

第 7 章 电力系统小干扰稳定分析

电力系统在运行过程中无时不遭受到一些小的干扰，例如负荷的随机变化及随后的发电机组调节；因风吹引起架空线路间距离变化从而导致线路等值电抗的变化，等等。这些现象随时都在发生。和第6章所述的大干扰不同，小干扰的发生一般不会引起系统结构的变化。电力系统小干扰稳定分析研究遭受小干扰后电力系统的稳定性。

系统在小干扰作用下所产生的振荡如果能够被抑制，以至于在相当长的时间以后，系统状态的偏移足够小，则系统是稳定的。相反，如果振荡的幅值不断增大或无限地维持下去，则系统是不稳定的。遭受小干扰后的系统是否稳定与很多因素有关，主要包括：初始运行状态，输电系统中各元件联系的紧密程度，以及各种控制装置的特性等等。由于电力系统运行过程中难以避免小干扰的存在，一个小干扰不稳定的系统在实际中难以正常运行。换言之，正常运行的电力系统首先应该是小干扰稳定的。因此，进行电力系统的小干扰稳定分析，判断系统在指定运行方式下是否稳定，也是电力系统分析中最基本和最重要的任务。

虽然我们可以用第6章介绍的方法分析系统在遭受小干扰后的动态响应，进而判断系统的稳定性，然而利用这种方法进行电力系统的小干扰稳定分析，除了计算速度慢之外，最大的缺点是当得出系统不稳定的结论后，不能对系统不稳定的现象和原因进行深入的分析。李雅普诺夫线性化方法为分析遭受小干扰后系统的稳定性提供了更为有力的工具。借助于线性系统特征分析的丰富成果，李雅普诺夫线性化方法在电力系统小干扰稳定分析中获得了广泛的应用。

下面我们首先介绍电力系统小干扰稳定分析的数学基础。

李雅普诺夫线性化方法与非线性系统的局部稳定性有关。从直观上来理解，非线性系统在小范围内运动时应当与它的线性化近似具有相似的特性。

将式(6-290)所描述的非线性系统在原点泰勒展开，得

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|_{\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|_{\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_e} \quad \text{如果 } h(\Delta \mathbf{x}) \text{ 在邻域内是 } \Delta \mathbf{x} \text{ 的高阶无穷小}$$

量，则往往可以用线性系统

的稳定性来研究式(6-288)所描述的非线性系统在点 $\mathbf{x}_e$ 的稳定性[1]

- (1) 如果线性化后的系统渐近稳定，即当 A 的所有特征值的实部均为负，那么实际的非线性系统在平衡点是渐近稳定的。
- (2) 如果线性化后的系统不稳定，即当 A 的所有特征值中至少有一个实部为正，那么实际的非线性系统在平衡点是不稳定的。
- (3) 如果线性化后的系统临界稳定，即当 A 的所有特征值中无实部为正的实部特征值，但至少有一个实部为零的特征值，那么不能从线性近似中得出关于实际非线性系统稳定性的任何结论。

显然，李雅普诺夫线性化方法的基本思想是，从非线性系统的线性逼近稳定性质得出非线性系统在一个平衡点附近的局部稳定性的结论。

在进行电力系统的小干扰稳定分析时，我们总是假设正常运行的系统(运行在平衡点 $x = x_e$ 或 $\Delta x = 0$) 在 $t = t_0$ 时刻遭受瞬时干扰，系统的状态在该时刻由 0 点转移至 $\Delta x(t_0)$ 。这个 $\Delta x(t_0)$ 就是干扰消失后系统自由运动的初始状态。由于干扰足够小， $\Delta x(t_0)$ 处 $\Delta x = 0$ 的一个足够小的邻域内，从而使得 $h(\Delta x)$ 在 $\Delta x = 0$ 的邻域内是 Δx 的高阶无穷小量。因此，根据李雅普诺夫线性化理论，可以用线性化系统的稳定性来研究实际非线性电力系统的稳定性。为此，将描述电力系统动态特性的微分-代数方程式(6-1)、式(6-2)在稳态运行点 $\begin{pmatrix} x_{(0)} \\ y_{(0)} \end{pmatrix}$ 线性化，得式中：

记 R 表示实数集合， R_n 表示 n 维实向量空间， $R_{m \times n}$ 为所有 m 行 n 列实数矩阵组成的向量空间。定义 R_n 等于 $R_{n \times 1}$ ，即 R_n 中的元素是列向量；另一方面， $R_{1 \times n}$ 中的元素是行向量。显然，上式中 $\tilde{A} \in R_{n \times m}$, $\tilde{B} \in R_{n \times m}$, $\tilde{C} \in R_{n \times m}$, $\tilde{D} \in R_{n \times m}$ 。

在式(7-3)中消去运行向量 Δy ，得到式中：

矩阵 $\tilde{A} \in R_{n \times n}$ ，通常被称为状态矩阵或系数矩阵。

由此可见，小干扰稳定性分析实际上是研究电力系统的局部特性，即干扰前平衡点的渐近稳定性。显然，应用李雅普诺夫线性化方法研究电力系统小干扰稳定性的理论基础是干扰应足够微小。因此我们说这样的干扰为小干扰，当此干扰作用

于系统后，暂态过程中系统的状态变量只有很小的变化，线性化系统的渐近稳定性能够保证实际非线性系统的某种渐近稳定性。

至此，我们知道，稳态运行情况下电力系统遭受到足够小的干扰后，可能出现两种不同的结局：一种结局是，随着时间的推移干扰逐渐趋近于零（即有扰运动趋近于无扰运动，对应于矩阵 A 的所有特征值都具有负实部），我们称系统在此稳态运行情况下是渐进稳定的，显然受扰后的系统最终将回到受扰前的稳态运行情况；另一种结局是，无论初始干扰如何小，干扰 Δx 都将随着时间的推移无限增大（对应于矩阵 A 至少有‘一个实部为正的‘特征值），显然系统在此稳态运行情况下是不稳定的。对于实际运行的电力系统来说，分析临界情况下的系统稳定性并无多大意义，可以视它为系统小干扰稳定极限的情况。

最后需要说明的是，前面在研究系统的稳定性时，假设干扰是瞬时性的，即系统的状态在瞬时由 $\Delta x = 0$ 转移至此 $\Delta x(t_0)$ ，并且引起变化的干扰消失。这同样适用于研究永久性干扰下系统的稳定性，即此时我们可以把它考虑成研究系统在新的平衡点遭受瞬时性干扰的稳定性。

另外，对一些给定的小干扰不稳定或阻尼不足的运行方式，可以通过特征分析方法得到一些控制参数和反映系统稳定性的特征值之间的关系，进而得出提高系统小干扰稳定性的最佳方案。因而进行电力系统的小干扰稳定分析显得尤为重要。这样，电力系统在某种稳态运行情况下受到小的干扰后，系统的稳定性分析可归结为

- (1) 计算给定稳态运行情况下各变量的稳态值。
- (2) 将描述系统动态行为的非线性微分-代数方程在稳态值附近线性化，得到线性微分-代数方程。
- (3) 求出线性微分-代数方程的状态矩阵 A ，根据其特征值的性质判别系统的稳定性。

以上讨论的小干扰稳定问题主要涉及发电机组之间的机电振荡，这时我们将发电机组看成是集成的刚体质量块。然而，实际的大型汽轮发电机组的转子具有很复杂的机械结构，它是由几个主要的质量块，如各个汽缸的转子、发电机转子、励磁机转子等，通过有限刚性的轴系联接而成。当发电机受到干扰后，考虑到各质量块之间的弹性，它们在暂态过程中的转速将各不相同，从而导致各质量块之间

发生扭(转)振(荡) (Torsional Oscillation)。由于各质量块的转动惯量小于发电机组总的转动惯量，因此各质量块之间扭振的频率要高于发电机组之间机电振荡的频率，这个频率一般在十几到四十几赫兹之间，因此也常将这种振荡称为次同步振荡 (Subsynchronous Oscillation, SSo)。

次同步振荡发生后，在发电机组轴系中各质量块之间将产生扭力矩。轴系反复承受扭力矩会造成疲劳积累，从而降低轴系的使用寿命；当扭力矩超过一定限度后会造成大轴出现裂纹甚至断裂。系统出现的次同步振荡主要与励磁控制、调速器、HVDC 控制及串联电容器补偿的输电线路的相互作用有关。进行电力系统的次同步振荡分析时，首先应建立汽轮发电机组的轴系模型；另外，由于扭振的频率较高，故系统中各元件不能再采用准稳态模型，而应计及系统的电磁暂态过程。对次同步振荡的详细分析已超出了本书的既定范围，有关电力系统次同步振荡分析的模型及方法，有兴趣的读者可参阅文献[5, 6]。

本章首先推导出电力系统各动态元件的线性化方程，并给出了全系统线性化方程的形成方法和小干扰稳定计算的基本步骤，接着讨论了小干扰稳定分析中的特征值问题和电力系统振荡分析方法，最后介绍了大规模电力系统小干扰稳定分析的几种特殊方法。

7.2 电力系统动态元件的线性化方程

在进行电力系统小干扰稳定分析时，需要将各动态元件的方程线性化，下面我们推导各动态元件的线性化方程。在进行线性化时，通常不考虑所有控制装置中限制环节的作用。其原因是，在正常的稳态运行情况下，控制装置中状态变量的稳态值一般在其限制环节的限制之内。当干扰足够小时，各状态变量的变化也足够小，使得其变化范围不会超出其限制环节的限制。至于一些控制装置中的失灵区，一般认为失灵区很小，可以忽略不计；而当失灵区很大时，可以认为整个控制系统不起作用。

7.2.1 同步发电机组的线性化方程

1. 同步电机。

对式(6-114)一(6-116)描述的同步电机方程，在给定的稳态运行情况下，系统各变量的稳态值 $\delta_{(0)}$, $\omega_{(0)}$, $E'_{q(0)}$, $E'_{q(0)}$, $E'_{d(0)}$, $E'_{d(0)}$, $I_{d(0)}$, $I_{q(0)}$, $V_{d(0)}$, $V_{q(0)}$, $P_{m(0)}$, $P_{e(0)}$, $E_{fq(0)}$ 可按式(6-74)一(6-78)和式(6-118)一(6-122)算出。将各方程在稳态值附近线性化，可得到同步电机的线性化方程

(2) 励磁系统。

以图 5-16 所示的采用可控硅调节器的直流励磁机励磁系统为例，根据式(6-136)一(6-140)，可以推导出其线性化方程。

对测量滤波环节，由于 $V_c = |\dot{V} + jX_c I|$ 。根据坐标变换式(5-63)，发电机端电压和电

流用它们的 d, q 分量可表示为

这时显然有

将上式在稳态值附近线性化可得到

式中：

对式(6-136)线性化，并格式(7-10)代入其中，从而消去 ΔV_c ，即得到测量滤波环节的线性化方程

用式(6-140)模拟励磁机的饱和特性，将式(6-139)在稳态运行点线性化，可得到励磁机的线性化方程

最后，将式(6-137)、式(6-138)的线性化方程和式(7-12)、式(7-3)一起，并经过整理后得到整个直流励磁机励磁系统的线性化方程

(3) PSS。

对于图 5-14 所示的电力系统稳定器，根据式(6-142)、式(6-143)，当输入为转速偏差，即 $V_{IS} = \omega - \omega_s$ 时，可依次列出如下线性化方程：

上式经适当整理后，可得到 PSS 线性化方程的状态表达式

(4) 原动机及调速系统。

对如图 5-24 所示的水轮机及其调速系统，可以根据式(6-171) — (6-177) 得到其线性化方程

2. 同步发电机组线性化方程的矩阵描述及坐标变换

1) 发电机组方程的矩阵描述。

当发电机组采用式(7-6)、式(7-7)、式(7-9)、式(7-15)、式(7-17)描述时，将其中的状态变量按如下顺序组成向量：

并定义

这时各发电机微分方程的线性化方程写成如下矩阵形式：

而定子电压方程的线性化方程表示为

以上两式中系数矩阵 $\bar{A}_g, B_{Ig}, B_{Vg}, P_g, Z_g$ 的元素可以很容易地通过比较式(7-20)和式(7-6)、式(7-9)、式(7-15)、式(7-17)及比较式(7-12)和式(7-7)而得到，即在同步电机、励磁系统、原动机及其调速系统等采用其他模型时，同上原理，总可以先写出各自的线性化方程，然后表示成式(7-20)、式(7-21)的形式。另外还需注意，式(7-18)中各状态变量的排序并不是一成不变的，不同的排序下有相应的矩阵。

(2) 坐标变换。

式(7-20)和式(7-21)中的 ΔV_{dqq} 和 ΔI_{dqq} 为各发电机本身 d, q 轴电压和电流分量的

偏差，因此必须把它们转换成统一的同步旋转坐标参考轴 $x-y$ 下的相应分量，以便将它们和电力网络联系起来。

对于发电机端电压，由坐标变换式(5-62)可知

稳态值 $V_{d(0)}, V_{q(0)}, V_{x(0)}, V_{y(0)}$ 和 $\delta_{(0)}$ 也应满足式(7-22)，即

将式（7-22）在稳态值附近线性化，得
利用式（7-23），式（7-24）可另写为
简写成

式中：

很明显， $T_{g(0)}$ 为正交矩阵，即满足

同理，对发电机电流也可得到以下关系：

式中

将式（7-26）和式（7-28）代入式（7-21）消去 ΔV_{dqg} 和 ΔI_{dqg} ，可以得到

式中：

将式（7-26）和式（7-28）代入式（7-20）消去 ΔV_{dqg} 和 ΔI_{dqg} ，并利用式（7-29）、

式（7-30）消去 ΔI_g ，可以得到

式中：

式（7-31）和式（7-29）便组成每个发电机组的线性化方程，它类似于一般线性定常系统的状态方程和输出方程。

7.2.2 负荷的线性化方程

在小干扰稳定性分析中，负荷大都采用电压静态特性模型。如果要考虑一些感应电动机负荷，可以用类似于推导同步电机线性化方程的方法得到感应电动机的线性化方程。

无论采用什么形式模拟负荷的电压静特性，负荷节点注入电流与节点电压的偏差关系总可以写成如下形式：

式中：

其中的系数可由负荷节点注入电流与节点电压的关系式求得，即

当采用二次多项式模拟负荷的电压静特性时，可以利用如式（6-48）所示的负荷节点注入电流与节点电压的关系和式（7-35）直接求出式（7-34）中的有关系数：

当采用指数形式模拟负荷的电压静特性时，可以利用如式（6-49）所示的负荷节点注入电流与节点电压的关系和式（7-35）直接求出式（7-34）中的有关系数：

特别地，当对负荷的电压静特性缺少足够的信息时，通常可以接受的负荷模型是：
 负荷的有功功率用恒定电流（即取 $m = 1$ ）、无功功率用恒定阻抗（即取 $m = 2$ ）模拟。

7.2.3 FACTS 元件的线性化方程

（1）SVC。

由于 $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ ，将它线性化，得

将上式代入式（7-38），经整理后得
 式中：

另外，根据式（6-50）可直接得到 SVC 注入电流和节点电压间的偏差关系
 式中：

这样式（7-40）、式（7-42）便组成了 SVC 的全部线性化方程式。

（2）TCSC。

从式（6-208）、式（6-209）可以直接得到如下线性化方程：

根据式（6-211）可以得到

将上式代入式（7-44），并经整理后得
 式中：

另外，根据式（6-51）可直接得到 TCSC 注入电流和节点电压间的偏差关系
 式中：

这样式（7-46）、式（7-48）便组成了 TCSC 的全部线性化方程式。

7.2.4 直流输电系统的线性化方程

当考虑直流线路的暂态过程时，直流线路以及整流器和逆变器的控制方程如
 式（6-222）、式（6-224）—（6-227）所示，利用式（6-53）中的第一式消去式（6-226）
 中的 V_{dl} ，在忽略对 α, β 限制的情况下，可得到它们在稳态值附近的线性化方程

整流器和逆变器交流母线电压的幅值与其 x, y 分量间的关系为

将上式在稳态值附近线性化，得

将式（7-51）代入式（7-50）消去 ΔV_R 和 ΔV_I ，并经整理后可得

式中：

式中的系数矩阵 A_d, B_d 通过对照式(7-52)和原方程容易得到。

两端直流输电系统的代数方程可以由换流器交直流两侧的功率关系及电流关系推得。对于整流器，将有功功率关系式

在稳定值附近线性化，得

另外，将式（6-52）中第三式两端平方，得

上式的线性化方程为

将式(7-51)代入式(7-55)中消去 ΔV_R ，并注意到整流器注入交流系统的无功功率 $Q_{R(0)} = V_{yR(0)} I_{xR(0)} - V_{xR(0)} I_{yR(0)}$ 总不为零，于是可以从式(7-55)、式(7-57)中解出节点注入电流的偏差，并写成如下矩阵形式：

式中：

对于逆变器，将有功功率关系式

在稳态值附近线性化，得

同样，将式（6-53）中第三式的两端平方，得到的线性化方程为

同理，将式（7-51）代入式（7-61）中消去 ΔV_I ，式（7-61）、式（7-62）表示的电流、电压偏差关系式可以写成如下矩阵形式：

式中：

式（7-58）、式（7-63）组成了直流系统的代数方程

式中：

当直流系统采用其他数学模型时，用同样的方法可导出形如式（7-25）、式（7-65）所示的线性化方程。

7.3 小干扰稳定分析的步骤

7.3.1 网络方程

为了叙述方便，将网络方程式(6-36)写成分块矩阵形式，并注意到网络方程本身是线性的，因而可以直接写出在 $x-y$ 坐标下节点注入电流偏差与节点电压偏差之间的线性化方程

式中：

对各负荷节点，把式(7-33)给出的注入电流偏差与节点电压偏差关系代入上式，即可消去负荷节点的电流偏差。设负荷接在节点 i ，则消去该负荷后的网络方程仅是对原网络方程(7-67)的简单修正：节点 i 的电流偏差变为零，导纳矩阵中的第 i 个对角块变为 $Y_{ii} - Y_{li}$ ，而其他内容不变。

不失一般性，假定网络中节点编号的次序为：先是各发电机所在节点，然后是各 SVC

所在节点，接下来是各 TCSC 的两端节点，再是各直流输电系统交流母线节点(先编整流侧节点，后编逆变侧节点)，最后和其他节点。消去所有负荷节点的电流偏差后，网络方程可写成如下分块矩阵形式：

式中： ΔI_G 和 ΔV_G 分别为由全部发电机节点注入电流和节点电压偏差组成的向量； ΔI_S 和

ΔV_S 分别为由全部 SVC 节点注入电流和节点电压偏差组成的向量； ΔI_T 和 ΔV_T 分

别为由全部 TCSC 节点注入电流和节点电压偏差组成的向量； ΔI_D 和 ΔV_D 分别为

由全部换流器交流母线节点注入电流和节点电压偏差组成的向量； ΔV_L 为其他节

点电压偏差组成的向量。这些向量可表示为

7.3.2 全系统线性化微分方程的形成

由各发电机组的方程式(7-31)、式(7-29)可以组成全部发电机组的方程式

式中：

由各 SVC 的方程式 (7-40)、(7-42) 可以组成全部 SVC 的方程式
式中:

由各 TCSC 的方程式 (7-46)、式 (7-48) 可以组成全部 TCSC 的方程式
式中:

由各两端直流输电系统的方程式 (7-52)、式 (7-65) 可以组成全部两端直流输电系统的方程式

式中:

将式 (7-72)、式 (7-75)、式 (7-78)、式 (7-81) 代入式 (7-69) 消去 ΔI_G 、 ΔI_S 、 ΔI_T 、 ΔI_D ，所得结果与式 (7-71)、式 (7-74)、式 (7-77)、式 (7-80) 一起组成如式 (7-3) 所示的矩阵关系式，其中:

显然， $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 、 $\tilde{C}$ 分别为分块稀疏矩阵，而及和导纳矩阵具有同样的稀疏结构。

用式 (7-83) 中的矩阵 $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 、 $\tilde{C}$ 、 $\tilde{D}$ ，根据式 (7-5) 即可得到状态矩阵 A 。至此已经得到电力系统在稳态运行点的线性化方程式。

最后，有必要说明以下几个问题:

- (1) 如果线性化后的系统渐近稳定，即如果 A 的所有特征值的实部均为负，那么实际的非线性系统在平衡点是渐近稳定的。
- (2) 形成矩阵 A 的方法，在已有的各种商业化程序中可能各不相同，以上仅给出其中的一种形成方法，旨在介绍形成 A 阵的原理和技巧^[4-7, 9, 10]。式 (7-83) 中矩阵 $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 、 $\tilde{C}$ 、 $\tilde{D}$ 的形式多种多样，它与状态变量的次序安排、网络方程的形式、各动态元件的代数方程和网络方程的协调处理方法等有关。不同的方法将影响到程序实现的复杂性和灵活性，但并不影响其特征值的计算结果。
- (3) 以上方程的形成中考虑了发电机组、SVC、TCSC、两端直流输电系统，对电力系统中的其他动态元件可作类似处理。例如，对并联动态元件 (如感应电动机负荷等)，可以仿照以上对发电机的处理方法得到其线性化方程；对多端直流输电系统，可以仿照以上对两端直流输电系统的处理方法得到其线性化方程。然后按规定的顺序将它们安排在整个系统的方程中。

(4) 按照以上方法形成的系数矩阵 A 将必定有一个零特征值。其存在的理由由各发电机转子的绝对角度不是惟一的，换言之，系统中存在一个冗余的转子

角度。事实上，由于各发电机间的功率分配取决于各发电机转子角度的相对值，如果各发电机转子的绝对角度都加上一个固定的值，并不改变各发电机间的功率分配，因而不影响系统的稳定性。若要摒除零特征值，只需选定任意一台发电机的转子角度作为参考，用其余机与该机转子的相对角度作为新的状态变量即可，这时矩阵 A 和相应的状态变量都将降低一阶。

(4) 另外还需注意，当系统中所有发电机的转矩都与转速的变化有关，即摇摆方程的右端无阻尼项且不考虑调速器的作用时，矩阵 A 还将存在一个零特征值。同样，要摒除这个零特征值，只需选定任意一台发电机的转速作为参考，用其余机与该机转速的相对值作为新的状态变量即可，这时矩阵 A 和相应的状态变量也都降低一阶。

在明白了零特征值的来历后，可以在后面的计算步骤 (5) 和 (6) 中不作任何处理，仅需在计算结果中去除零特征值即可。然而应当注意，由于潮流和特征计算的误差，理论上的零特征值在实际上是很小的特征值。

7.3.3 小干扰稳定分析程序的组成

按照前面介绍的内容和方法，可以构成含有 FACTS（例如 SVC、TCSC）的交直流系统的小干扰稳定分析程序。其基本计算过程如下：

(1) 对给定的系统稳定运行情况进行潮流计算，求出系统各节点电压、电流和功率。

(2) 形成式 (7-67) 中的导纳矩阵。

(3) 已知各负荷的功率及负荷节点电压的稳态值为 $P_{(0)}, Q_{(0)}, V_{x(0)}, V_{y(0)}$ 。根据负荷电压静特性参数，应用式 (7-36) 或式 (7-37) 求出式 (7-34) 中的矩阵元素 $G_{xx}, B_{xy}, B_{yx}, G_{yy}$ 用它们修改导纳矩阵中对应于各负荷节点的对角子块。

(4) 首先由式 (6-74) - (6-78) 和式 (6-118) - (6-122) 计算出各发电机组中所有变量的初值，然后分别形成式 (7-20) 和 (7-21) 中的矩阵

$\bar{A}_g, \bar{B}_{lg}, \bar{B}_{vg}, \bar{P}_g, \bar{Z}_g$ 及式 (7-28) 中的矩阵 $T_{g(0)}, R_{vg}, R_{lg}$ 。然后应用式 (7-30) 和式

(7-32) 求出 C_g, D_g, A_g, B_g ，从而得到各发电机组的线性化方程。对其他动态元

件，同同样的方法可得到其线性化方程中的系数矩阵。其至得出系统中所有动态元件的线性化方程。

(5) 按照式 (7-71) — (7-83) 形成矩阵 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ，再应用式 (7-5) 计算出系统的状态矩阵 A 。

(6) 应用 QR 法计算矩阵 A 的全部特征值^[2-4]从而判断系统在所给定的稳态运行情况下的微小干扰稳定性。计算矩阵 A 全部特征值的 QR 法将在下节介绍。

【例 7-1】 9 节点电力系统的单线图、支路数据、发电机参数、正常运行情况下的系统潮流分别如图 6-12、表 6-5、表 6-6、表 6-7 所示。系统频率为 60 Hz。

各负荷均用恒定阻抗模拟。发电机 1 采用经典模型，发电机 2 和 3 采用双轴模型。发电机 2 和 3 均装有自并励静止励磁系统，其参数如下：

另外，各发电机的阻尼系数 D_i 均取为 1.0。

下面研究在正常运行情况下系统的微小干扰稳定性。为简单起见，在以下的矩阵中“空白”表示数 0 或适当维数的 0 矩阵。

【解】 1) 利用潮流结果，根据式 (6-74) — (6-78) 和式 (6-118) — (6-122) 计算出各发电机变量的初值，如表 7-1 所示。负荷的等值导纳见例 6-1，直接并入电力网络。

2) 根据 7.2.1 节的方法得到各发电机组的线性化方程。

发电机 1：不难算出式 (7-20)、式 (7-21)、式 (7-26)、式 (7-28) 中的系数矩阵为最后，根据式 (7-32)、式 (7-30) 和以上矩阵计算出发电机组线性化方程 (7-31)、(7-29) 中的矩阵：

发电机 2 同上原理得到发电机 2 线性化方程的系数矩阵：

发电机 3：同上原理得到发电机 3 线性化方程的系数矩阵：

3) 系统的线性化方程。

显然，式 (7-3) 中的矩阵 [见式 (7-83)] 为

根据式 (7-5) 可得到状态矩阵

4) 状态矩阵 A 的特征值和相应的特征向量。

应用 QR 法求得 A 的全部特征值为

显然，除了我们已知的零特征值外，系统的其他所有特征值都具有负实部，因此系统在给定的运行方式下是小干扰稳定的。

7.4 小干扰稳定分析的特征值问题

既然遭受小干扰后非线性系统的稳定性可由其线性化系统的稳定性决定，而线性系统的稳定性又由状态矩阵 A 的特征值决定，因此下面我们简单介绍状态矩阵 A 的特征分析方法[2,3,6] 从而为进行电力系统的小干扰稳定性分析打下基础。

由上节可见，状态矩阵 A 是一个实不对称矩阵，因此后面的讨论一般仅限于 $A \in R^{n \times n}$ 。另外，在下面的论述中要涉及到复数及复矩阵的计算，记 C 表示复数集合， C_n 表示 n 维复向量空间(列向量)， $C_{m \times n}$ 为所有 m 行 n 列复数矩阵组成的向量空间。复矩阵的标乘、相加、相乘是与实矩阵完全相对应的。但是，转置在复情形下是转置共扼(用上标 H 表示)，即 $C = A^H \Rightarrow c_{ij} = \hat{a}_{ji}$ 。 n 维复向量 x 和 y 的点积是 $s = x^H y = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i y_i$ 。另外，在 p 范数意义下的单位向量(或规范化向量)是指满足于 $\|x\|_p = 1$ 的向量 x 。例如在 1、2 和无穷范数意义下的单位向量 x 分别为

将任一向量变为单位向量的过程称为向量的归一化。

7.4.1 状态矩阵的特征特性

1. 特征值

对于标量参数 $\lambda \in C$ 和向量 $v \in C_n$ ，如果方程有非退化解（即 $v \neq 0$ ），则称 λ 为矩阵 A 的特征值。

要计算特征值，方程（7-85）可写成如下形式：

它具有非退化解的充分必要条件是

展开上式左端的行列式，得到显式的多项式方程

该方程称为矩阵 A 的特征方程，方程左端的多项式称为特征多项式。因为 λ^n 的系数不为零，所以此方程共有 n 个根，这里根的集合称为谱，记为 $\lambda(A)$ 。如果

$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ，则有

而且，如果我们定义 A 的迹为

可以证明 $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ 。

实不对称矩阵 A 的特征值既可能是实数，也可能是复数，并且复特征值总是以共扼对的形式出现。另外，相似矩阵的特征值相同，转置矩阵的特征值不变。

2. 特征向量

对任一特征值 λ_i ，满足方程

的非零向量 $\mathbf{v}_i \in C^n$ 称为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的右特征向量。由于该方程为齐次方程，因而 $k\mathbf{v}_i$ (k 为标量) 也是以上方程的解，即同样是矩阵 A 关于特征值 λ_i 的右特征向量。除非特别声明，以后提到的“特征向量”均指“右特征向量”。一个特征向量定义了一个一维子空间，这个子空间用矩阵 A 左乘保持不变性。

同样，满足方程

的非零向量 $\mathbf{u}_i \in C^n$ ，称为矩阵 A^T 关于特征值 λ_i 的右特征向量。方程(7-90)两边转置，得

称行向量 $\mathbf{u}_i^T$ 为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的左特征向量。

为了简明地表达矩阵 A 的特征特性，将 A 的所有特征值组成对角矩阵 Λ ，相应的右特征向量按列组成矩阵 X_R ，相应的左特征向量按行组成矩阵 X_L ，即以上三个 n 阶方阵称为模态矩阵，

利用式 (7-92)，方程 (7-89) 和 (7-91) 可表示成如下矩阵形式：

在上式中，前一式两边左乘 X_L ，后一式两边右乘 X_R ，即可得到以下关系式：

或写成

显然，相应于不同特征值的左、右特征向量是正交的；相应于同一特征值的左、右特征向量的乘积为一非零常数，通过对左、右特征向量的归一化处理总可以使这个常数为 1。即有

注意， $\mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_j$ 并不是通常理解的内积。上式的矩阵形式为

根据式 (7-93) 和式 (7-96) 可得

3. 动态系统的自由运动

由状态方程(7-4)可看出，每个状态变量的变化率都是所有状态变量的线性 和。由于状态之间的耦合，很难对系统的运动有一个明晰的概念。

为了消去状态变量间的耦合，引入一个新的状态向量 z ，它和原始状态向量 Δx 间的关系定义为

把上式代入方程 (7-4), 并考虑式 (7-97)，状态方程即可改写为

它和原方程的差别在于： Λ 为对角阵，而 A 一般不是对角阵。方程 (7-99) 表示 n 个解耦的一阶方程

它的时域解为

式中： z_i 的初值 $z_i(0)$ 可根据式 (7-98) 用 u_i^T 和 $\Delta x(0)$ 表示，即

将式(7-101)、式(7-102)代入变换式(7-98)，可得到原始状态向量的时域解

其中第 i 个状态变量的时域解为

式中： v_{ik} 表示向量 v_k 的第 i 个元素。上式给出了用特征值、左特征向量和右特征向量表示系统自由运动时间响应的表达式。特征值 λ_i 对应于系统的第 i 个模态 (Mode)，与之相应的时间特性为 $e^{\lambda_i t}$ ，这样系统自由运动的时间响应就可以说成是 n 个模态的线性和。

因此，系统的稳定性可以由特征值决定：

(1) 一个实特征值相应于一个非振荡模态。负实特征值表示衰减模态，其绝对值越大，则衰减越快；正实特征值表示非周期性不稳定。与实特征值有关的特征向量和 $z(0)$ 都具有实数值。

(2) 复特征值总是以共扼对的形式出现，即

每对复特征值相应于一个振荡模态。与复特征值有关的特征向量和 $z(0)$ 都具有复数值。

因此

具有这样的形式

显然，特征值的实部刻画了系统对振荡的阻尼，而虚部则指出了振荡的频率。负实部表示衰减振荡；正实部表示增幅振荡。振荡的频率(Hz)为

定义阻尼比为

它决定了振荡幅值的衰减率和衰减特性。

7.4.2 线性系统的模态分析

1. 模态与特征向量

前面已经讨论了系统的时间响应，向量 Δx 和 z 的关系为

变量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 式表示系统动态性能的原始状态变量。变量 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是变换后的状态变量，每一个变量仅对应于系统的一个模态。

从方程(7-107)的第一式可以看出，右特征向量呈现出模态的表现形式，即当特定的模态被激活时，各状态变量的相对活动情况。例如，右特征向量 v_i 中的第 k 个元素 v_{ki} 给出了状态变量 x_k 在第 i 个模态中的活动程度。

v_i 中各元素的模值表征了 n 个状态变量在第 i 个模态中的活动程度，而各元素的角度则表征了各状态变量关于该模态的相位移。

从方程(7-107)的第二式可以看出，左特征向量 u_i^T 确定呈现第 i 个模态时原始状态变量的组合方式。这样，右特征向量 v_i 中的第 k 个元素度量变量 x_k 在第 i 个模态中的活动，而左特征向量 u_i^T 中的第 k 个元素加权这个活动对策 i 个模态的贡献。

2. 特征值灵敏度

我们首先考查特征值对状态矩阵 A 各元素 a_{kj} (A 的 k 行 j 列元素)的灵敏度。

将(7-89)两边对 a_{kj} 求偏导数，得

上式两边左乘行向量 u_i^T ，并考虑式(7-91)、式(7-95)，可得到

显然， $\partial A / \partial a_{kj}$ 中除第 k 行、 j 列的元素为1外，其余元素都为零，因此

式中： v_{ji} 表示向量 v_i 的第 j 个元素， u_{ki} 表示向量 u_i 的第 k 个元素。

设 α 是标量， $A(\alpha)$ 是由元素 $a_{kj}(\alpha)$ 组成的 n 阶方阵，如果对一切的 k 和 j ,

$a_{kj}(\alpha)$ 都是可微函数，则

这样，仿照以上推导可得到特征值对标量 α 的灵敏度

3. 参与因子(Participation Factor)

为了确定状态变量和模态之间的关系，把右特征向量和左特征向量结合起来，形成如下的参与矩阵(ParticipationMatrix) P ，用它来度量状态变量与模态之间的关联程度：

称参与矩阵 P 的元素 $p_{ki} = u_{ki} v_{ki}$ 为参与因子[12]，它度量了第 i 个模态于第 k 个状态变量 Δx_k 的相互参与程度。称矩阵 P 的第 i 列为 p_i 第 i 个模态的参与向量。由于 v_{ki} 度量 Δx_k 在第 i 个模态中的活动状况，而 u_{ki} 加权这个活动对模态的贡献，因此它们的乘积 p_{ki} 即可度量净参与程度。左、右特征向量相应元素的乘积导致 p_{ki} 是无量纲的，即独立于特征向量单位的选择。

设 $\Delta x(0) = e$ ，即 $\Delta x_k(0) = 1$ 且 $\Delta x_{j \neq k}(0) = 0$ ，则由式(7-102)得 $z_i(0) = u_{ki}$ ，根据式(7-103)可得

这个方程表明，被初值 $\Delta x_k(0) = 1$ 激活的第 i 个模态，以系数 p_{ki} 参与在响应 $\Delta x_k(t)$ 中，参与因子由此而得名。

对于所有的模态或所有的状态变量，有
上式不难得到证明。在式(7-114)中令 $t = 0$ ，容易得到矩阵 P 的第 k 行元素之和为 1；而矩阵 P 的第 i 列元素之和等于 $u_i^T v_i$ ，根据式(7-95)可知其值为 1。

另外，参看式(7-110)可知，参与因子 p_{ki} 实际上等于特征值 λ_i 对状态矩阵 A 的对角元素 a_{kk} 的灵敏度：

7.4.3 特征值的计算

1. QR 法

对于给定的 $A \in R^{n \times n}$ 和正交阵 $Q_0 \in R^{n \times n}$ ，考虑如下迭代：

其中，每个 $Q_k \in R^{n \times n}$ 都是正交阵，每个 $R_k \in R^{n \times n}$ 都是上三角阵。由归纳法可得这样，每个 A_k 都与 A 相似。由于 A 有复特征值，因此 A_k 不会收敛到严格的、“特征值暴露”的三角阵，而只能满足于计算称为实 Schur 分解的另一种分解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/365302340131011234>