

太阳影子定位模型

摘要

针对根据视频中太阳影子变化信息确定拍摄地点和日期的具体问题,可将太阳高度角和太阳方位角作为桥梁,从而建立地理位置及日期时间与太阳影子变化信息相关的数学模型。根据已知数据,将太阳高度角(或太阳方位角)的模型求解值与实际值的吻合程度作为目标函数,将其转化为非线性规划问题,使用遗传算法进行求解,并对结果进行聚类分析。

问题 I, 根据确定的地点和日期, 计算出每个时刻对应的太阳高度角, 进而利用直杆长度和太阳高度角的几何关系计算出 9:00~15:00 内对应的直杆的影子长度。

问题 II, 基于直杆长度未知, 利用已知的太阳影子顶点坐标, 通过几何关系确定太阳方位角。在日期确定的情况下, 将经度和纬度作为遗传基因, 将太阳方位角匹配程度作为适应度函数, 应用遗传算法多次求解。最优结果为 (36.5790°N, 116.6429°E)。

问题 III, 基于直杆长度和日期未知的情况下, 将经度、纬度和日期同时作为遗传基因, 类似于问题 II 方法, 应用遗传算法多次求解。据附件 2 数据可得两地点及对应日期: (29.0360°N, 84.6533°E) — 7 月 7 日和 (29.0964°N, 85.4660°E) — 6 月 11 日; 据附件 3 数据可得两地点及对应日期: (42.1231°N, 117.8127°E) — 3 月 3 日和 (47.2570°N, 118.1280°E) — 10 月 1 日。

问题 IV, 为准确测取直杆影长, 使用 MATLAB 预处理视频, 提取出特定帧图像, 经视角转换后, 根据已知杆长按比例测算影长。在摄影视角未定的情况下, 将太阳高度角作为适应度函数, 应用遗传算法, 在已知日期的情况下求解得到两地点: (37.9231°N, 110.4611°E) 和 (6.2121°S, 123.7418°E); 若日期不确定的情况下, 不能确定拍摄地点与日期。

最后对模型进行了正确性和灵敏度检验, 验证了模型具有较高的准确性和灵敏度, 使用遗传算法进行求解, 在保证精确度的情况下, 大幅度提高了模型求解的速度, 为太阳影子定位技术的推广和应用奠定了良好的基础。

关键词: 太阳影子定位 非线性规划 遗传算法 聚类分析 灵敏度分析

一、问题重述

1.1 问题背景

目前民用手持式定位设备的定位技术主要有三种：基于 GPS 的定位，基于基站定位及小范围内的 Wifi 定位。这三种定位方式都需要利用相应的信号，容易受到电磁场的干扰和测量地建筑群的影响，在信号混杂的环境中难以获得精准的定位。当手持式定位设备不可用时，可以使用太阳定位技术。

本文采用太阳影子定位技术，通过分析视频中固定直杆在水平地面上的太阳影子的变化情况，建立数学模型，推算视频拍摄地点的经纬度和拍摄日期。在日照情况良好的情况下，太阳影子定位技术有操作简单、抗干扰能力强的优点。

1.2 问题提出

本文基于太阳影子定位技术，研究并建立数学模型，以解决以下问题。

问题 I：建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

问题 II：根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，求解出若干个可能的地点。

问题 III：根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，求解出若干个可能的地点与日期。

问题 IV：分析附件 4 的固定直杆（杆高约 2 米）在太阳下的影子变化的视频，在拍摄日期已知和未知两种情况下，分别建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用该模型求解出若干个可能的拍摄地点。

二、模型假设与约定

1. 假定直杆与水平地面垂直。
2. 假定摄像机与被摄直杆的位置都是固定的。
3. 假定直杆在水平地面的影子仅仅由于太阳光照形成，不考虑建筑群对太阳光阻挡、空气颗粒物、外界灯源等因素对影子形成的影响。
4. 假设地球为标准球体，均匀自转，忽略平太阳时与真太阳时的差值。
5. 约定以直杆底端为原点；以平行于赤道的方向为 x 轴，东向为 x 轴正方向；以平行于地轴的方向为 y 轴，北向为 y 轴正方向。

三、符号说明及名词定义

表 1 符号说明及名词定义表

符号	含义
h	直杆高度
l	直杆在水平地面上的影子
θ	直杆影子与水平地面 x 轴的夹角
t_s	太阳时
ω	时角
δ	太阳赤纬角
n	n 为日期序号，表示一年内的第 n 天
ϕ	地理纬度
φ	地理经度
α	太阳高度角
A	太阳方位角
f	适应度函数

四、模型准备

4.1 太阳照射的相关物理量

(1) 太阳时 (t_s)

太阳时是指以太阳日为标准来计算的时间。可分为真太阳时和平太阳时。日晷所表示的时间是真太阳时，钟表所表示的时间是平太阳时。我国采用东经 120 度经圈上的平太阳时作为全国的标准时间，即“北京时间”^[1]。

本文出现的太阳时均为平太阳时，并忽略平太阳时与真太阳时的差值。

(2) 地方时

地方时是以观测者的子午线（经线）为基准的时间，与理论时区的时间有一定时差。地理学上，两地经度相差 15 度，则地方时相差 1 小时。东边的时区时间比西边的时区时间来得早。

(3) 时角 (ω)

时角是以正午 12 点为 0 度开始算，每一小时为 15 度，上午为负下午为正，即 10 点和 14 点分别为 -30 度和 30 度。因此，时角的计算公式^[1]为

$$\omega = 15(t_s - 12) \quad (1)$$

其中 t_s 为地方太阳时（单位：小时）。

(4) 赤纬角 (δ)

赤纬角也称为太阳赤纬^[1]，即太阳直射纬度，其计算公式近似为

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284 + n)}{365} \right) \quad (2)$$

其中 n 为日期序号，表示一年内的第 n 天。例如，1 月 1 日为 $n=1$ ，3 月 22 日为 $n=81$ 。

(5) 太阳高度角 (α)

太阳高度角是太阳相对于地平线的高度角，这是以太阳视盘面的几何中心和理想地平线所夹的角度。太阳高度角可以使用下面的算式，经由计算得到很好的近似值：

$$\sin \alpha = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \quad (3)$$

其中 α 为太阳高度角， ω 为时角， δ 为当时的太阳赤纬， φ 为当地的纬度^[2]。

(6) 太阳方位角 (A)

太阳方位角是太阳在方位上的角度，它通常被定义为从北方沿着地平线顺时针量度的角^[3]。它可以利用下面的公式，经由计算得到良好的近似值。

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \alpha \cdot \sin \phi}{\cos \alpha \cdot \cos \phi} \quad (4)$$

因为公式是使用余弦函数，所以方位角永远是正值，因此，角度永远被解释为小于 180 度，而必须依据时角来修正。当时角为负值时(上午)，方位角的角度小于 180 度，时角为正值时(下午)，方位角应该大于 180 度，即要取该角与 360 度的差值的绝对值。

4.2 遗传算法

1975 年 Michigan 大学的 J.Holland 教授提出“遗传算法”的概念。遗传算法是模拟达尔文生物进化论的自然选择和孟德尔遗传学机理的生物进化过程的计算模型，是一种通过模拟自然进化过程搜索最优解的方法^[4]。遗传算法的基本步骤如下：

- 1) 随机初始化种群和染色体；
- 2) 计算种群适应度，选取最优个体；
- 3) 根据种群适应度进行选择、交叉和变异操作；
- 4) 循环计算，直至满足停止准则为止。

五、模型的建立与求解

5.1 模型 I：影子长度变化模型

5.1.1 问题 I 分析

以固定直杆的影子长度为目标函数，建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律。问题 I 中直杆长度已知，所以只需直杆所在处的太阳高度角即可计算出直杆影子的长度。太阳高度角可根据当地的经纬度、当时的日期及太阳赤纬角求得。另外，问题 I 中所给时间为北京时间，即东经 120 度的地方平太阳时，与直杆所在地天安门广场（东经 116 度 23 分 29 秒）的地方时有 14.5 分钟的时差。

5.1.2 模型 I 的建立

以某地直杆影子形成的几何示意图为研究对象：

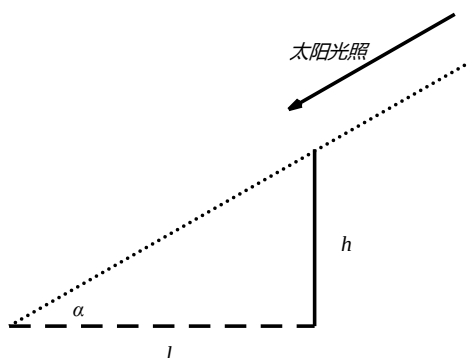


图 1 影子形成几何示意图

其中， h 为直杆高度， l 为影子长度， α 为当地太阳高度角。所以目标函数为

$$l = \frac{h}{\tan \alpha} \quad (5)$$

由上文模型准备中的式(1)(2)(3)可知：

$$\sin \alpha = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega$$

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi(284+n)}{365} \right)$$

$$\omega = 15(t_s - 12)$$

而且

$$t_s = t_{s\text{北京}} + \frac{\varphi - 120}{15} \quad (6)$$

其中，纬度 $\phi = 39^{\circ}54'26''$ ，日期序数 $n = 295$ ， t_s 为地方平太阳时， $t_{s\text{北京}}$ 为北京时间。

5.1.3 模型 I 的求解与结果分析

针对以直杆影子长度为目标函数的模型，根据问题 1 所给数据，利用 Matlab 求解可得影子长度的变化曲线。

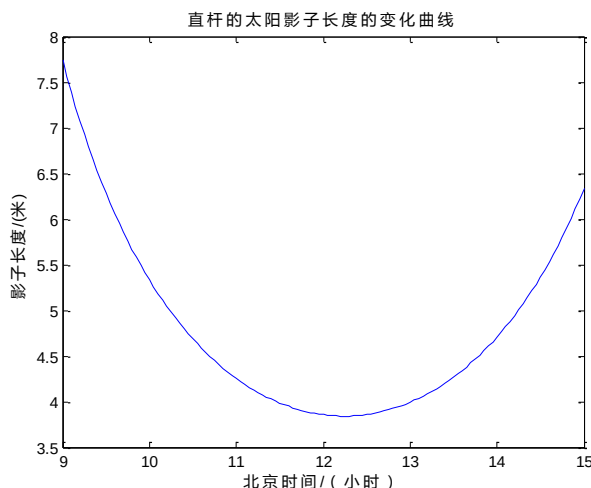


图 2 模型 I 影子长度变化曲线

结果分析：

据图 2 可得，影子长度从北京时间上午 9 时开始变短，至北京时间（ 120°E ）12 时 14 分达到最小长度，随后，影子长度变长。影子长度变化趋势符合实际情况。而且，当东经 120° 度为 12 时 14 分的时候，东经 $116^{\circ}23'29''$ 恰好为 12 时整。当地方时为 12 点时，太阳直射该经线，该经线上直杆影子朝向正北（或正南），即东西方向影子长度为零。如忽略太阳直射纬度在一天内的微小位移，可认为此时影子长度最短。所以，模型 I 合理性很高。

5.2 模型 II：地点推算模型

5.2.1 问题 II 分析

问题 II 中，已知固定直杆在确定日期的确定时间段内的太阳影子顶点坐标数据，需要根据顶点坐标变化情况建立模型推算直杆所处地点的经纬度。首先，利用 Excel 软件对附件 1 的顶点坐标数据进行处理（附录一），得到不同时刻的直杆影子与水平地面 x 轴的夹角。然后，根据影子夹角与太阳方位角的线性关系计算得太阳方位角 A_{real} 。由模型准备中可知，太阳高度角与所处地的纬度、经度、日期序号及地方时相关，而且问题 II 中日期已知。所以，以计算不同经纬度在题目所给定时间下的太阳方位角 A 与附件 1 数据处理所得太阳方位角 A_{real} 的吻合度作为目标函数，进一步将太阳影子定位问题转化为非线性规划问题。

5.2.2 模型II的建立

影子夹角与太阳方位角的示意图如下：

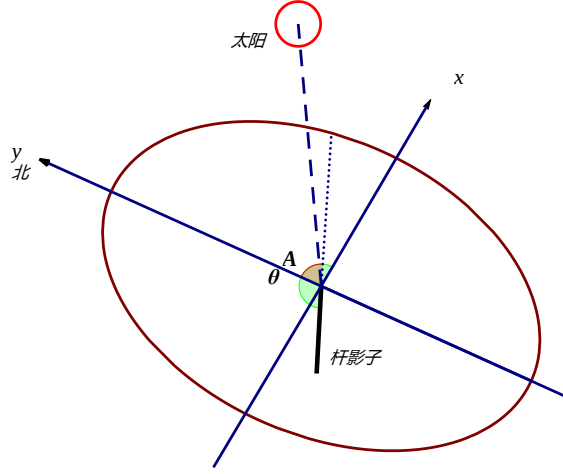


图 3 影子夹角与太阳方位角示意图

其中， A 表示太阳方位角， θ 表示直杆影子与 x 轴正方向的夹角。而且

$$A_{real} = 270^\circ - \theta \quad (7)$$

利用遗传算法求解非线性规划问题的最优解。初始种群的基因中携带决定经度、纬度、日期序号和地方时的遗传信息，将非线性规划的目标函数作为遗传算法的适应度函数。通过遗传过程中的选择、交叉、变异过程，种群中接近目标函数的基因被不断的保留进化，而远离目标函数的基因被淘汰，反复循环直至找到适应度最高的基因型，其对应的就是直杆最可能所处位置的经纬度。

根据模型准备中的式(1)-(4)，可由经纬度、日期序号、地方时计算得太阳方位角：

$$A = \arccos\left(\frac{\sin \delta - \sin \alpha \cdot \sin \phi}{\cos \alpha \cdot \cos \phi}\right) \quad (8)$$

以计算每个遗传个体对应的太阳方位角 A 与附件数据处理所得实际太阳高度角 A_{real} 的绝对误差来衡量吻合度，并将绝对误差累加值作为目标函数，即适应度函数。适应度函数数值越低，适应度越高，也即越接近所求最优解。所以目标函数为

$$\min f(A) = \sum |A - A_{real}| \quad (9)$$

约束条件为

$$\text{s.t.} \begin{cases} \omega_{up} < \omega < \omega_{down} \\ \omega_{down} = \arccos(-\tan \phi \cdot \tan \delta) \\ \omega_{up} = -\omega_{down} \end{cases} \quad (10)$$

其中 ω_{up} 为日出时角， ω_{down} 为日落时角。

5.2.3 模型II的求解与结果分析

经多次验算，遗传算法参数最终选定为进化代数为 250，交叉概率为 0.8，变异概率为 0.2。针对适应度函数求解，可得最优解为(36.5790°N, 116.6429°E)，适应度函数值为 33.1398。即直杆位置为北纬 36.5790°，东经 116.6429°，在 Google 地图搜索经纬度，可知此处为中国山东省德州市齐河县。

结果分析：

在 2015 年 4 月 18 日，太阳直射南纬 10.51°，在直杆所在地的南面，所以影子朝北向；直杆所在经度在东经 120°的西面，地方时相对北京时间延后，所以根据附件 1 的北京时间数据，此时直杆所在地地方时为下午，太阳在直杆西面，影子朝东向。这与附件 1 中直杆影子定点坐标数据相符合。

在 21 个时间点（每 3 分钟一个时间点）计算所得太阳高度角与实际太阳高度角的绝对误差累加为 33.1398°。考虑到顶点坐标数据测量误差，可认为模型求解结果是合理的。

5.3 模型III：地点及日期推算模型

5.3.1 模型III的分析与建立

问题III中，已知某固定直杆在某段时间内的太阳影子顶点坐标数据，日期未知，需要根据顶点坐标变化情况建立模型推算直杆所处地点的经纬度及日期。类似模型 II 的方法，先对附件 2 和 3 的数据进行处理，分别得到实际太阳方位角 A_{real} 。在问题III中，太阳高度角 A 可以由未知的经度、纬度、日期计算出来。所以，在模型 II 的基础上，类似地应用遗传算法，将计算所得太阳高度角 A 与实际太阳高度角 A_{real} 的绝对误差累加值作为适应度函数，利用遗传算法求解三维（经度、纬度、日期）非线性规划问题的最优解集。

类似于模型 II，模型III的目标函数为：

$$\min f(A) = \sum |A - A_{real}| \quad (11)$$

其中，约束条件不变（式(10)），遗传基因由二维（经度、纬度）增加至三维（经度、纬度、日期）。

5.3.2 模型III的求解与结果分析

应用遗传算法，求解适应度最高的解集。结果分别为：

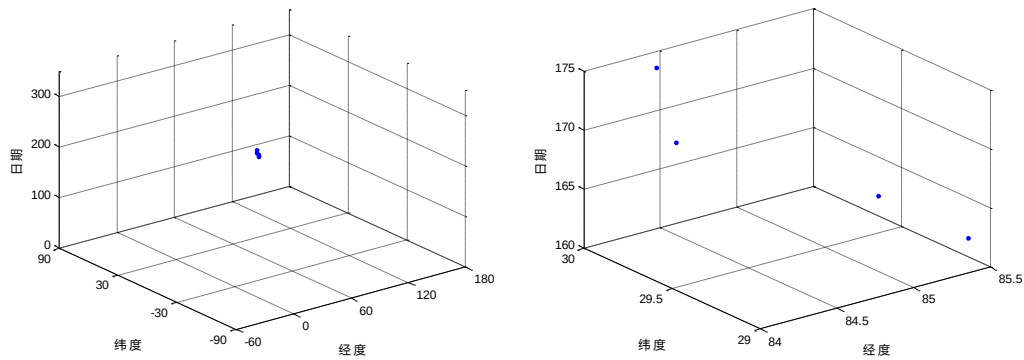


图 4 附件 2 数据解集三维分布图（左）及局部放大图（右）

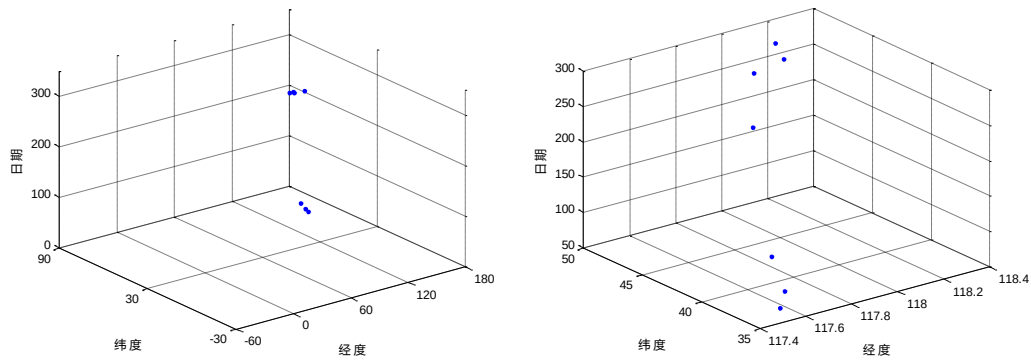


图 5 附件 3 数据解集三维分布图（左）及局部放大图（右）

观察解集三维分布图，发现解在日期的分布上有较明显的分离，所以分别对附件 2 和 3 的解集取 20 个最优解以日期作为参数进行 K-均值聚类分析。聚类分析的结果显示附件 2 和 3 的解集均可以日期分成两类。结果如下：

Final Cluster Centers			Final Cluster Centers		
	Cluster			Cluster	
	1	2		1	2
日期	186.54	161.31	日期	278.95	63.96

图 6 附件 2（左）和附件 3（右）日期聚类图

据地理学知识可知，太阳直射点在南北纬回归线之内做往返循环运动。对于北半球而言，在北纬 0° - $23^{\circ}56'$ 之间，太阳直射点在一年中有两次经过同一纬度，而且这两个日期大约关于夏至日 6 月 22 日对称。忽略太阳直射点在一天内的微小位移，可认为一年内北半球某地有两天的日照情况是一致的。南半球亦然，两日期大约关于冬至日 12 月 22 日对称。

这与聚类分析的结果相符合，说明模型 III 是合理可行的。根据聚类分析的结果，取每类中适应度最高的解，即最有可能的地点及日期。

表 2 附件 2 数据求解地点经纬度及日期

经纬度	(29.0360°N, 84.6533°E)	(29.0964°N, 85.4660°E)
日期	7 月 7 日	6 月 11 日

*N 表示北纬, S 表示南纬, E 表示东经; 日期以一年 365 天计算。下同。

在 Google 地图上搜索, 可知两地理位置分别为中国西藏自治区日喀则地区萨嘎县和西藏自治区日喀则地区吉隆县。

表 3 附件 3 数据求解地点经纬度及日期

经纬度	(42.1231°N, 117.8127°E)	(47.2570°N, 118.1280°E)
日期	3 月 3 日	10 月 1 日

在 Google 地图上搜索, 可知两地理位置分别中国河北省承德市围场县和蒙古国 Khalkhgol。

5.4 模型Ⅳ：视频处理模型

5.4.1 模型Ⅳ的分析与建立

问题Ⅳ中, 已知直杆的高度, 但摄影机的视角不明, 即无法确定杆影的朝向, 所以不能根据太阳方位角进行定位。由模型准备中的式(3)可知太阳高度角与所在地的经纬度、日期序号及地方时相关, 因此, 利用太阳高度角 α 进行定位。

首先, 计算视频中各个时刻直杆影子长度。对附件 4 的视频进行处理以测取准确的影子长度, 步骤为:

视频获取 → 提取特定帧图像 → 转化为灰度 → 转换图像视角 → 测量影长

用 Matlab 读取视频文件, 并将特定帧 (每 4500 帧, 视频时间间隔 3 分钟) 共 14 张图像提取并保存, 为方便以后处理测量, 将图像转化为灰度图像。

在摄影过程中, 除平面外都是三维物体, 摄像机根据透视原理将三维图像转化为二维图像的过程中, 会造成许多的空间信息的丢失^[5]。已知直杆垂直于水平地面, 而影子在水平地面内, 因此直杆应与影子相互垂直。而在摄影中由于透视原理会在图像中呈现一个小于 90 度的角度, 而且图像上单位距离所代表的实际距离不同, 因此需将图像视角进行转化, 将直杆和影子转换到同一平面内在进行计算。使用 CAD-KAS Photogrammetric image rectification 1.0 软件完成灰度图像的视角转换。

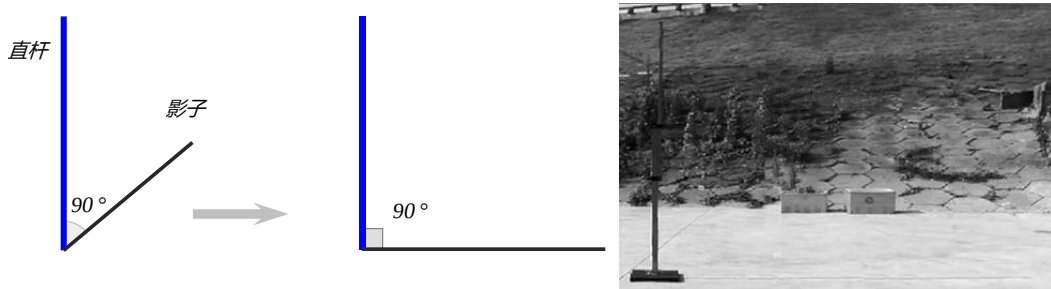


图 7 视角转换示意图（左）及灰度图像视角转换图（右）

最后将所有经过视角转换的图像导入 AutoCAD 软件中，利用快速测距功能，测量杆长和影长，并经过比例转换得每个时刻对应的实际影子长度。结果如下：

表 4 视频处理所得影子长度

时刻	8:54:06	8:57:06	9:00:06	9:03:06	9:06:06	9:09:06	9:12:06
影长(m)	2.3846	2.3668	2.3220	2.2597	2.2350	2.1680	2.1386
时刻	9:15:06	9:18:06	9:21:06	9:24:06	9:27:06	9:30:06	9:33:06
影长(m)	2.0874	2.0490	1.9963	1.9587	1.9504	1.9604	1.8475

由图 2 知实际太阳高度角 α_{real} 可由影长求得：

$$\tan \alpha_{real} = \frac{h}{l} \quad (12)$$

理论太阳高度 α 可由经纬度、日期序号及地方时计算得，如式(3)

$$\sin \alpha = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega$$

将理论的太阳高度角 α 与实际测出的太阳高度角 α_{real} 的绝对误差累加值作为目标函数，并将该目标函数作为遗传算法的适应度函数。适应度函数值越小，适应度越高，求解个体越接近最优解。所以

$$\min f = \sum_{i=1}^{14} |\alpha - \alpha_{real}| \quad (13)$$

约束条件为

$$s.t. \begin{cases} \omega_{up} < \omega < \omega_{down} \\ \omega_{down} = \arccos(-\tan \phi \cdot \tan \delta) \\ \omega_{up} = -\omega_{down} \end{cases} \quad (14)$$

5.4.2 模型IV的求解与结果分析

应用遗传算法，求解得适应度最高的解集。结果分别为：

(1)拍摄日期已知的情况下

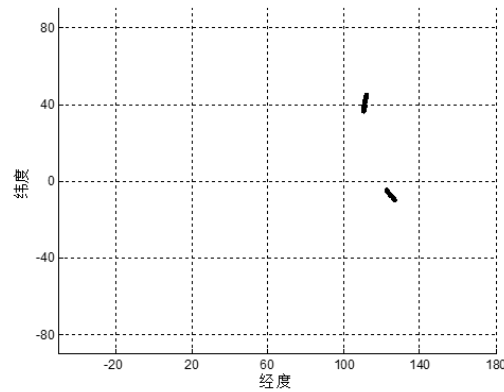


图 8 问题IV解集二维分布图

观察图 7，发现解集（经纬度）较为明显聚集于两区域，所以对以上解集中适应度最高的 20 个解以经度、纬度作为参数进行聚类分析。聚类分析结果显示该解集可明显分为两类。结果如下：

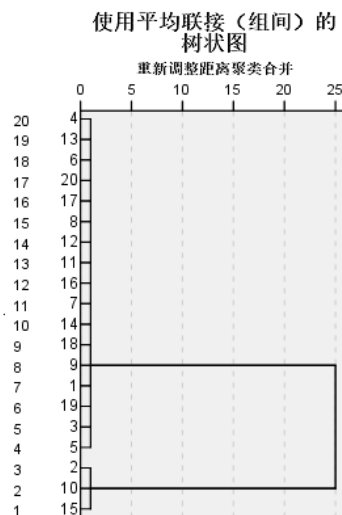


图 9 模型IV解集聚类树状图

分别取这两类中适应度最高的点，分别为（37.9231°N，110.4611°E）和（6.2121°S，123.7418°E），在 Google 地图搜索，可知分别位于中国陕西省榆林市佳县和印度洋班达海（若此处为陆地则可出现符合题目数据的影子信息）。

结果分析：

因为拍摄日期确定，所以拍摄时太阳直射点的纬度也确定。然而从视频中无法确定摄影机的视角，无法确定影子的朝向，所以在同一日期，直杆可以在太阳直射纬度的北方和南方都能获取相同的影长变化情况。即在此情况下，直杆所在地有两个地点。这说明模型IV是合理的，求解结果符合实际。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/365004142120011300>