

五育联盟——巅峰计划·河南省 2024~2025 学年

高三年级秋季学期第一次综合检测

数学试题

★祝考试顺利★

本试题卷共 6 页，19 题，全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{Z})$, $z \cdot \bar{z} = 25$ ，且 z 在复平面内对应的点关于原点的对称点位于第二象限，则 a, b 的可能取值为 ()

- A. $a = 3, b = 4$ B. $a = 4, b = -3$ C. $a = 5, b = -5$ D. $a = -5, b = 5$

【答案】B

【解析】

【分析】由乘法运算得出 $a^2 + b^2 = 25$ ，再由对称性结合复数的几何意义判断即可。

【详解】由题意知， $(a + bi)(a - bi) = 25$ ，即 $a^2 + b^2 = 25$ 。

z 在复平面内对应的点 (a, b) 关于原点的对称点为 $(-a, -b)$ ，

所以 $-a < 0, -b > 0$ ，即 $a > 0, b < 0$ 。

由选项可知，B 正确，ACD 错误；

故选：B

2. “ $m = -2$ ”是“直线 $(2 - m)x + my + 3 = 0$ 与直线 $x - my - 3 = 0$ 垂直”的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用两直线垂直可求得 m 的值，再利用集合的包含关系判断可得出结论.

【详解】若直线 $(2-m)x+my+3=0$ 与直线 $x-my-3=0$ 垂直，则 $2-m-m^2=0$,

即 $m^2+m-2=0$ ，解得 $m=-2$ 或 1 ，

因为 $\{-2\} \subsetneq \{-2, 1\}$ ，所以，“ $m=-2$ ”是“直线 $(2-m)x+my+3=0$ 与直线 $x-my-3=0$ 垂直”的充分非必要条件.

故选：A.

3. 已知向量 $\vec{a}=(\sin\alpha, 2)$, $\vec{b}=(2, \sin\beta)$, $\alpha>0, \beta>0, \alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$ ，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值为 ()

A. 6

B. 4

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】先利用平面向量数量积的坐标表示与三角恒等变换化简，再根据整体角范围利用正弦函数图象求解最值即可.

【详解】由 $\alpha>0, \beta>0, \alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$ ，得 $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$ ， $\beta=\frac{2\pi}{3}-\alpha$ ，

由 $\vec{a}=(\sin\alpha, 2)$, $\vec{b}=(2, \sin\beta)$ ，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 2\sin\alpha + 2\sin\beta = 2\left[\sin\alpha + \sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right] \\ &= 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = 3\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right),\end{aligned}$$

因为 $\frac{\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ ，

所以当 $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时， $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 取得最大值，且最大值为 $2\sqrt{3}$.

故选：C.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 周长为 3，则 $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. 3

D. $\frac{10}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用“1”的代换，结合基本不等式求最值.

【详解】由题意得 $a+b+c=3$, $a>0, b>0, c>0$, 所以 $a+b>0, c>0$,

$$\text{则 } \frac{4}{a+b} + \frac{1}{c} = \frac{\frac{4}{3}(a+b+c)}{a+b} + \frac{\frac{1}{3}(a+b+c)}{c} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \right) + \frac{1}{3} \geq \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{c}} = 3,$$

当且仅当 $\frac{4c}{a+b} = \frac{a+b}{c}$ 时, 即 $\begin{cases} a+b=2 \\ c=1 \end{cases}$ 等号成立,

故当 $a+b=2, c=1$ 时, $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}$ 取到最小值 3.

故 $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}$ 的最小值为 3.

故选: C.

5. 过原点的直线 l 与曲线 $y=e^x, y=\ln(x+a)$ 都相切, 则实数 $a=(\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{2}{e}$

【答案】D

【解析】

【分析】设出切点, 利用导数的几何意义结合两点式斜率公式列式, 即可求解.

【详解】由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$, 由 $y=\ln(x+a)$ 得 $y'=\frac{1}{x+a}$,

设过原点的直线 l 分别与曲线 $y=e^x, y=\ln(x+a)$ 相切于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则由导数的几何意义得 $\frac{y_1}{x_1} = e^{x_1}$, 且 $y_1 = e^{x_1}$, 故 $x_1 = 1$, 所以直线 l 的斜率为 e ,

所以 $\frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{x_2+a} = e$, 所以 $\ln(x_2+a) = ex_2$, 所以 $ex_2 = -1$, 即 $x_2 = -\frac{1}{e}$,

代入 $\frac{1}{x_2+a} = e$ 得 $a = \frac{2}{e}$.

故选: D

6. 根据经济学理论, 企业产量受劳动投入、资本投入和技术水平的影响, 若用 Q 表示产量, L 表示劳动投入,

K 表示资本投入, A 表示技术水平, 则它们的关系可以表示为 $Q = AK^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{1}{\beta}}$, 其中

$A > 0, K > 0, L > 0, \alpha > 1, \beta > 1$. 当 A 不变, K 与 L 均变为原来的 2 倍时, 下列说法正确的是 ()

- A. 存在 $\alpha > 2$ 和 $\beta > 2$, 使得 Q 不变
- B. 存在 $1 < \alpha < 2$ 和 $1 < \beta < 2$, 使得 Q 变为原来的 2 倍
- C. 若 $\alpha \cdot \beta = 4$, 则 Q 最多可变为原来的 2 倍
- D. 若 $2(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 \beta^2$, 则 Q 最多可变为原来的 2 倍

【答案】D

【解析】

【分析】由 $Q = AK^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{1}{\beta}}$, 当 A 不变, K 与 L 均变为原来的 2 倍时, $Q = A(2K)^{\frac{1}{\alpha}}(2L)^{\frac{1}{\beta}} = AK^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{1}{\beta}} \cdot 2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$, 然后逐个分析判断即可.

【详解】因为 $Q = AK^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{1}{\beta}}$,

所以当 A 不变, K 与 L 均变为原来的 2 倍时, $Q = A(2K)^{\frac{1}{\alpha}}(2L)^{\frac{1}{\beta}} = AK^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{1}{\beta}} \cdot 2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$,

对于 A, 若 Q 不变, 则 $2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = 1$, 所以 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 0$, 因为 $\alpha > 1, \beta > 1$, 所以上式无解,

所以不存在 $\alpha > 2$ 和 $\beta > 2$, 使得 Q 不变, 所以 A 错误,

对于 B, 若 Q 变为原来的 2 倍, 则 $2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = 2$, 所以 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,

当 $1 < \alpha < 2, 1 < \beta < 2$ 时, $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < 1, \frac{1}{2} < \frac{1}{\beta} < 1$, 所以 $1 < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 2$,

所以 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ 无解, 所以不存在 $1 < \alpha < 2$ 和 $1 < \beta < 2$, 使得 Q 变为原来的 2 倍, 所以 B 错误,

对于 C, 若 $\alpha \cdot \beta = 4$, 则 $2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \geq 2^{2\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}}} = 2^{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$, 当且仅当 $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$, 即 $\alpha = \beta = 2$ 时取等号,

所以当 $\alpha \cdot \beta = 4$ 时, Q 最少可变为原来的 2 倍, 所以 C 错误,

对于 D, 由 $2(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 \beta^2$, 得 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{2}$,

因为 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$, 当且仅当 $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$, 即 $\alpha = \beta$ 时取等号,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/365304240203011310>