

湖北省仙桃、天门、潜江三市 2022-2023 学年高三调研测试 (二) 数学试题

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_5 + a_8 = -3$, $a_4 a_9 = -18$, 则 $a_2 + a_{11} =$ ()

- A. 9 B. -9 C. $\frac{21}{2}$ D. $-\frac{21}{4}$

2. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

3. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 平面 α 与此正方体相交. 对于实数 d ($0 < d < \sqrt{3}$), 如果正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点中恰好有 m 个点到平面 α 的距离等于 d , 那么下列结论中, 一定正确的是

- A. $m \neq 6$ B. $m \neq 5$
C. $m \neq 4$ D. $m \neq 3$

4. 复数 $\frac{2}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

5. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{m, m+2\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $m =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

6. 已知 $z = i(3-2i)$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

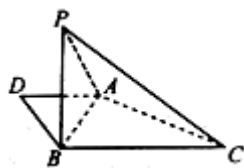
- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

7. 已知复数 $z = \frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2019}}$ (i 为虚数单位), 则下列说法正确的是 ()

- A. z 的虚部为 4 B. 复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限
C. z 的共轭复数 $\bar{z} = 4-2i$ D. $|z| = 2\sqrt{5}$

8. 如图, 平面四边形 $ACBD$ 中, $AB \perp BC$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2$, $\triangle ABD$ 为等边三角形, 现将 $\triangle ABD$ 沿 AB

翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PB \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）



- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

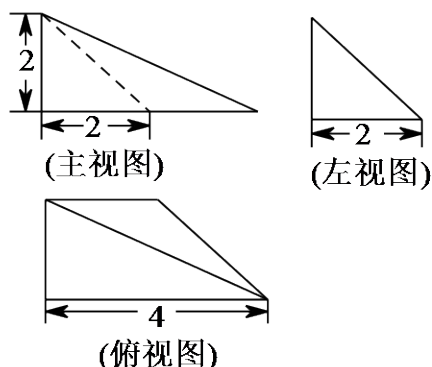
9. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 4-3i$ ，其中 i 是虚数单位，则复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

10. 已知函数 $f(x) = me^{mx} - \ln x$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ 恒成立，则 m 的取值范围为（ ）

- A. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, e)$

11. 一个四棱锥的三视图如图所示（其中主视图也叫正视图，左视图也叫侧视图），则这个四棱锥中最最长棱的长度是（ ）.



- A. $2\sqrt{6}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

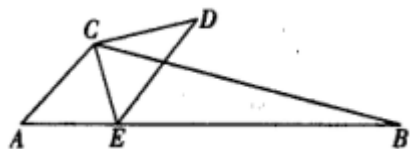
12. 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(3-x)$ ，则（ ）

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递增 B. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减
C. 函数 $f(x)$ 图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 图像关于 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 2$ ， $AB = \sqrt{6}$ ， $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$ ，点 E 在边 AB 上，且 $\angle ACE = \angle BCE$ ，将射线 CB 绕着 C 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，并在所得射线上取一点 D ，使得 $CD = \sqrt{3} - 1$ ，连接 DE ，则 $\triangle CDE$

的面积为_____.



14. 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象沿 x 轴向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位后所得的图象与 $f(x)$ 的图象关于 x 轴对称, 则 φ 的最小值为_____.

15. 设集合 $A = \{-1, a\}$, $B = \left\{e^{\frac{a}{e}}, 2\right\}$ (其中 e 是自然对数的底数), 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则满足条件的实数 a 的个数为_____.

16. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

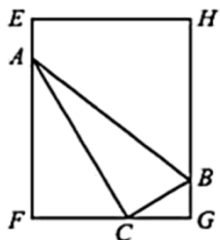
17. (12 分) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$), 焦点 F 到准线的距离为 3, 抛物线 E 上的两个动点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2$ 且 $x_1 + x_2 = 1$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C .

- (1) 求抛物线 E 的方程;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{3}a = b(\sin C + \sqrt{3}\cos C)$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $A = \frac{\pi}{3}$, D 为 $\triangle ABC$ 外一点, $DB = 2, CD = 1$, 求四边形 $ABDC$ 面积的最大值.

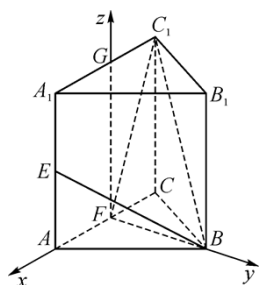
19. (12 分) 如图, $EFGH$ 是矩形, $\triangle ABC$ 的顶点 C 在边 FG 上, 点 A, B 分别是 EF, GH 上的动点 (EF 的长度满足需求). 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, 且满足 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin \gamma(\cos \alpha + \cos \beta)$.



- (1) 求 γ ;
- (2) 若 $FC = 5$, $CG = 3$, 求 $\frac{5}{AC} + \frac{3}{BC}$ 的最大值.

20. (12 分) 在正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E, F, G 分别是棱 AA_1, AC 和 A_1C_1 的中点, 以

$\{\vec{FA}, \vec{FB}, \vec{FG}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$.



(1) 求异面直线 AC 与 BE 所成角的余弦值；

(2) 求二面角 $F-BC_1-C$ 的余弦值.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

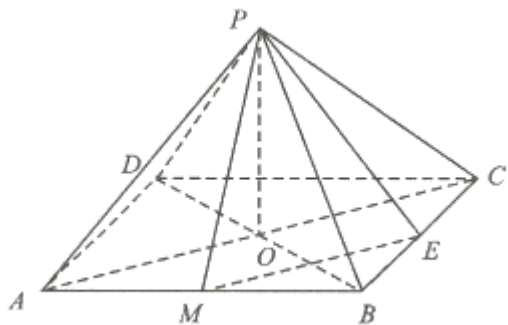
(1) 若 $a_n = n$, $b_n = 2^n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} ;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} > c_n$ 恒成立.

① 当数列 $\{b_n\}$ 为等差数列时, 求证: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公差相等;

② 数列 $\{b_n\}$ 能否为等比数列? 若能, 请写出所有满足条件的数列 $\{b_n\}$; 若不能, 请说明理由.

22. (10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的中心, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BC 的中点.



(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PE = 3$, 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C

【解析】

根据等比数列的下标和性质可求出 a_5, a_8 , 便可得出等比数列的公比, 再根据等比数列的性质即可求出 $a_2 + a_{11}$.

【详解】

$$\because 4+9=5+8, \therefore a_4 a_9 = a_5 a_8 = -18, \text{ 又 } a_5 + a_8 = -3, \text{ 可解得 } \begin{cases} a_5 = -6 \\ a_8 = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_5 = 3 \\ a_8 = -6 \end{cases}$$

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

$$\text{当 } \begin{cases} a_5 = -6 \\ a_8 = 3 \end{cases} \text{ 时, } q^3 = \frac{a_8}{a_5} = -\frac{1}{2}, \therefore a_2 + a_{11} = \frac{a_5}{q^3} + a_8 q^3 = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2};$$

$$\text{当 } \begin{cases} a_5 = 3 \\ a_8 = -6 \end{cases} \text{ 时, } q^3 = \frac{a_8}{a_5} = -2, \therefore a_2 + a_{11} = \frac{a_5}{q^3} + a_8 q^3 = \frac{3}{-2} + (-6) \times (-2) = \frac{21}{2}.$$

故选: C.

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质应用, 意在考查学生的数学运算能力, 属于基础题.

2. D

【解析】

直接利用二倍角余弦公式与弦化切即可得到结果.

【详解】

$$\because \tan \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5},$$

故选 D

【点睛】

本题考查的知识要点: 三角函数关系式的恒等变变换, 同角三角函数关系式的应用, 主要考查学生的运算能力和转化能力, 属于基础题型.

3. B

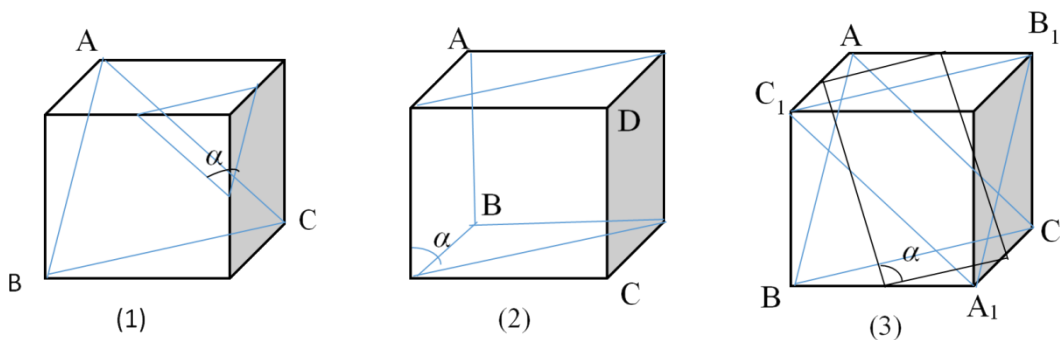
【解析】

此题画出正方体模型即可快速判断 m 的取值.

【详解】

如图 (1) 恰好有 3 个点到平面 α 的距离为 d ; 如图 (2) 恰好有 4 个点到平面 α 的距离为 d ; 如图 (3) 恰好有 6 个点到平面 α 的距离为 d .

所以本题答案为 B.



【点睛】

本题以空间几何体为载体考查点, 面的位置关系, 考查空间想象能力, 考查了学生灵活应用知识分析解决问题的能力
和知识方法的迁移能力, 属于难题.

4. B

【解析】

分析: 化简已知复数 z , 由共轭复数的定义可得.

详解: 化简可得 $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$

$\therefore z$ 的共轭复数为 $1-i$.

故选 B.

点睛: 本题考查复数的代数形式的运算, 涉及共轭复数, 属基础题.

5. A

【解析】

根据 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$, 验证交集后求得 m 的值.

【详解】

因为 $A \cap B = \{2\}$, 所以 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$. 当 $m = 2$ 时, $A \cap B = \{2, 4\}$, 不符合题意, 当 $m + 2 = 2$ 时, $m = 0$. 故选 A.

【点睛】

本小题主要考查集合的交集概念及运算, 属于基础题.

6. C

【解析】

先化简复数 $z = i(3 - 2i)$ ，再求 $\bar{z}$ ，最后求 $z \cdot \bar{z}$ 即可.

【详解】

解： $z = i(3 - 2i) = 2 + 3i$ ， $\bar{z} = 2 - 3i$

$$z \cdot \bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13,$$

故选：C

【点睛】

考查复数的运算，是基础题.

7. D

【解析】

利用 i 的周期性先将复数 z 化简为 $z = -4 + 2i$ 即可得到答案.

【详解】

因为 $i^2 = -1$ ， $i^4 = 1$ ， $i^5 = i$ ，所以 i 的周期为 4，故 $z = \frac{4i + 2}{i^{4 \times 504 + 3}} = \frac{4i + 2}{i^3} = \frac{4i + 2}{-i} = -4 + 2i$ ，

故 z 的虚部为 2，A 错误； z 在复平面内对应的点为 $(-4, 2)$ ，在第二象限，B 错误； z 的共

轭复数为 $\bar{z} = -4 - 2i$ ，C 错误； $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的四则运算，涉及到复数的虚部、共轭复数、复数的几何意义、复数的模等知识，是一道基础题.

8. A

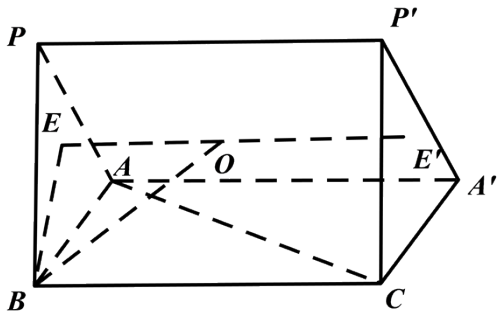
【解析】

将三棱锥 $P - ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同，由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，在 $Rt\triangle OBE$ 中，计算半径 OB 即可.

【详解】

由 $AB \perp BC$ ， $PB \perp BC$ ，可知 $BC \perp$ 平面 PAB .

将三棱锥 $P - ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同.



由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E ，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

可得 $BE=1$ ．又 $OE=\frac{BC}{2}=1$ ，故在 $Rt\triangle OBE$ 中， $OB=\sqrt{2}$ ，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 8π ．

故选：A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题.

9. B

【解析】

利用复数的除法运算化简 z ，复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$ ，利用模长公式即得解.

【详解】

由题意知复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$ ，

$$z = \frac{4-3i}{1+i} = \frac{(4-3i)(1-i)}{2} = \frac{1-7i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法运算，模长公式和几何意义，考查了学生概念理解，数学运算，数形结合的能力，属于基础题.

10. A

【解析】

分析可得 $m > 0$ ，显然 $me^{mx} - \ln x > 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立，只需讨论 $x > 1$ 时的情况即

可， $f(x) > 0 \Leftrightarrow me^{mx} > \ln x \Leftrightarrow mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ ，然后构造函数 $g(x) = xe^x (x > 0)$ ，结合 $g(x)$ 的单调性，不等式等价于 $mx > \ln x$ ，进而求得 m 的取值范围即可.

【详解】

由题意,若 $m \leq 0$,显然 $f(x)$ 不是恒大于零,故 $m > 0$.

$m > 0$,则 $me^{mx} - \ln x > 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立;

当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$ 等价于 $me^{mx} > \ln x$,

因为 $x > 1$,所以 $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$.

设 $g(x) = xe^x (x > 0)$,由 $g'(x) = e^x(1+x)$,显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $mx > 0, \ln x > 0$,所以 $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ 等价于 $g(mx) > g(\ln x)$,即 $mx > \ln x$,则 $m > \frac{\ln x}{x}$.

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$,则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$.

令 $h'(x) = 0$,解得 $x = e$,易得 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$, 故 $m > \frac{1}{e}$.

故选:A.

【点睛】

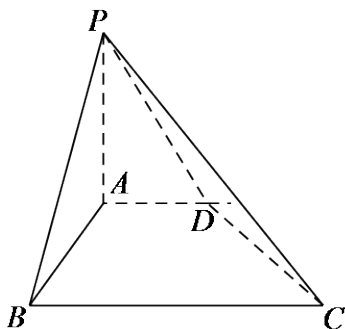
本题考查了不等式恒成立问题,利用函数单调性是解决本题的关键,考查了学生的推理能力,属于基础题.

11. A

【解析】

作出其直观图, 然后结合数据根据勾股定理计算每一条棱长即可.

【详解】



根据三视图作出该四棱锥的直观图, 如图所示, 其中底面是直角梯形, 且 $AD = AB = 2$, $BC = 4$,

$PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 2$,

$$\therefore PB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad PD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad CD = 2\sqrt{2}, \quad PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6},$$

$\therefore$ 这个四棱锥中最长棱的长度是 $2\sqrt{6}$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了四棱锥的三视图的有关计算, 正确还原直观图是解题关键, 属于基础题.

12. C

【解析】

依题意可得 $f(3-x) = f(x)$, 即函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 再求出函数的导函数, 即可判断函数的单调性;

【详解】

解: 由 $f(3-x) = \ln(3-x) + \ln[3-(3-x)] = \ln(3-x) + \ln x = f(x)$,

$\therefore f(3-x) = f(x)$, 所以函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称,

又 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3-x} = \frac{2x-3}{x(x-3)}$, $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上不单调.

故正确的只有 C,

故选: C

【点睛】

本题考查函数的对称性的判定, 利用导数判断函数的单调性, 属于基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $3\sqrt{3}-5$

【解析】

由余弦定理求得 $AC = \sqrt{3}-1$, 再结合正弦定理得 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 进而得 $\sin \angle AEC = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

得 $CE = 4 - 2\sqrt{3}$, 则面积可求

【详解】

由 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB$, 得 $AC^2 + 2AC - 2 = 0$, 解得 $AC = \sqrt{3}-1$.

因为 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 所以 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$,

所以 $\sin \angle AEC = \sin (\angle ACE + \angle BAC) = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

又因为 $\frac{CE}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle AEC}$, 所以 $CE = 4 - 2\sqrt{3}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/365313102131011340>