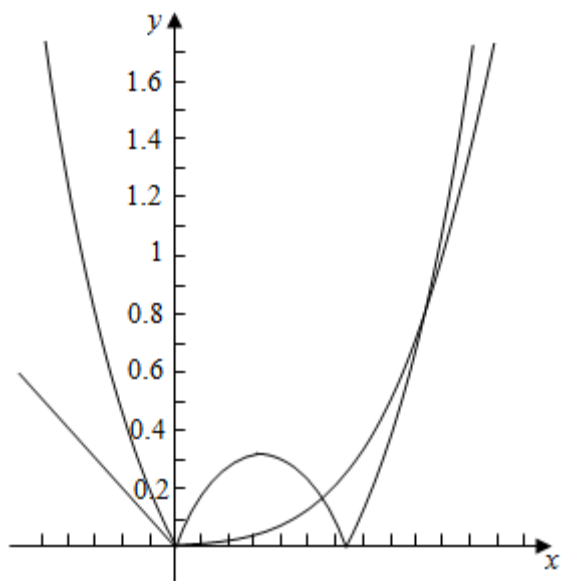
即 $x^3 = kx^2 - 2x$ 在 $(\frac{2}{k}, +\infty)$ 还有两个根,

即 $k = x + \frac{2}{x}$ 在 $(\frac{2}{k}, +\infty)$ 还有两个根,

函数 $y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$, (当且仅当 $x = \frac{2}{x}$, 即 $x = \sqrt{2}$ 时, 取等号),

所以 $0 < \frac{2}{k} < \sqrt{2}$, 且 $k > 2\sqrt{2}$,

所以 $k > 2\sqrt{2}$,



综上所述, k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$.

故选: D.

【点评】 本题考查函数的零点, 参数的取值范围, 关键利用分类讨论思想, 分析函数的交点, 属于中档题.

二. 填空题 (共 2 小题)

2. (2020•上海) 设 $a \in \mathbf{R}$, 若存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件:

(1) 对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2 ;

(2) 关于 x 的方程 $f(x) = a$ 无实数解,

则 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

【分析】 根据条件 (1) 可知 $x_0 = 0$ 或 1, 进而结合条件 (2) 可得 a 的范围

【解答】 解: 根据条件 (1) 可得 $f(0) = 0$ 或 $f(1) = 1$,

又因为关于 x 的方程 $f(x) = a$ 无实数解, 所以 $a \neq 0$ 或 1,

故 $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$,

故答案为: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

【点评】 本题考查函数零点与方程根的关系, 属于基础题.

3. (2022•天津) 设 $a \in \mathbf{R}$, 对任意实数 x , 记 $f(x) = \min\{|x| - 2, x^2 - ax + 3a - 5\}$. 若 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围为 $[10, +\infty)$.

【分析】 设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 分析可知函数 $g(x)$ 至少有一个零点, 可得出 $\Delta \geq 0$, 求出 a 的取值范围, 然后对实数 a 的取值范围进行分类讨论, 根据题意可得出关于实数 a 的不等式, 综合可求得实数 a 的取值范围.

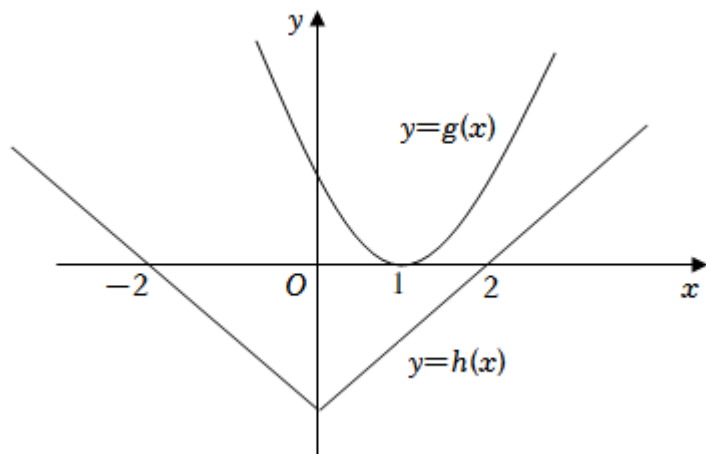
【解答】解：设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 由 $|x| - 2 = 0$ 可得 $x = \pm 2$.

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则函数 $g(x)$ 至少有一个零点,

则 $\Delta = a^2 - 4(3a - 5) \geq 0$,

解得 $a \leq 2$ 或 $a \geq 10$.

①当 $a = 2$ 时, $g(x) = x^2 - 2x + 1$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如图所示:



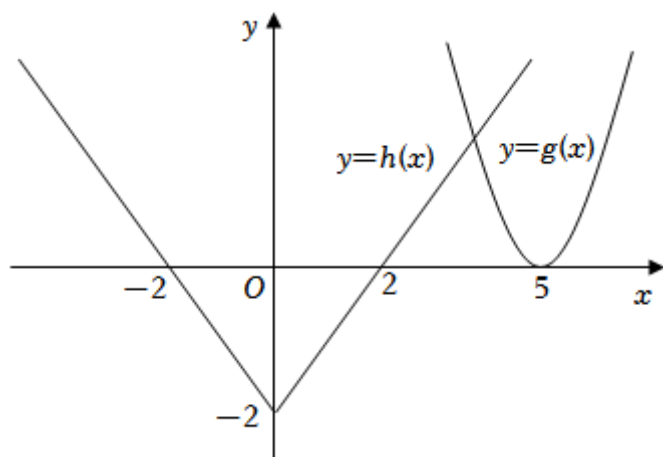
此时函数 $f(x)$ 只有两个零点, 不满足题意;

②当 $a < 2$ 时, 设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_1 、 x_2 ($x_1 < x_2$),

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则 $x_2 \leq -2$,

所以, $\begin{cases} \frac{a}{2} < -2 \\ g(-2) = 5a - 1 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $a \in \emptyset$;

③当 $a = 10$ 时, $g(x) = x^2 - 10x + 25$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如图所示:



由图可知, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 3, 满足题意;

④当 $a > 10$ 时, 设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_3 、 x_4 ($x_3 < x_4$),

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则 $x_3 \geq 2$,

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{a}{2} > 2 \\ g(2) = a - 1 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } a > 4, \text{此时 } a > 10.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[10, +\infty)$.

故答案为: $[10, +\infty)$.

【点评】 本题考查了函数的零点、转化思想、分类讨论思想及数形结合思想, 属于中难题.

三. 解答题 (共 2 小题)

4. (2022·上海) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 现有两种对 $f(x)$ 变换的操作: φ 变换: $f(x) \rightarrow f(x-t)$; ω 变换: $|f(x+t) - f(x)|$, 其中 t 为大于 0 的常数.

(1) 设 $f(x) = 2^x$, $t=1$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 做 φ 变换后的结果, 解方程: $g(x) = 2$;

(2) 设 $f(x) = x^2$, $h(x)$ 为 $f(x)$ 做 ω 变换后的结果, 解不等式: $f(x) \geq h(x)$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(x)$ 先做 φ 变换后得到 $u(x)$, $u(x)$ 再做 ω 变换后得到 $h_1(x)$; $f(x)$ 先做 ω 变换后得到 $v(x)$, $v(x)$ 再做 φ 变换后得到 $h_2(x)$. 若 $h_1(x) = h_2(x)$ 恒成立, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

【分析】 (1) 推导出 $g(x) = f(x) - f(x-1) = 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1} = 2$, 由此能求出 x .

(2) 推导出 $x^2 \geq |(x+t)^2 - x^2| = |2tx + t^2|$, 当 $x \leq -\frac{t}{2}$ 时, $f(x) \geq h(x)$ 恒成立; 当 $x > -\frac{t}{2}$ 时, $2tx + t^2 \leq x^2$, 由此能求出 $f(x) \geq h(x)$ 的解集.

(3) 先求出 $u(x) = f(x) - f(x-t)$, 从而 $h_1(x) = |f(x+t) - f(x) - [f(x) - f(x-t)]|$, 先求出 $v(x) = |f(x+t) - f(x)|$, 从而 $h_2(x) = |f(x+t) - f(x)| - |f(x) - f(x-t)|$, 由 $h_1(x) = h_2(x)$, 得 $|f(x+t) - f(x) - [f(x) - f(x-t)]| = |f(x+t) - f(x)| - |f(x) - f(x-t)|$, 再由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 能证明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = 2^x$, $t=1$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 做 φ 变换后的结果, $g(x) = 2$,

$$\therefore g(x) = f(x) - f(x-1) = 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1} = 2,$$

解得 $x=2$.

(2) $\because f(x) = x^2$, $h(x)$ 为 $f(x)$ 做 ω 变换后的结果, $f(x) \geq h(x)$,

$$\therefore x^2 \geq |(x+t)^2 - x^2| = |2tx + t^2|,$$

当 $x \leq -\frac{t}{2}$ 时, $f(x) \geq h(x)$ 恒成立;

当 $x > -\frac{t}{2}$ 时, $2tx + t^2 \leq x^2$,

解得 $x \geq (1+\sqrt{2})t$, 或 $x \leq (1-\sqrt{2})t$,

综上, 不等式: $f(x) \geq h(x)$ 的解集为 $(-\infty, (1-\sqrt{2})t] \cup [(1+\sqrt{2})t, +\infty)$.

(3) 证明: $f(x)$ 先做 φ 变换后得到 $u(x)$, $u(x)$ 再做 ω 变换后得到 $h_1(x)$,

$$\therefore u(x) = f(x) - f(x-t), h_1(x) = |f(x+t) - f(x) - [f(x) - f(x-t)]|,$$

$f(x)$ 先做 ω 变换后得到 $v(x)$, $v(x)$ 再做 φ 变换后得到 $h_2(x)$,

$$\therefore v(x) = |f(x+t) - f(x)|, h_2(x) = |f(x+t) - f(x)| - |f(x) - f(x-t)|,$$

$\because h_1(x) = h_2(x)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

$$\therefore |f(x+t) - f(x) - [f(x) - f(x-t)]| = |f(x+t) - f(x)| - |f(x) - f(x-t)|,$$

$$\therefore \begin{cases} f(x+t) - f(x) > f(x) - f(x-t) \\ f(x+t) - f(x) > 0 \\ f(x) > f(x-t) \end{cases} \quad \text{对 } t > 0 \text{ 恒成立,}$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

【点评】 本题考查方程、不等式的解的求法, 考查函数是增函数的证明, 考查函数变换的性质、抽象函数性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是中档题.

5. (2022·乙卷) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

【分析】 (1) 将 $a=1$ 代入, 对函数 $f(x)$ 求导, 求出 $f'(0)$ 及 $f(0)$, 由点斜式得答案;

(2) 对函数 $f(x)$ 求导, 分 $a \geq 0$ 及 $a < 0$ 讨论, 当 $a \geq 0$ 时容易判断不合题意, 当 $a < 0$ 时, 设 $g(x) = e^x + a(1-x^2)$, 利用导数判断 $g(x)$ 的性质, 进而判断得到函数 $f(x)$ 的单调性并结合零点存在性定理即可得解.

【解答】 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln(1+x) + xe^{-x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} + e^{-x} - xe^{-x}$,

$$\therefore f'(0) = 1+1=2,$$

$$\text{又 } f(0) = 0,$$

$\therefore$ 所求切线方程为 $y=2x$;

$$(2) f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{a(1-x)}{e^x} = \frac{e^x + a(1-x^2)}{e^x(1+x)},$$

若 $a \geq 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x) < f(0) = 0$, 不合题意;

$$\text{设 } g(x) = e^x + a(1-x^2), g'(x) = e^x - 2ax,$$

当 $-1 \leq a < 0$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上, $g(x) > e^0 + a \geq 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$

) 单调递增, 无零点, 不合题意;

当 $a < -1$ 时, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(0) = 1+a < 0$, $g(1) = e > 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x_0) < f(0) = 0$,

先证当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{2} > \ln x$,

设 $h(x) = \frac{x}{2} - \ln x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$,

易知当 $0 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单减, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单增,

所以 $h(x) \geq h(2) = \frac{2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2 > 0$, 则当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{2} > \ln x$,

所以 $x > 2 \ln x$, $e^x > x^2$, $\frac{x}{e^x} < \frac{1}{x}$,

再证 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$,

设 $m(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$, 则 $m'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

易知当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单减, 当 $x > 1$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单增,

所以 $m(x) \geq m(1) = 0$, 即 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$,

则由 $a < -1$, 可得 $ax e^{-x} > \frac{a}{x}$,

则当 $x > 1+a^2$ 时, $f(x) = \ln(1+x) + ax e^{-x} > \ln(1+x) + \frac{a}{x} > 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有一个零点,

当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $g'(-1) = \frac{1}{e} + 2a < 0$, $g'(0) = 1 > 0$,

故存在唯一的 $x_1 \in (-1, 0)$, 使得 $g'(x_1) = 0$, 且 $g(x)$ 在 $(-1, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, 0)$ 上单调递增,

$g(x_1) < g(0) = 1+a < 0$, $g(-1) = \frac{1}{e} > 0$,

故存在唯一的 $x_2 \in (-1, x_1)$, 使得 $g(x_2) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, x_2)$ 上单调递增, 在 $(x_2, 0)$ 上单调递减,

$x \rightarrow -1$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(0) = 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上恰有一个零点,

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$.

【点评】本题考查导数的几何意义，考查利用导数研究函数的单调性，零点问题，考查分类讨论思想及运算求解能力，属于难题.



二、考点清单

一. 函数的零点

一般地，对于函数 $y=f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)，我们把方程 $f(x)=0$ 的实数根 x 叫作函数 $y=f(x)$ ($x \in D$) 的零点. 即函数的零点就是使函数值为 0 的自变量的值. 函数的零点不是一个点，而是一个实数.

【解法——二分法】

- ①确定区间 $[a, b]$ ，验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，给定精确度； ②求区间 (a, b) 的中点 x_1 ； ③计算 $f(x_1)$ ；
④若 $f(x_1)=0$ ，则 x_1 就是函数的零点； ⑤若 $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ ，则令 $b=x_1$ (此时零点 $x_0 \in (a, x_1)$)； ⑥若 $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ ，则令 $a=x_1$. (此时零点 $x_0 \in (x_1, b)$) ⑦判断是否满足条件，否则重复 (2) ~ (4)

【总结】

零点其实并没有多高深，简单的说，就是某个函数的零点其实就是这个函数与 x 轴的交点的横坐标，另外如果在 (a, b) 连续的函数满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则 (a, b) 至少有一个零点. 这个考点属于了解性的，知道它的概念就行了.

二. 函数零点的判定定理

1、函数零点存在性定理：

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c)=0$ ，这个 c 也就是 $f(x)=0$ 的根.

特别提醒：

- (1) 根据该定理，能确定 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点，但零点不一定唯一.
(2) 并不是所有的零点都可以用该定理来确定，也可以说不满足该定理的条件，并不能说明函数在 (a, b) 上没有零点，例如，函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 有 $f(0) \cdot f(3) > 0$ ，但函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上有两个零点.
(3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的，且是单调函数， $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有唯一的零点.

2、函数零点个数的判断方法：

- (1) 几何法：对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数 $y=f(x)$ 的图象

联系起来，并利用函数的性质找出零点.

特别提醒：

① “方程的根”与“函数的零点”尽管有密切联系，但不能混为一谈，如方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $[0, 2]$ 上有两个等根，而函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 在 $[0, 2]$ 上只有一个零点；

② 函数的零点是实数而不是数轴上的点.

(2) 代数法：求方程 $f(x) = 0$ 的实数根.

三. 函数的零点与方程根的关系

函数的零点表示的是函数与 x 轴的交点，方程的根表示的是方程的解，他们的含义是不一样的. 但是，他们的解法其实质是一样的.

【解法】

求方程的根就是解方程，把所有的解求出来，一般要求的是二次函数或者方程组，这里不多讲了. 我们重点来探讨一下函数零点的求法（配方法）.

例题：求函数 $f(x) = x^4 + 5x^3 - 27x^2 - 101x - 70$ 的零点.

解：∵ $f(x) = x^4 + 5x^3 - 27x^2 - 101x - 70$

$= (x - 5) \cdot (x + 7) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$

∴ 函数 $f(x) = x^4 + 5x^3 - 27x^2 - 101x - 70$ 的零点是：5、-7、-2、-1.

通过这个题，我们发现求函数的零点常用的方法就是配方法，把他配成若干个一次函数的乘积或者是二次函数的乘积，最后把它转化为求基本函数的零点或者说求基本函数等于 0 时的解即可.

【考查趋势】

考的比较少，了解相关的概念和基本的求法即可.

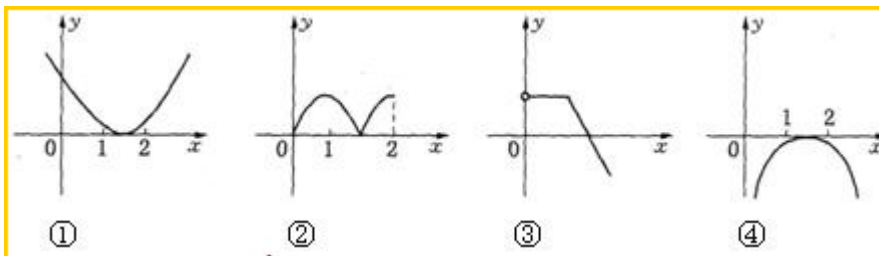
四. 二分法的定义与应用

二分法 即一分为二的方法. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，我们假设 $f(a) < 0, f(b) > 0$ ，那么当 $x_1 = \frac{a+b}{2}$ 时，若 $f(x_1) = 0$ ，这说 x_1 为零点；若不为 0，假设大于 0，那么继续在 $[x_1, b]$ 区间取中点验证它的函数值为 0，一直重复下去，直到找到满足要求的点为止. 这就是二分法的基本概念.

【二分法的应用】

我们以具体的例子来说说二分法应用的一个基本条件：

例题：下列函数图象均与 x 轴有交点，其中能用二分法求函数零点的是



解：能用二分法求函数零点的函数，在零点的左右两侧的函数值符号相反，

有图象可得，只有③能满足此条件，

故答案为 ③.

在这个例题当中，所要求的能力其实就是对概念的理解，这也是二分法它惯用的考查形式，通过这个例题，希望同学们能清楚二分法的概念和常考题型。

【二分法求方程的近似解】

二分法在高中主要属于了解性的内容，拿二分法求近似解思路也比较固定，这里我们主要以例题来做讲解。

例：用二分法求方程 $\ln x = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上的近似解，取中点 $c = 1.5$ ，则下一个有根区间是 $[1.5, 2]$ 。

解：令函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ ，由于 $f(1.5) = \ln(1.5) - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}(\ln 1.5^2 - 2) < \frac{1}{3}(\ln e^2 - 2) = 0$ ，

即 $f(1.5) < 0$ ，

而 $f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{e} = \ln \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{e} > \frac{1}{2} \ln 1 = 0$ ，即 $f(2) > 0$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $[1.5, 2]$ 上存在零点，故方程 $\ln x = \frac{1}{x}$ 在 $[1.5, 2]$ 上有根，

故答案为 $[1.5, 2]$ 。

通过这个例题，我们可以发现二分法的步奏，第一先确定 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的 a, b 点；第二，寻找区间 (a, b) 的中点，并判断它的函数值是否为 0；第三，若不为 0，转第一步。

五. 函数与方程的综合运用

函数思想，是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。方程思想，是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型（方程、不等式、或方程与不等式的混合组），然后通过解方程（组）或不等式（组）来使问题获解。有时，还实现函数与方程的互相转化、接轨，达到解决问题的目的。笛卡尔的方程思想是：实际问题 → 数学问题 → 代数问题 → 方程问题。宇宙世界，充斥着等式和不等式。



三、题型方法

一. 函数的零点 (共 4 小题)

1. (2023·乌鲁木齐三模) 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 则方程 $x^2 \operatorname{sgn} x = 5x - 6$ 的解是 ()

A. 2 或 -6 B. 3 或 -6 C. 2 或 3 D. 2 或 3 或 -6

【分析】根据符号函数的意义, 分段解方程作答.

【解答】解: 依题意, 当 $x > 0$ 时, 方程 $x^2 \operatorname{sgn} x = 5x - 6$ 为: $x^2 = 5x - 6$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 因此 $x = 2$ 或 $x = 3$,

当 $x = 0$ 时, 方程 $x^2 \operatorname{sgn} x = 5x - 6$ 为: $0 = 5x - 6$, 解得 $x = \frac{6}{5}$, 于是无解,

当 $x < 0$ 时, 方程 $x^2 \operatorname{sgn} x = 5x - 6$ 为: $-x^2 = 5x - 6$, 解得 $x = -6$ 或 $x = 1$, 因此 $x = -6$,

所以方程 $x^2 \operatorname{sgn} x = 5x - 6$ 的解是 $x = 2$ 或 $x = 3$ 或 $x = -6$.

故选: D.

【点评】本题主要考查了分段函数的应用, 属于基础题.

2. (2023·北京模拟) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2-4, & x > 0 \end{cases}$ 的零点为 -1, 2.

【分析】利用方程的根求解函数的零点即可.

【解答】解: 当 $x \leq 0$ 时, $x+1=0$, 解得 $x = -1$;

$x > 0$ 时, $x^2 - 4 = 0$, 解得 $x = 2$,

函数的零点为: -1, 2.

故答案为: -1, 2.

【点评】本题考查函数的零点的求法, 是基础题.

3. (2023·毕节市模拟) 给出下列命题:

- ① 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 恰有两个零点;
 ② 若函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 4, 则 $a = 4$;
 ③ 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(1-x) = 4$, 则 $f(\frac{1}{10}) + f(\frac{2}{10}) + \cdots + f(\frac{9}{10}) = 18$;
 ④ 若关于 x 的方程 $2^{|x|} - m = 0$ 有解, 则实数 m 的取值范围是 $(0, 1]$.

其中正确的是 ()

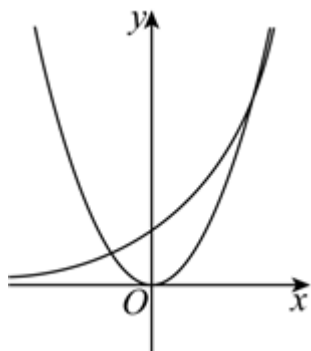
A. ①③ B. ②④ C. ③④ D. ②③

【分析】根据函数的基本性质，逐一分析选项，即可得出答案.

【解答】解：对于①：当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2^x - x^2$ 有 2 个零点，2 和 4，

作出 $y = x^2$ 和 $y = 2^x$ 的图像，当 $x < 0$ 时，函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 有 1 个零点，

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 有 3 个零点，



故①错误；

对于②： $f(x) = x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ ， ($a > 0$)，即 $2\sqrt{a} = 4$ ，则 $a = 4$ ，故②正确；

对于③： $f(\frac{1}{10}) + f(\frac{2}{10}) + \dots + f(\frac{9}{10}) = 18$ ①， $f(\frac{9}{10}) + f(\frac{8}{10}) + \dots + f(\frac{1}{10}) = 18$ ②，

$\because f(x) + f(1-x) = 4$ ，

$\therefore f(\frac{1}{10}) + f(\frac{9}{10}) = 4$ ， $f(\frac{2}{10}) + f(\frac{8}{10}) = 4$ ， $\dots$ ， $f(\frac{5}{10}) + f(\frac{5}{10}) = 4$ ，

$\therefore$ ①+② $= 4 \times 9 = 36$ ，

$\therefore f(\frac{1}{10}) + f(\frac{2}{10}) + \dots + f(\frac{9}{10}) = 18$ ，故③正确；

对于④：若关于 x 的方程 $2^{|x|} - m = 0$ 有解，则 $m = 2^{|x|}$ ，

$\because |x| \geq 0$ ， $\therefore m \geq 1$ ，故④错误，

故选：D.

【点评】本题考查命题的真假判断和函数的基本性质，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题.

4. (2023·汉中模拟) 设 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = x - a^{-x}$ 和 $g(x) = x \log_a x - 1$ 的零点 (其中 $a > 1$)，则 $x_1 + 4x_2$ 的取值范围是 ()

A. $[4, +\infty)$ B. $(4, +\infty)$ C. $[5, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$

【分析】函数的零点即方程的解，将其转化为图象交点问题，又由函数图象特点，得到交点的对称问题，从而求解

【解答】解：由设 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = x - a^{-x}$ 和 $g(x) = x \log_a x - 1$ 的零点 (其中 $a > 1$)，

可知 x_1 是方程 $a^x = \frac{1}{x}$ 的解; x_2 是方程 $\frac{1}{x} = \log_a x$ 的解;

则 x_1, x_2 分别为函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象与函数 $y = a^x$ 和函数 $y = \log_a x$ 的图象交点的横坐标;

设交点分别为 $A(x_1, \frac{1}{x_1})$, $B(x_2, \frac{1}{x_2})$

由 $a > 1$, 知 $0 < x_1 < 1$; $x_2 > 1$;

又因为 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 以及 $y = \frac{1}{x}$ 的图象均关于直线 $y = x$ 对称,

所以两交点一定关于 $y = x$ 对称,

由于点 $A(x_1, \frac{1}{x_1})$, 关于直线 $y = x$ 的对称点坐标为 $(\frac{1}{x_1}, x_1)$,

所以 $x_1 = \frac{1}{x_2}$,

有 $x_1 x_2 = 1$,

而 $x_1 \neq x_2$

则 $x_1 + 4x_2 = x_1 + x_2 + 3x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} + 3x_2 > 2 + 3 = 5$

即 $x_1 + 4x_2 \in (5, +\infty)$

故选: D.

【点评】 本题考查了函数的概念与性质、对数函数以及指数函数.

二. 函数零点的判定定理 (共 7 小题)

5. (2023·西安模拟) 已知 $f(x) = e^x + \ln x + 2$, 若 x_0 是方程 $f(x) - f'(x) = e$ 的一个解, 则 x_0 可能存在的区间是 ()

A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)

【分析】 根据题意, 求出 $g(x)$ 的解析式, 分析 $g(x)$ 的单调性, 结合函数零点判定定理分析可得答案.

【解答】 解: 已知 $f(x) = e^x + \ln x + 2$, 则 $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$, $x > 0$,

设 $g(x) = f(x) - f'(x) - e$,

则 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2 - e$,

易得 $y = g(x)$ ($0, +\infty$) 上为增函数,

又 $g(2) < 0$ 而 $g(3) > 0$, 则 x_0 可能存在的区间是 (2, 3).

故选: C.

【点评】本题考查导数的计算，涉及函数与方程的关系，属于中档题.

6. (2023·重庆一模) 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点所在的区间是 ()

- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)

【分析】判断函数的单调性，由 $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ ，结合函数零点判定定理得答案.

【解答】解：函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\because f(2) = \ln 2 - 2 < 0, f(3) = \ln 3 > 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点所在的区间是 $(2, 3)$.

故选：C.

【点评】本题考查函数零点判定定理的应用，是基础题.

7. (2023·海南一模) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2$ 的零点所在的大致区间为 ()

- A. (1, e) B. (e, e²) C. (e², e³) D. (e³, e⁴)

【分析】根据零点存在性定理，即可得出答案.

【解答】解： $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 连续不断，且单调递减，

$$\because f(1) = 3 > 0, f(e) = \frac{1}{e} + 1 > 0, f(e^2) = \frac{1}{e^2} > 0, f(e^3) = \frac{1}{e^3} - 1 < 0, f(e^4) = \frac{1}{e^4} - 2 < 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2$ 的零点所在的大致区间为 (e^2, e^3) ,

故选：C.

【点评】本题考查函数零点的判定定理，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

8. (2023·洪山区校级模拟) 已知函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x - 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，若函数 $f(x)$ 恰有一个零点，则实数 a 的取值范围为 $\underline{(1, +\infty) \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}}$.

【分析】根据指数函数的性质，得到 $f(0) = 0$ ，然后分别讨论 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 时，函数的单调性，进行判断即可.

【解答】解： $\because f(x) = a^x + (1+a)^x - 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时， $f(0) = a^0 + (1+a)^0 - 2 = 1+1-2=0$ ，即 0 是 $f(x)$ 的一个零点，

若函数 $f(x)$ 恰有一个零点，

则等价于当 $x \neq 0$ 时， $f(x) \neq 0$ ，即可.

当 $a > 1$ 时，由指数函数的性质可知： $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时只有一个零点，满足题意；

当 $0 < a < 1$ 时， $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a)$ ，则函数 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$,

故 $f'(x)$ 存在唯一零点, 若 $f(x)$ 只有一个零点 $x=0$, 此时也必为极值点,

又此时 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则只需 $f'(0) = \ln a + \ln(1+a) = 0$, 解得 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

综上所述, 则实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty) \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$.

故答案为: $(1, +\infty) \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$.

【点评】 本题主要考查函数零点的判断, 利用指数函数的性质, 利用分类讨论思想进行求解是解决本题的关键, 是中档题.

9. (2023·桃城区校级模拟) 已知函数 $f(x) = m\sqrt{\ln x - \frac{1}{4}} + 2x + \frac{1}{2}n$ 在区间 $[2, 4]$ 上有零点, 则 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为 $-\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\ln 2}$.

【分析】 根据函数零点性质, 结合点到直线距离公式, 通过构造新函数, 利用导数求出最值即可.

【解答】 解: 设 a 为 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上的一个零点, 则 $m\sqrt{\ln a - \frac{1}{4}} + 2a + \frac{1}{2}n = 0$,

所以 $P(m, n)$ 在直线 $x\sqrt{\ln a - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}y + 2a = 0$ 上,

又 $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(m-0)^2 + (n-0)^2} = |OP|$, O 为坐标原点,

易知 $|OP| \geq \frac{|0 \cdot \sqrt{\ln a - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \times 0 + 2a|}{\sqrt{(\sqrt{\ln a - \frac{1}{4}})^2 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{2a}{\sqrt{\ln a}}$.

令 $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\ln x}}$ ($2 \leq x \leq 4$), 则 $g'(x) = \frac{2\ln x - 1}{(1\ln x)^{\frac{3}{2}}} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{4}{\sqrt{\ln 2}}$.

所以 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为 $\frac{4}{\sqrt{\ln 2}} = \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\ln 2}$.

故答案为: $\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\ln 2}$.

【点评】 本题考查函数零点, 距离公式等知识点, 根据点到直线距离公式, 结合两点间距离公式, 再构造函数求最值是解题的关键, 考查转化思想以及运算求解能力, 属于中档题.

10. (2023·荔湾区校级模拟) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{m}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{-x}{m(x+1)}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) - 4x - 1$. 若函数 g

(x) 在区间 $(-1, 1)$ 上有且仅有一个零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\{-1\} \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$
C. $\{-1\} \cup [\frac{1}{5}, +\infty)$ D. $\{-1\} \cup (\frac{1}{5}, 1)$

【分析】构造函数 $h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{x+1}, & -1 < x < 0 \end{cases}$, 则问题转化为 $h(x) = 4mx+m$ 在区间 $(-1, 1)$ 上

有且仅有一个根, 进一步转化为函数 $y=h(x)$ 的图象与直线 $y=4mx+m$ 在区间 $(-1, 1)$ 只有一个交点, 利用导数研究曲线的切线问题, 确定边界状态的 m 的值, 结合图象求解即可得到答案.

【解答】解: 令 $h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{x+1}, & -1 < x < 0 \end{cases}$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{m}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{m(x+1)}, & -1 < x < 0 \end{cases} = \frac{1}{m} h(x),$$

令 $g(x) = f(x) - 4x - 1$, 即 $f(x) = 4x+1$, 故 $\frac{1}{m} h(x) = 4x+1$,

所以 $h(x) = 4mx+m$,

作出函数 $h(x)$ 的图象如图所示,

函数 $g(x)$ 的零点个数即为函数 $y=h(x)$ 的图象与直线 $y=4mx+m$ 的交点个数,

直线 $y=4mx+m$ 过定点 $(-\frac{1}{4}, 0)$,

当直线 $y=4mx+m$ 过点 $(1, 1)$ 时, $m = \frac{1}{5}$;

当直线 $y=4mx+m$ 与曲线 $y = \frac{-x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$ ($-1 < x < 0$) 相切时,

设切点坐标为 $(x_0, \frac{1}{x_0+1} - 1)$,

由 $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$,

故切线的斜率为 $k = -\frac{1}{(x_0+1)^2}$,

所以 $-\frac{1}{(x_0+1)^2} = \frac{\frac{1}{x_0+1} - 1 - 0}{x_0 + \frac{1}{4}}$, 解得 $x_0 = -\frac{1}{2}$,

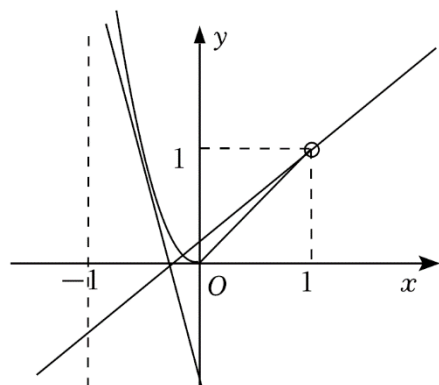
则 $4m = -\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^2} = -4$, 解得 $m = -1$,

结合图象可知, 当 $m \geq \frac{1}{5}$ 或 $m = -1$ 时, 函数 $y = h(x)$ 的图象与直线 $y = 4mx + m$ 只有一个交点,

即函数 $g(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有且仅有一个零点,

所以实数 m 的取值范围是 $\{-1\} \cup [\frac{1}{5}, +\infty)$.

故选: C.



【点评】 本题考查了函数的零点与方程的根的综合应用, 解决函数零点或方程根的问题, 常用的方法有:

(1) 方程法 (直接解方程得到函数的零点); (2) 图象法 (直接画出函数的图象分析得解); (3) 方程+图象法 (令函数为零, 再重新构造两个函数, 数形结合分析得解). 属于中档题.

11. (2023·杭州模拟) 函数 $f(x) = e^x + ax + b$ 在区间 $[1, 3]$ 上存在零点, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $-\frac{e^2}{2}$.

【分析】 设零点为 t , 则有 $at + b = -e^t$, 由柯西不等式可得 $e^{2t} = [at + b \cdot 1]^2 \leq (a^2 + b^2)(t^2 + 1)$, 进而得 $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{t^2 + 1}$, 利用导数求出 $g(t) = \frac{e^{2t}}{t^2 + 1}$, $t \in [1, 3]$ 的最小值即可.

【解答】 解: 设零点为 t , 则 $e^t + at + b = 0$,

所以 $at + b = -e^t$,

由柯西不等式可得 $e^{2t} = [at + b \cdot 1]^2 \leq (a^2 + b^2)(t^2 + 1)$,

所以 $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{t^2 + 1}$,

令 $g(t) = \frac{e^{2t}}{t^2 + 1}$, $t \in [1, 3]$,

所以 $g'(t) = \frac{2e^{2t}(t^2 - t + 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2e^{2t}[(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{(t^2 + 1)^2} > 0$,

所以 $g(t)$ 在 $t \in [1, 3]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(t)_{\min} = g(1) = \frac{e^2}{2},$$

$$\text{所以 } a^2 + b^2 \geq \frac{e^2}{2},$$

$$\text{所以 } a^2 + b^2 \text{ 的最小值为 } \frac{e^2}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{e^2}{2}.$$

【点评】本题考查了转化思想、导数的综合运用及柯西不等式的应用, 属于中档题.

三. 函数的零点与方程根的关系 (共 18 小题)

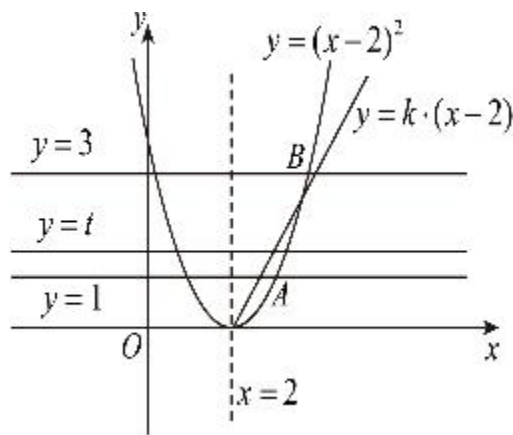
12. (2023·海淀区校级模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4, & x \leq 2 \\ kx - 2k, & x > 2 \end{cases}$, 方程 $f(x) - t = 0$ 有两个实数解, 分

别为 x_1 和 x_2 , 当 $1 < t < 3$ 时, 若存在 t 使得 $x_1 + x_2 = 4$ 成立, 则 k 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 3)$ D. $(\sqrt{3}, 3)$

【分析】作出函数图象, 结合函数的对称性将问题转化为 $y = kx - 2k$ 与 $y = x^2 - 4x + 4$ 在 $x \in (3, 2 + \sqrt{3})$ 内有交点, 分离参数计算即可.

【解答】解: 如图所示, 作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = t$ ($1 < t < 3$) 的图象,



易得两函数交点位于 $x=2$ 两侧, 不妨设 $x_1 < 2 < x_2$,

若存在 t 使得 $x_1 + x_2 = 4$ 成立,

$$\text{即 } x_1^2 - 4x_1 + 4 = t = kx_2 - 2k,$$

又 $y = x^2 - 4x + 4$ 关于 $x=2$ 对称,

$$\text{故 } x_1^2 - 4x_1 + 4 = (4 - x_2)^2 - 4(4 - x_2) + 4 = x_2^2 - 4x_2 + 4 = t = kx_2 - 2k,$$

因为 $1 < t < 3$,

所以 $x_2^2 - 4x_2 + 4 \in (1, 3)$,

所以 $x_2 \in (3, 2 + \sqrt{3})$,

即 $x_2^2 - 4x_2 + 4 = t = kx_2 - 2k$ 在 $x_2 \in (3, 2 + \sqrt{3})$ 有解,

则 $k = \frac{x_2^2 - 4x_2 + 4}{x_2 - 2} = x_2 - 2 \in (1, \sqrt{3})$.

故选: B.

【点评】 本题考查了函数的零点、转化思想、数形结合思想, 作出图象是关键, 属于中档题.

13. (2023·龙华区校级模拟) 关于函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) - a, & 0 \leq x < 3.5 \\ b - x, & x \geq 3.5 \end{cases}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 给出下

列四个结论:

甲: 5 是该函数的零点.

乙: 4 是该函数的零点.

丙: 该函数的所有零点之积为 0.

丁: 方程 $f(x) = 1$ 有两个不等的实根.

若上述四个结论中有且只有一个结论错误, 则该错误的结论是 ()

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

【分析】 由已知函数的单调性判断甲、乙中有一个错误, 假设甲正确, 结合丙正确求得 a 与 b 的值, 得到函数解析式, 再说明丁正确, 则答案可求.

【解答】 解: 当 $x \in [0, 3.5]$ 时, $f(x) = \log_2(x+2) - a$ 为增函数,

当 $x \in [3.5, +\infty)$ 时, $f(x) = b - x$ 为减函数, 故 5 和 4 只有一个是函数的零点,

即甲乙中有一个结论错误, 一个结论正确, 而丙、丁均正确.

由两零点之积为 0, 则必有一个零点为 0, 则 $f(0) = \log_2 2 - a = 0$, 得 $a = 1$,

若甲正确, 则 $f(5) = 0$, 即 $b - 5 = 0$, $b = 5$,

可得 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) - 1, & 0 \leq x < 3.5 \\ 5 - x, & x \geq 3.5 \end{cases}$,

由 $f(x) = 1$,

可得 $\begin{cases} 0 \leq x < 3.5 \\ \log_2(x+2) - 1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 3.5 \\ 5-x = 1 \end{cases}$,

解得 $x=2$ 或 $x=4$, 方程 $f(x)=1$ 有两个不等实根, 故丁正确.

故甲正确, 乙错误.

故选: B.

【点评】 本题考查命题的真假判断与应用, 函数的零点与方程根的关系, 考查逻辑思维能力与推理论证能力, 考查运算求解能力, 是中档题.

14. (2023·山西模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x+1|} - 3$, $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - |x|)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点个数是 ()

A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

【分析】 首先判断两个函数的单调性, 再结合端点值, 即可判断选项.

【解答】 解: 两个函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

因为 $f(-x) = \sqrt{|-x-1|} + \sqrt{|-x+1|} - 3 = \sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x-1|} - 3 = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数,

因为 $g(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - |-x|) = \ln(\sqrt{x^2+1} - |x|) = g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 是偶函数,

$g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$, 根据复合函数单调性可知, 在 $(0, +\infty)$ 函数 $g(x)$ 单调

递减,

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - 3$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} - 3$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}^2} < 0$, 所以函

数单调递减,

$f(0) = -1$, $g(0) = 0$, $f(1) = \sqrt{2} - 3$, $g(1) = \ln(\sqrt{2} - 1) > \ln\frac{1}{e}$, $g(1) \in (-1, 0)$,

所以 $f(0) < g(0)$, $f(1) < g(1)$,

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象在 $(0, +\infty)$ 有 1 个交点,

根据偶函数的性质, 在 $(-\infty, 0)$ 上也有 1 个交点, 所以两个函数共有 2 个交点.

故选: D.

【点评】 本题主要考查了函数的单调性和奇偶性, 属于中档题.

15. (2023·阿勒泰地区三模) 已知 $f(x) = \sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \theta\right)$ 上有且只有 3

个零点, 则 θ 的范围为 ()

- A. $\frac{4\pi}{3} < \theta \leq 2\pi$ B. $2\pi < \theta \leq \frac{8\pi}{3}$ C. $\frac{7\pi}{3} < \theta < \frac{11\pi}{3}$ D. $\frac{11\pi}{3} < \theta \leq 5\pi$

【分析】将 $\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4}$ 看作一个整体 t , 使用整体思想, 由正弦函数 $y = \sin t$ 的零点 (即对称中心的横坐标)

求解即可.

【解答】解: $\because f(x) = \sin(\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3}, \theta)$ 上有且只有 3 个零点,

$\therefore$ 令 $\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4} = t$, 当 $x \in (\frac{2\pi}{3}, \theta)$ 时, $t \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3}, \theta)$ 上有且只有 3 个零点, 即 $y = \sin t$ 在区间 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$ 上有且只有 3

个零点,

又 $\because y = \sin t$ 的零点 (即对称中心的横坐标) 为 $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore$ 当 $k=0$ 时, $t=0 \notin (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$, 当 $k=1$ 时, $t=\pi \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$,

当 $k=2$ 时, $t=2\pi \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$, 当 $k=3$ 时, $t=3\pi \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$,

当 $k=4$ 时, $t=4\pi \notin (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4})$,

$\therefore 3\pi < \frac{3\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \leq 4\pi$, 解得 $\frac{11\pi}{3} < \theta \leq 5\pi$.

故选: D.

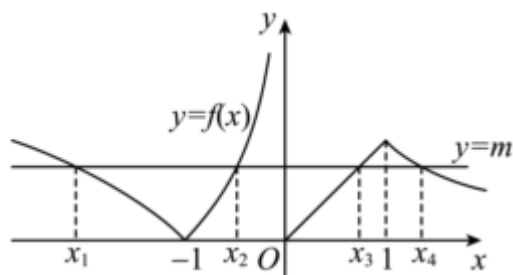
【点评】本题主要考查了正弦函数的图象和性质, 属于中档题.

16. (2023·烟台模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(-x)|, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{-1}, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x) = m$ 存在四个不相等的实根 x_1 ,

x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则 $4x_3^2 + x_1x_2x_4$ 的最小值是 3.

【分析】作函数 $f(x)$ 与 $y=m$ 图象, 结合图象可得 $x_1x_2=1$, $x_3=x_4^{-1}$, 再利用基本不等式求最值即可.

【解答】解: 作函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(-x)|, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{-1}, & x > 1 \end{cases}$ 与 $y=m$ 图象如下:



由图可得 $0 < m < 1$,

$\because f(x) = m$ 存在四个不相等的实根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 可得 $x_1 < -1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$,

可得 $\ln(-x_1) = -\ln(-x_2)$, $x_3 = x_4^{-1}$, 即 $x_1 x_2 = 1, x_3 x_4 = 1$,

所以 $4x_3^2 + x_1 x_2 x_4 = 4x_3^2 + x_4 = 4x_4^{-2} + x_4 = 4x_4^{-2} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4}{2} \geq 3 \sqrt[3]{4x_4^{-2} \cdot \frac{x_4}{2} \cdot \frac{x_4}{2}} = 3$,

当且仅当 $4x_4^{-2} = \frac{x_4}{2}$ 即 $x_4 = 2$ 且 $x_3 = \frac{1}{2}$ 等号成立,

则 $4x_3^2 + x_1 x_2 x_4$ 的最小值是 3.

故答案为: 3.

【点评】 本题主要考查了分段函数的性质, 考查了函数的零点与方程根的关系, 同时考查了数形结合的数学思想, 属于中档题.

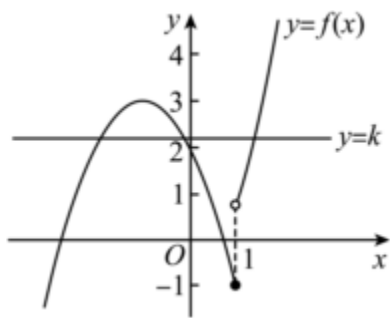
17. (2023·龙岩模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2, & x \leq 1, \\ e^x - 2, & x > 1, \end{cases}$ 关于 x 的方程 $f(x) = k$ 恰有三个不同实数

解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 且关于 m 的方程 $5 \ln m + \frac{(x_1 + x_2)}{2} (-x_1^2 - 2x_1 + 4)(x_3 - 1) = 0$ 有实数解,

则实数 m 的取值范围为 $(1, \frac{5}{e})$.

【分析】 在同一平面直角坐标系中作出 $y=f(x)$, $y=k$ 的函数图象, 根据图象有 3 个交点确定出 x_1, x_2, x_3 的关系, 所以可将方程转化为 $5 \ln m = e^{x_3} (x_3 - 1)$, 然后构造函数 $g(x) = e^x (x - 1)$ ($x \in (1, \ln 5)$) 并分析 $g(x)$ 的单调性确定出其值域, 即可得出答案.

【解答】 解: 在同一平面直角坐标系中作出 $y=f(x)$, $y=k$ 的函数图象如下图所示:



当 $x \leq 1$ 时, $y = -(x+1)^2 + 3 \leq 3$, 当 $x > 1$ 时, $y = e^x - 2 > e - 2$,

所以由图象可知: $k \in (e - 2, 3)$ 时关于 x 的方程 $f(x) = k$ 恰有三个不同实数解,

$$\text{又 } x_1 + x_2 = 2 \times (-1) = -2, \quad -x_1^2 - 2x_1 + 4 = e^{x_3} - 2 + 2 = e^{x_3},$$

$$\text{所以 } 51nm = -\frac{(x_1 + x_2)}{2}(-x_1^2 - 2x_1 + 4)(x_3 - 1) = e^{x_3}(x_3 - 1),$$

又因为 $k \in (e - 2, 3)$, 所以 $e^{x_3} - 2 \in (e - 2, 3)$, 所以 $x_3 \in (1, \ln 5)$,

设 $g(x) = e^x(x - 1)$ ($x \in (1, \ln 5)$), 所以 $g'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x x > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, \ln 5)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \in (g(1), g(\ln 5))$, 即 $g(x) \in (0, 51n\frac{5}{e})$,

所以 $51nm \in (0, 51n\frac{5}{e})$, $1nm \in (0, 1n\frac{5}{e})$, $m \in (1, \frac{5}{e})$.

故答案为: $(1, \frac{5}{e})$.

【点评】 本题主要考查函数的零点与方程根的关系, 属于中档题.

18. (2023·赤峰模拟) 已知函数 $f(x) = -x + \log_2(4^x + 4)$, 若方程 $f(x) = b$ 有解, 则实数 b 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \log_2 5)$ B. $(-\infty, \log_2 5]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

【分析】 利用对数的运算性质和基本不等式即可求解.

【解答】 解: $f(x) = -x + \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^{-x} + \log_2(4^x + 4)$

$$= \log_2(2^x + 4 \cdot 2^{-x})$$

$$= \log_2(2^x + \frac{4}{2^x})$$

$$\geq \log_2 4 = 2 \quad (\text{当且仅当 } 2^x = \frac{4}{2^x}, \text{ 也即 } x = 1 \text{ 时取等号}),$$

$$\therefore b \geq 2,$$

故选: C.

【点评】本题主要考查函数的零点与方程根的关系，属于中档题.

19. (2023·江西模拟) 函数 $f(x) = 1 + \sin(\pi - \pi x) + x \cos(\frac{\pi}{2} + \pi x)$ 在区间 $[-3, 5]$ 上的所有零点之和为 ()

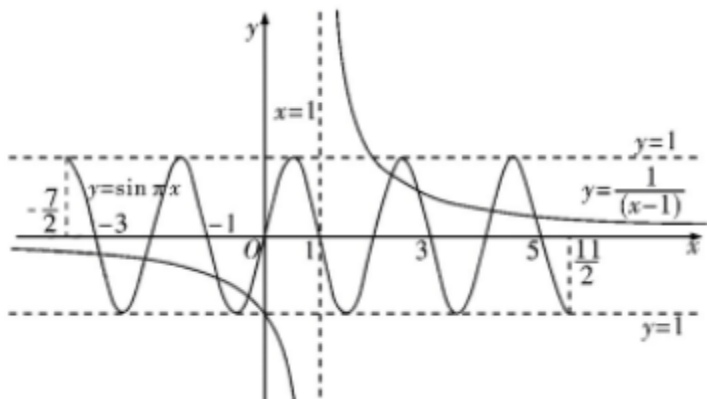
- A. 6 B. 8 C. 12 D. 16

【分析】化简可得 $f(x) = 1 + \sin \pi x - x \sin \pi x$ ，令 $f(x) = 0$ 可得， $\sin \pi x = \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$ ，作出函数 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{x-1}$ 的大致图象，结合图象可知所求零点之和为 $2 \times 4 = 8$.

【解答】解：由题意可得： $f(x) = 1 + \sin \pi x - x \sin \pi x$ ，

令 $f(x) = 0$ ，且 $f(1) = 1 \neq 0$ ，可得 $\sin \pi x = \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$ ，

作出函数 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{x-1}$ 的大致图象如下图所示，



易知 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{x-1}$ 均关于点 $(1, 0)$ 对称，

由图可设 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{x-1}$ 的交点横坐标依次为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ ，

根据对称性可得 $x_1 + x_8 = x_2 + x_7 = x_3 + x_6 = x_4 + x_5 = 2$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $[-3, 5]$ 上所有零点之和为 $2 \times 4 = 8$.

故选：B.

【点评】本题考查函数零点与方程根的关系，考查数形结合思想以及运算求解能力，属于中档题.

20. (2023·咸阳模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，则函数 $g(x) = f(f(x)) - 1$ 的零点个数是

()

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

【分析】根据函数解析式画出图像，利用换元法令 $t = f(x)$ ，可知 $f(t) = 1$ ；结合函数图像及解析式可

求得 t 的值, 再结合图像即可确定方程解的个数, 即为函数零点的个数.

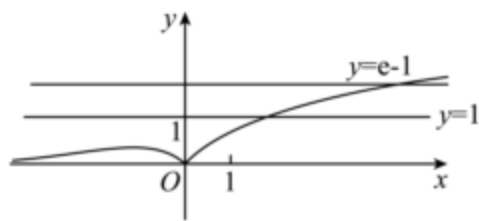
【解答】解: 函数 $f(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$,

对 $y = -xe^x \Rightarrow y' = -(x+1)e^x$, 令 $y' > 0 \Rightarrow x < -1$, 令 $y' < 0 \Rightarrow 0 > x > -1$,

可知 $y = -xe^x$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减,

且 x 趋向负无穷时, $y > 0$, $x = -1$ 时, $y_{\max} = \frac{1}{e}$,

故结合对数函数图像, 可画出函数 $f(x)$ 图像如下图所示:



函数 $g(x) = f(f(x)) - 1$ 的零点, 即 $f(f(x)) = 1$, 令 $t = f(x)$, 代入可得 $f(t) = 1 > \frac{1}{e}$,

由图像可知 $t = e - 1$, 即 $f(x) = e - 1$,

结合函数图像可知, $f(x) = e - 1$ 有 1 个解,

综合可知, 函数 $g(x) = f(f(x)) - 1$ 的零点有 1 个.

故选: A.

【点评】本题主要考查了分段函数的性质, 考查了函数的零点与方程根的关系, 同时考查了数形结合的数学思想, 属于中档题.

21. (2023•聊城三模) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R , 若 $f(x+1)$ 是偶函数, $g(x) = (x-1)f'(x) - 1$ 恰有四个零点, 则这四个零点的和为 4.

【分析】根据题意, 由条件可得 $g(x+1) = xf'(x+1) - 1$ 为偶函数, 可得其所有零点之和为 0, 然后即可得到结果.

【解答】解: 将函数 $g(x)$ 向左平移 1 个单位, 所以 $g(x+1) = (x+1-1)f'(x+1) - 1 = xf'(x+1) - 1$,

因为 $f(x+1)$ 是偶函数, 由偶函数的导数为奇函数可知, $f'(x+1)$ 是奇函数,

且奇函数与奇函数的乘积为偶函数, 则 $y = xf'(x+1)$ 为偶函数,

所以 $g(x+1) = xf'(x+1) - 1$ 为偶函数,

又因为函数 $g(x)$ 恰有四个零点, 即函数 $g(x+1)$ 恰有四个零点,

且这四个零点一定是两组关于 y 轴对称, 其四个零点之和为 0,

而 $g(x+1)$ 是由 $g(x)$ 向左平移了 1 个单位,

所以 $g(x)$ 的四个零点之和为 4.

故答案为: 4.

【点评】 本题主要考查函数的零点与方程根的关系, 考查转化能力, 属于中档题.

22. (2023•天津三模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+a, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}+a+1, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恰有三

个不同的零点, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup [1, 2)$.

【分析】 根据函数与方程的关系转化为两个函数的交点个数问题, 利用参数分离法分离参数, 构造两个函数, 求出函数的导数, 研究函数的单调性和图象, 利用数形结合进行求解即可.

【解答】 解: 当 $x \leq 0$ 时, 由 $g(x) = f(x) - ax - 1 = x^2 + 4x + a - ax - 1 = 0$,

得 $x^2 + 4x - 1 = a(x - 1)$,

$$\text{则 } a = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1},$$

当 $x > 0$ 时, 由 $g(x) = f(x) - ax - 1 = \frac{1}{x} + a + 1 - ax - 1 = 0$,

得 $\frac{1}{x} = a(x - 1)$, 当 $x = 1$ 时, $1 = 0$ 不成立, 即 $x \neq 1$,

$$\text{则 } a = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2 - x},$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}, (x \leq 0),$$

$$h'(x) = \frac{(2x+4)(x-1) - (x^2+4x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2},$$

当 $x \leq 0$ 时, 由 $h'(x) > 0$ 得 $x < -1$, 此时 $h(x)$ 为增函数,

由 $h'(x) < 0$ 得, $-1 < x \leq 0$, 此时 $h(x)$ 为减函数, 且 $h(0) = 1$,

即当 $x = -1$ 时, $h(x)$ 取得极大值为 $h(-1) = 2$,

$$\text{设 } \varphi(x) = \frac{1}{x^2 - x}, (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1),$$

$$\varphi'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2},$$

则由 $\varphi'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$, 此时 $\varphi(x)$ 为增函数,

由 $\varphi'(x) < 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < 1$ 或 $x > 1$, 此时 $\varphi(x)$ 为减函数,

即当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\varphi(x)$ 取得极大值为 $\varphi(\frac{1}{2}) = -4$,

当 $x > 1$ 时, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - x} > 0$,

作出 $h(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$, ($x \leq 0$) 和 $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - x}$, ($x > 0$ 且 $x \neq 1$) 的图象如图:

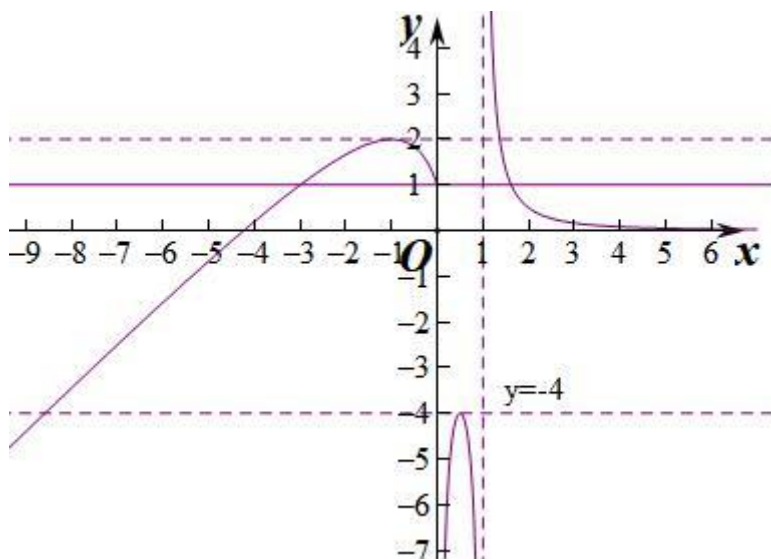
要使 $g(x) = f(x) - ax - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恰有三个不同的零点,

等价于 $y = a$ 与 $h(x)$, 和 $\varphi(x)$ 的图象分别有三个不同的交点,

由图象知, $1 \leq a < 2$ 或 $a < -4$,

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup [1, 2)$.

故答案为: $(-\infty, -4) \cup [1, 2)$.



【点评】 本题主要考查函数与方程的应用, 利用参数分离法进行分离参数, 然后构造函数, 求函数的导数, 研究函数的单调性和极值, 作出函数图象, 利用数形结合是解决本题的关键, 是中档题.

23. (2023·苏州三模) 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}$, 若 $g(x) = f(x) - b$ 恰有三个不同的零点, 且 b 是其中的一个零点, 则实数 b 的值为 $-\frac{16}{5}$.

【分析】 由题意可得 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 也为偶函数, 从而得有两个零点关于原点对称, 第三个零点必为 0, 所以 $b = 2\sqrt{a} > 0$, 分 $-a \leq x \leq a$, $x > a$, $x < -a$ 得函数 $f(x)$ 单调性及值域, 从而得 $b = \frac{5a}{4}$, 于是有 $2\sqrt{a} = \frac{5a}{4}$, 即可得 b 的值.

【解答】 解: 因为 $f(x) = \sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}$,

$$\text{因为 } f(-x) = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a} = \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $g(x) = f(x) - b$ 也为偶函数,

因为函数 $g(x) = f(x) - b$ 恰有三个不同的零点 x_1, x_2, b ,

所以有两个零点关于原点对称, 第三个零点必为 0,

$$\text{所以 } g(0) = f(0) - b = 0,$$

$$\text{又因为 } f(0) = 2\sqrt{a},$$

$$\text{所以 } b = 2\sqrt{a} > 0,$$

$$\text{当 } -a \leq x \leq a \text{ 时, } f(x) = \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x},$$

$$\text{所以 } f^2(x) = 2a + 2\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\text{又因为 } \sqrt{a^2 - x^2} \in [0, a],$$

$$\text{所以 } f^2(x) \in [2a, 4a],$$

$$\text{所以 } f(x) \in [\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}],$$

$$\text{仅当 } x=0 \text{ 时, } f(x) = 2\sqrt{a},$$

$$\text{当 } x > a \text{ 时, } f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}, \text{ 易知 } f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{仅当 } x = \frac{5a}{4} \text{ 时, } f(x) = 2\sqrt{a},$$

$$\text{当 } x < -a \text{ 时, } f(x) = \sqrt{a-x} + \sqrt{-a-x}, \text{ 易知 } f(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{仅当 } x = -\frac{5a}{4} \text{ 时, } f(x) = 2\sqrt{a},$$

又因为 b 是其中一个大于 0 的零点,

$$\text{所以 } b = \frac{5a}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{5a}{4} = 2\sqrt{a}, \text{ 解得 } \sqrt{a} = \frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } b = 2\sqrt{a} = \frac{16}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{16}{5}.$$

【点评】本题考查了函数的单调性、值域及分类讨论思想, 属于中档题.

$$24. \text{ (2023} \cdot \text{高州市二模) 已知函数 } f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{x}, & x < 0 \\ |\ln x| - a, & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0), \text{ 若存在实数 } k, \text{ 使得方程 } f$$

$f(x) = k$ 有 6 个不同实根 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$, 则 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$; $\frac{x_1 x_2 + x_4 x_5}{x_3 x_6}$ 的值为 2 .

【分析】对 $f(x)$ 进行讨论, 去掉双绝对值, 然后大致画出 $f(x)$ 的图象, 即可求得答案.

【解答】解: 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = -x - \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{(-x) \times (-\frac{1}{x})} = 2$,

当且仅当 $-x = -\frac{1}{x}$ 即 $x = -1$ 时取等号,

且根据对勾函数可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

当 $x \in (0, e^{-a}]$ 时, $\ln x \in (-\infty, -a]$, $|\ln x| = -\ln x \in [a, +\infty)$,

则 $|\ln x| - a = -\ln x - a \in [0, +\infty)$,

所以 $f(x) = -\ln x - a \in [0, +\infty)$;

当 $x \in (e^{-a}, 1]$ 时, $\ln x \in (-a, 0]$, $|\ln x| = -\ln x \in [0, a)$,

则 $|\ln x| - a = -\ln x - a \in [-a, 0)$,

所以 $f(x) = \ln x + a \in (0, a]$;

当 $x \in (1, e^a]$ 时, $\ln x \in (0, a]$, $|\ln x| = \ln x \in (0, a]$,

则 $|\ln x| - a = \ln x - a \in (-a, 0]$,

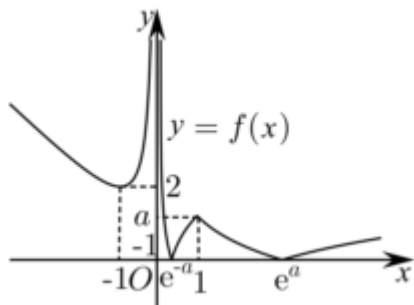
所以 $f(x) = a - \ln x \in [0, a)$;

当 $x \in (e^a, +\infty)$ 时, $\ln x \in (a, +\infty)$, $|\ln x| = \ln x \in (a, +\infty)$,

则 $|\ln x| - a = \ln x - a \in (0, +\infty)$,

所以 $f(x) = \ln x - a \in (0, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 的大致图象如图所示,



当 $a > 2$ 时, 存在实数 k , 使得方程 $f(x) = k$ 有 6 个不同实根,

故 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$,

由题意得 x_1, x_2 是方程 $-x - \frac{1}{x} = k$ 的两个根, 即方程 $x^2 + kx + 1 = 0$ 的两个根,

所以 $x_1x_2=1$,

$$x_1x_2=1, \quad -\ln x_3 - a = \ln x_6 - a = k,$$

所以 $\ln x_3 + \ln x_6 = \ln(x_3x_6) = 0$, 解得 $x_3x_6=1$,

$$\ln x_4 + a = a - \ln x_5 = k, \quad \ln x_4 + \ln x_5 = \ln(x_4x_5) = 0, \text{ 解得 } x_4x_5=1$$

$$\text{所以 } \frac{x_1x_2 + x_4x_5}{x_3x_6} = 2,$$

故答案为: $(2, +\infty); 2$.

【点评】本题主要考查函数的零点与方程根的关系, 考查转化能力, 属于难题.

25. (2023·绍兴二模) 设函数 $f(x) = x - \sin \frac{\pi x}{2}$.

(1) 证明: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) \leq 0$;

(2) 记 $g(x) = f(x) - a \ln|x|$, 若 $g(x)$ 有且仅有 2 个零点, 求 a 的值.

【分析】(1) 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$, $f'(x)$ 是增函数, 根据 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$

单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 单调递增, 即可得证;

(2) 由 (1) 知当 $a=0$ 时, $g(x)$ 有两个零点 -1 和 1 ; 再分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况, 利用 $g(x)$ 的单调性分类讨论即可.

【解答】证明: (1) 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$, $f'(x)$ 是增函数,

$$\text{又 } f'(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0, \quad f'(1) = 1 > 0, \text{ 所以存在 } x_0 \in (0, 1), \text{ 使得 } f'(x_0) = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 单调递增,

$$\text{又 } f(1) = 0, \quad f(0) = 0, \text{ 所以 } f(x) \leq 0;$$

解: (2) 由 (1) 知当 $a=0$ 时, $g(x)$ 有两个零点 -1 和 1 ;

① 当 $a>0$ 时, 若 $x<0$, 有 $g(-1)=0$, 且 $x<-1$ 时, 有 $g(x)<0$,

$$\text{又 } -1 < x < 0, \text{ 由 (1) 知 } f(x) > 0, \quad -a \ln|x| > 0, \text{ 则 } g(x) > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点,

$$\text{若 } x>0, \text{ 有 } g(1)=0, \quad g'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{a}{x}, \quad g'(1) = 1 - a,$$

$$\text{若 } a=1, \text{ 有 } g(x) = x - \ln x - \sin \frac{\pi}{2} x \geq x - \sin \frac{\pi}{2} x \geq 0;$$

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有 1 个零点. 符合题意:

$$\text{若 } a>1, \text{ 有 } g'(x) \text{ 在 } (1, 2) \text{ 单调递增, } g'(2) = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2},$$

(i) 若 $g'(2) \leq 0$, 则当 $x \in (1, 2)$, 有 $g'(x) \leq 0$,

(ii) 若 $g'(2) > 0$, 又 $g'(1) < 0$, 则可知 $\exists x_1 \in (1, 2)$, 使得 $g'(x_1) = 0$,

由 (i) (ii), 则可知 $g(x)$ 在 $(1, x_1)$ 上单调递减, 所以 $g(x_1) < g(1) = 0$,

又当 $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 至少有 1 个零点,

则可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 至少有两个零点, 不符合题意;

若 $0 < a < 1$, 有 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增,

又 $g'(1) > 0$, $g'(\frac{2a}{2+\pi}) < 0$, 则可知 $\exists x_2 \in (0, 1)$, 使得 $g'(x_2) = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(x_2, 1)$ 单调递增, 则有 $g(x_2) < g(1) = 0$,

又有 $x \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 至少有 1 个零点,

则可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 至少有 2 个零点, 不符合题意;

② 当 $a < 0$ 时, 由 $-g(x) = (-x) - \sin \frac{\pi \cdot (-x)}{2} - (-a) \ln |-x|$,

记 $t = -x$, $b = -a > 0$, $h(t) = t - \sin \frac{\pi t}{2} - b \ln |t|$, 由①可知, 有且仅有 $b = 1$ 满足题意,

即 $a = -1$ 时, 满足题意;

综上所述, 实数 a 的值为 $-1, 0, 1$.

【点评】 本题考查了导数的综合应用, 属于中档题.

26. (2023·南昌一模) 已知函数 $f(x) = (x-a)^2 + be^x$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 若 $a=0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点, 求 b 的取值范围;

(2) 若 $a>0$, $b=\frac{2}{e}$, 方程 $f(x)=3$ 有解, 求 a 的取值范围.

【分析】 (1) 由 $y=f(x)$ 有 3 个零点, 可得 $y=b$ 与 $g(x) = -\frac{x^2}{e^x}$ 的图象有三个交点, 结合导数分析函

数的单调性, 可得函数 $g(x)$ 的大致图象, 数形结合即可得解;

(2) 由已知可得 $(x-a)^2 + \frac{2}{e} \cdot e^x - 3 = 0$ 有解, 设 $h(x) = (x-a)^2 + 2e^{x-1} - 3$, 则 $h'(x) = 2(x-a) + 2e^{x-1}$, 设 $m(x) = 2(x-a) + 2e^{x-1}$, 利用导数可得 $m(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 单调递增, 结合 $m(-1) < 0$, $m(a) > 0$, 可得 $x_0 - a = -e^{x_0-1}$, 可得函数 $h(x)$ 的单调性, 由 $h(x)_{\min} \leq 0$ 即可求解 a 的取值范围.

【解答】 解: (1) 若 $a=0$ 时, $f(x) = x^2 + be^x$,

函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点, 即 $f(x)=0$ 有 3 个根, 也即 $b = -\frac{x^2}{e^x}$ 有 3 个根, 即 $y=b$ 与 $g(x) = -\frac{x^2}{e^x}$

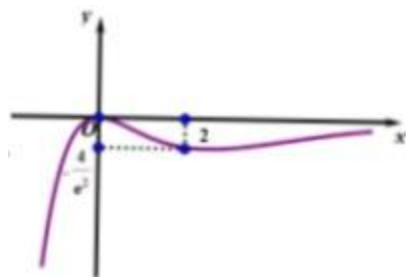
的图象有三个交点，

$$g'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x}, \text{ 由 } g'(x) < 0, \text{ 解得 } 0 < x < 2, \text{ 由 } g'(x) > 0, \text{ 解得 } x < 0 \text{ 或 } x > 2,$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, 2)$ 上单调递减，

$$\text{又 } g(0) = 0, \quad g(2) = -\frac{4}{e^2}, \quad x > 0 \text{ 时, } g(x) < 0,$$

作出函数 $g(x)$ 的大致图象，如图所示：



$$\text{数形结合可得 } -\frac{4}{e^2} < b < 0,$$

$$\text{即 } b \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{4}{e^2}, 0\right).$$

$$(2) \text{ 若 } a > 0, b = \frac{2}{e}, \text{ 方程 } f(x) = 3 \text{ 有解, 则 } (x-a)^2 + \frac{2}{e} \cdot e^x - 3 = 0 \text{ 有解.}$$

$$\text{设 } h(x) = (x-a)^2 + 2e^{x-1} - 3, \text{ 则 } h'(x) = 2(x-a) + 2e^{x-1},$$

$$\text{设 } m(x) = 2(x-a) + 2e^{x-1}, \text{ 则 } m'(x) = 2 + 2e^{x-1} > 0 \text{ 恒成立, 故 } m(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 单调递增,}$$

$$\text{因为 } m(-1) = 2(-1-a+e^{-2}) < 0, \quad m(a) = 2e^{a-1} > 0,$$

$$\text{所以存在唯一的 } x_0, \text{ 使得 } m(x_0) = h'(x_0) = 2(x_0-a) + 2e^{x_0-1} = 0, \text{ 所以 } x_0 - a = -e^{x_0-1},$$

且 $x > x_0$ 时, $h'(x) > 0$, $x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

$$x \rightarrow -\infty \text{ 时, } h(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty \text{ 时, } h(x) \rightarrow +\infty,$$

$$\text{故要使 } h(x) = 0 \text{ 有解, 只需 } h(x)_{\min} \leq 0,$$

$$\text{故 } h(x)_{\min} = h(x_0) = (x_0-a)^2 + 2e^{x_0-1} - 3 = e^{2(x_0-1)} + 2e^{x_0-1} - 3 = (e^{x_0-1} + 3)(e^{x_0-1} - 1) \leq 0,$$

$$\text{故 } e^{x_0-1} \leq 1, \text{ 解得 } x_0 \leq 1,$$

$$\text{而 } a = x_0 + e^{x_0-1} \text{ 在 } x_0 \in (-\infty, 1] \text{ 上单调递增, 故 } a \leq 1 + 1 = 2,$$

$$\text{又因为 } a > 0, \text{ 所以 } 0 < a \leq 2, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围为 } (0, 2].$$

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性与最值，利用导数解决函数零点与方程根的问题，考查运算求解能力，属于难题.

27. (2023•宁波模拟) 已知函数 $f(x) = |x-1|e^x$ 和 $g(x) = a|x|$ 的图象共有三个不同的交点，并且它们的横坐标从左到右依次记为 x_1, x_2, x_3 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $2x_3 - x_2 + x_1 < 2a$.

【分析】(1) 由 $f(x) = g(x)$, 可得 $|x-1|e^x = a|x|$, 显然 $x_1 \neq 0$, 化为 $a = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^x = h(x)$, 记 $m(x) = \frac{x-1}{x} e^x$, 利用导数研究其单调性, 画出图象, 即可得出 a 的取值范围.

(2) 显然 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 1, x_3 > 1$, $h(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^x > \left| \frac{x-1}{x} \right| (x+1)$, 对 x 分类讨论, 进而得出 x_3, x_2, x_1 的范围, 进而证明不等式.

【解答】解: (1) 由 $f(x) = g(x)$, 可得 $|x-1|e^x = a|x|$,

显然 $x_1 \neq 0$, 化为 $a = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^x = h(x)$,

记 $m(x) = \frac{x-1}{x} e^x$, $m'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^x > 0$,

$\therefore m(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

$x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0^+$; $x \rightarrow 0^-$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, h

(1) = 0.

因此当 $a > 0$ 时有三个公共点.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

(2) 证明: 显然 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 1, x_3 > 1$,

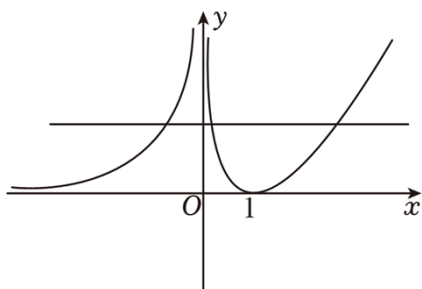
$h(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^x > \left| \frac{x-1}{x} \right| (x+1)$,

当 $x > 1$ 时, $h(x) > x - \frac{1}{x}$, 令 $a = x - \frac{1}{x}$, 解得 $x_3 < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) > \frac{1}{x} - x$, 令 $a = \frac{1}{x} - x$, 解得 $x_2 > \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$,

当 $x < 0$ 时, $h(x) > x - \frac{1}{x}$, 令 $a = x - \frac{1}{x}$, $x_1 < \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

$\therefore 2x_3 - x_2 + x_1 < 2a$, 结论成立.



【点评】 本题考查了利用导数研究函数的单调性、数形结合方法、函数零点与方程的根的关系、不等式的解法、分类讨论方法，考查了推理能力与计算能力，属于难题.

28. (2023·湖南模拟) 已知函数 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b$ ($a \neq 0, b > 0$) 在区间 $[1, 2]$ 上有最大值 2 和最小值 1.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 不等式 $g(x) - kx \geq 0$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 若 $f(x) = \frac{g(x)-1}{x}$ 且方程 $f(|2^x-1|) + t(\frac{2}{|2^x-1|}-3) = 0$ 有三个不同的实数解, 求实数 t 的取值范围.

【分析】 (1) 写出 $g(x)$ 的解析式, 对 a 分类可得关于 a, b 的方程组, 求解得答案;

(2) 由 (1) 知 $g(x) = x^2 - 2x + 2$, 问题转化为 $k+2 \leq \frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 再由基本不等式求最值得答案;

(3) 方程 $f(|2^x-1|) + t(\frac{2}{|2^x-1|}-3) = 0$, 即 $|2^x-1| + \frac{1+2t}{|2^x-1|} - (2+3t) = 0$, 化为 $|2^x-1|^2 - (2+3t)|2^x-1| + (1+2t) = 0$, 且 $|2^x-1| \neq 0$. 令 $m = |2^x-1|$, 则方程化为 $m^2 - (2+3t)m + (1+2t) = 0$, 问题转化为 $m^2 - (2+3t)m + (1+2t) = 0$ 有两个根 m_1, m_2 , 且 $0 < m_1 < 1 \leq m_2$, 再由一元二次方程根的分布与系数间的关系列式求解实数 t 的取值范围.

【解答】 解: (1) $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b = a(x-1)^2 + 1 + b - a$,

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为增函数, 由题意可得, $\begin{cases} g(1) = 1 + b - a = 1 \\ g(2) = 1 + b = 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为减函数, 由题意可得, $\begin{cases} g(1) = 1 + b - a = 2 \\ g(2) = 1 + b = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

已知 $b > 0$, $\therefore a = 1, b = 1$;

(2) 由 (1) 知 $g(x) = x^2 - 2x + 2$,

$\therefore g(x) - kx \geq 0$, 即 $x^2 - 2x + 2 - kx \geq 0$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 即 $(k+2)x \leq x^2 + 2$,

$\because x \in [1, 2], \therefore k+2 \leq \frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立,

又 $\because x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时取等号, $\therefore k+2 \leq 2\sqrt{2}$, 即 $k \leq 2\sqrt{2} - 2$.

$\therefore$ 实数 k 的范围是 $(-\infty, 2\sqrt{2} - 2]$;

(3) 方程 $f(|2^x - 1|) + t(\frac{2}{|2^x - 1|} - 3) = 0$, 即 $|2^x - 1| + \frac{1+2t}{|2^x - 1|} - (2+3t) = 0$,

化为 $|2^x - 1|^2 - (2+3t)|2^x - 1| + (1+2t) = 0$, 且 $|2^x - 1| \neq 0$.

令 $m = |2^x - 1|$, 则方程化为 $m^2 - (2+3t)m + (1+2t) = 0$.

$\because$ 原方程有三个不同的实数解, $\therefore m^2 - (2+3t)m + (1+2t) = 0$ 有两个根 m_1, m_2 , 且 $0 < m_1 < 1 \leq m_2$,

记 $h(m) = m^2 - (2+3t)m + (1+2t)$,

$$\text{则} \begin{cases} h(0) = 1+2t > 0 \\ h(1) = -t < 0 \end{cases} \text{①, 或} \begin{cases} h(0) = 1+2t > 0 \\ h(1) = -t = 0 \\ 0 < \frac{2+3t}{2} < 1 \end{cases} \text{②,}$$

解①得 $t > 0$, 解②得 $t \in \emptyset$.

$\therefore$ 实数 t 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

【点评】 本题考查函数零点与方程根的关系, 考查化归与转化思想, 考查逻辑思维能力与推理论证能力, 综合性强, 难度较大.

29. (2023·东阳市模拟) 已知函数 $f(x) = |x-m|e^{\frac{1}{x}} - t$.

(1) 对任意 $m \geq 1$, 方程 $f(x) = 0$ 恒有三个解, 求实数 t 的取值范围;

(2) 已知 $m=1$, 方程 $f(x) = 0$ 有三个解为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 求证: $x_3 - x_2 < t, x_2 - x_1 > 1$.

【分析】 (1) 构造函数 $g(x) = |x-m|e^{\frac{1}{x}}$, 求函数的导数, 研究函数的单调性和图象, 利用参数分离法进行转化求解即可.

(2) 当 $m=1$ 时, 分别构造函数 $h(x) = |x - \frac{1}{x}| (x > 0), s(x) = -x (x < 0)$, 利用不等式的性质进行转化证明即可.

【解答】 解: (1) 令 $g(x) = |x-m|e^{\frac{1}{x}}$,

当 $x > m$ 时, $g(x) = (x-m)e^{\frac{1}{x}}$,

$$g'(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} + (x-m) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{x^2 - x + m}{x^2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{x(x-1) + m}{x^2} > 0, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } (m, +$$

$\infty)$ 上递增,

当 $x < m$ 时, $g(x) = (m-x) \frac{1}{e^x}$,

$$g'(x) = -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{x^2 - x + m}{x^2} = -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{x^2 + (m-x)}{x^2} < 0, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } (-\infty, 0), (0, m) \text{ 上递减.}$$

当 $x < 0$ 而趋向 0 时, $g(x) \rightarrow 0$.

$g(x)$ 的图象大致如图所示: 则 t 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

$$(2) \text{ 当 } m=1 \text{ 时, } f(x) = |x-1| \frac{1}{e^x} - t,$$

$$\text{令 } h(x) = |x - \frac{1}{x}| \quad (x > 0), \quad s(x) = -x \quad (x < 0),$$

当 $x > 1$ 时, 先证 $g(x) > h(x)$,

$$\because \frac{1}{e^x} > 1 + \frac{1}{x}, \therefore g(x) = |x-1| \frac{1}{e^x} = (x-1) \frac{1}{e^x} > (x-1) \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} = h(x),$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } g(x) = |x-1| \frac{1}{e^x} = (1-x) \frac{1}{e^x} > (1-x) \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x = h(x),$$

则 $h(x) = t$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两解 x_4, x_5 , 且 $0 < x_4 < 1 < x_5$, 显然有 $0 < x_4 < x_2 < 1, 1 < x_3 < x_5$,

$$\text{通过解二次方程得 } x_4 = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}, x_5 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}, \text{ 则 } x_3 - x_2 < x_5 - x_4 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} - \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} =$$

t .

再证: 当 $x < 0$ 时, $g(x) < s(x)$,

$$g(x) < s(x) \Leftrightarrow (1-x) \frac{1}{e^x} < -x \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{-x}\right) \frac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{e^x} < 1,$$

$$\text{令 } \varphi(u) = (1-u) e^u \quad (u < 0), \quad \varphi'(u) = -u e^u > 0,$$

$$\therefore \varphi(u) < \varphi(0) = 1,$$

$$\therefore \text{当 } x < 0 \text{ 时, } \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{e^x} < 1,$$

当 $x < 0$ 时, $g(x) < s(x)$, $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $x_1 < -t$,

$$\therefore x_2 - x_1 > x_4 - (-t) = -\frac{-t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} + t = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} > \frac{\sqrt{4}}{2} = 1,$$

综上 $x_3 - x_2 < t, x_2 - x_1 > 1$ 成立.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/358021102021006063>