

2023-2024学年云南省三校高三高考备考实用性联考卷（八）数学试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 z_1, z_2 是方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的两个复根，则 $|z_1^2 - z_2^2| =$

- A. 2 B. 4 C. $2i$ D. $4i$

2. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{a, a^2 - 3a + 2\}$, 若 $A \cap B = \{0\}$, 则 $a = (\quad)$

- A. 0 或 1 B. 1 或 2 C. 0 或 2 D. 0 或 1 或 2

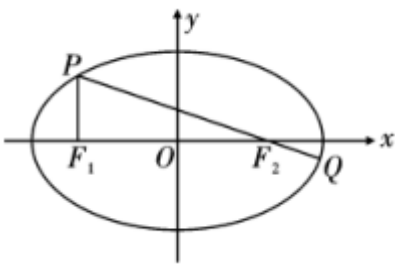
3. 有 7 个人排成前后两排照相，前排站 3 人后排站 4 人，其中甲同学站在前排，乙同学站在后排的概率为 (\quad)

- A. $\frac{1}{42}$ B. $\frac{1}{14}$ C. $\frac{2}{21}$ D. $\frac{2}{7}$

4. 平面向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 已知 $\vec{a} = (6, -8)$, $|\vec{b}| = 10$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量的坐标为 (\quad)

- A. $(3, -4)$ B. $(4, -3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-3, 4)$

5. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 (如图), 过 F_2 的直线交 E 于 P, Q 两点, 且 $PF_1 \perp x$ 轴, $|PF_2| = 9|F_2Q|$, 则 E 的离心率为 (\quad)



- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知正四棱锥的高为 h , 其顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π , 且 $\frac{3}{2} \leq h \leq \frac{9}{2}$, 则当该正四棱锥体积最大时, 高 h 的值为 (\quad)

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 4 D. $\frac{9}{2}$

7. 定义方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x 叫做函数 $f(x)$ 的“奋斗点”. 若函数 $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^3 - 2$ 的“奋斗点”分别为 m, n , 则 m, n 的大小关系为()

- A. $m \geq n$ B. $m > n$ C. $m \leq n$ D. $m < n$

8. 若 $x, y \in R$, 则 $\sqrt{(x-y)^2 + (xe^x - y + 1)^2}$ 的最小值为()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{e}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

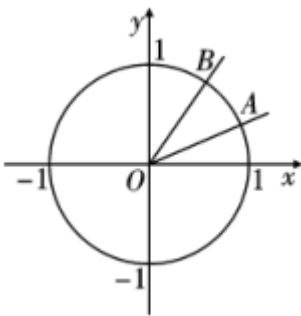
9. 已知 $f(x), g(x)$ 都是定义在 R 上且不恒为 0 的函数, 则()

- A. $y = f(x) \cdot f(-x)$ 为偶函数
 B. $y = g(x) + g(-x)$ 为奇函数
 C. 若 $g(x)$ 为奇函数, $f(x)$ 为偶函数, 则 $y = f(g(x))$ 为奇函数
 D. 若 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则 $y = f(x) - g(x)$ 为非奇非偶函数

10. 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n, l 是三条不同的直线, 则下列命题正确的是()

- A. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$
 B. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
 C. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \subset \alpha, m \perp l$, 则 $m \perp \beta$
 D. 若 $\alpha \cap \beta = l, m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 $m \parallel l$

11. 在如图所示的平面直角坐标系中, 锐角 α, β 的终边分别与单位圆交于 A, B 两点. 则()



- A. 若 A 点的横坐标为 $\frac{12}{13}$, B 点的纵坐标为 $\frac{4}{5}$, 则 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$
 B. $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$
 C. $\sin \alpha > \sin(\alpha + \beta) + \sin \beta$
 D. 以 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin(\alpha + \beta)$ 为三边构成的三角形的外接圆的面积为 $\frac{\pi}{3}$

12. 已知在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, 点 P 是四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内 (包含边界) 的一动点, 设二面角 $P - AD - B$ 的大小为 α , 直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 β , 若 $\alpha = \beta$, 则 ()

- A. 点 P 的轨迹为一条抛物线
- B. 直线 PA_1 与直线 CD 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{4}$
- C. 线段 PB 长的最小值为 3
- D. 三棱锥 $P - A_1BC_1$ 体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $(\frac{1}{x} + x^2)^6$ 的展开式中常数项是_____。(用数字作答)

14. 假设云南省 40 万学生数学模拟考试的成绩 X 近似服从正态分布 $N(98, 100)$, 已知某学生成绩排名进入全省前 9100 名, 那么该生的数学成绩不会低于_____分。(参考数据: $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$)

15. 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$, 在直线 $y = -4$ 上任取一点 P , 过点 P 作抛物线 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则原点到直线 AB 距离的最大值为_____.

16. 定义 $\|x\|$ 表示与实数 x 的距离最近的整数 (当 x 为两相邻整数的算术平均值时, $\|x\|$ 取较大整数), 如 $\left\|\frac{4}{3}\right\| = 1$, $\left\|\frac{5}{3}\right\| = 2$, $\|2\| = 2$, $\|2.5\| = 3$, 令函数 $K(x) = \|x\|$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{K(\sqrt{n})}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $S_6 =$ _____ ; $S_{2025} =$ _____.

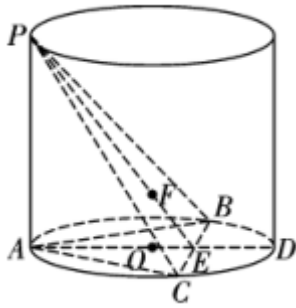
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (本小题 10 分)

如图, 正 $\triangle ABC$ 是圆柱底面圆 O 的内接三角形, 其边长为 a . AD 是圆 O 的直径, PA 是圆柱的母线, E 是 AD 与 BC 的交点, 圆柱的轴截面是正方形.

(1) 记圆柱的体积为 V_1 , 三棱锥 $P - ABC$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$;

(2) 设 F 是线段 PE 上一点, 且 $FE = \frac{1}{2}PF$, 求二面角 $A - FC - O$ 的余弦值.



18. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = 4 \sin \omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}$ 的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f(A) = \sqrt{3}$, $\sqrt{2}a = \sqrt{3}b$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_{n+1} = 2S_n + 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n}{3^n}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对任意的正整数 n , 不等式 $T_n > \frac{m^2 - m + 7}{27}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20.



该题正在审核中, 敬请期待~

21. (本小题 12 分)

已知圆 $C: (x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 4$, 定点 $D(\sqrt{5}, 0)$, 圆 C 上某一点 D_1 恰好与点 D 关于直线 PQ 对称, 设直线 PQ 与直线 D_1C 的交点为 T .

(1) 求证: $||TC| - |TD||$ 为定值, 并求出点 T 的轨迹 E 方程;

(2) 设 $A(-1, 0)$, M 为曲线 E 上一点, N 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 (M, N 均不在 x 轴上). 直线 AM, AN 的斜率分别记为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = -4k_2$. 求证: 直线 MN 过定点, 并求出此定点的坐标.

22. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+2) - x + 2$, $g(x) = ae^x - x + \ln a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 请在下列①②中选择一个作答 (注意: 若选两个分别作答则按选①给分).

①若 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

②若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个实根, 求实数 a 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】B

【解析】【分析】

本题考查关于 x 的实系数一元二次方程在复数集中根，复数的模的计算，属于基础题.

由题意可得 $z_1 = 1 + i$ ， $z_2 = 1 - i$ ，利用复数运算求解即可.

【解答】

解：由 $x^2 - 2x + 2 = 0$ ，则 $(x - 1)^2 = -1$ ，

所以 $z_1 = 1 + i$ ， $z_2 = 1 - i$ ，

$$|z_1^2 - z_2^2| = |(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)| = |2 \times 2i| = 4，$$

故选 B.

2. 【答案】C

【解析】解：由于 $A \cap B = \{0\}$ ，则 $0 \in B$.

若 $a = 0$ ，则 $a^2 - 3a + 2 = 2$ ，此时 $B = \{0, 2\}$ 符合题意.

若 $a^2 - 3a + 2 = 0$ ，则 $a = 1$ 或 2 ，

$a = 1$ 时， $B = \{0, 1\}$ ，此时 $A \cap B = \{0, 1\}$ 不合题意；

$a = 2$ 时， $B = \{0, 2\}$ 符合题意.

因此 $a = 0$ 或 2 .

故选 C.

根据集合的并集的结果分类讨论求参数.

本题主要考查集合的基本运算，根据交集的定义进行计算是解决本题的关键，是基础题.

3. 【答案】D

【解析】【分析】

本题考查古典概型及其计算，属于基础题.

先计算总基本事件数，可以看成 7 人站一排有 A_7^7 种，再计算甲同学站在前排，乙同学站在后排的基本事件数，根据古典概型的概率计算公式可得.

【解答】

解：先计算总事件数，可以看成 7 人站一排有 A_7^7 种.

现在考虑符合题意的情况，从余下 5 人中选 2 人与甲站在前排，
乙站在后排有 $C_5^2 A_3^3 A_4^4$ 种，概率为 $P = \frac{C_5^2 A_3^3 A_4^4}{A_7^7} = \frac{2}{7}$ ，故选 D.

4. 【答案】D

【解析】【分析】

本题主要考查投影向量和数量积的坐标运算，属于基础题.

利用向量的数量积的坐标运算即可求解.

【解答】

$$\text{解: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3}\pi = -50,$$

向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量的坐标为

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-50}{10} \times \frac{(6, -8)}{10} = (-3, 4), \text{ 故选 D.}$$

5. 【答案】A

【解析】【分析】

本题考查椭圆的标准方程和几何性质，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数学运算及逻辑推理核心素养，属于中档题.

根据 $PF_1 \perp x$ ， $|PF_2| = 9|F_2Q|$ 求出点 Q 的坐标，然后代入 E 方程即可求出结果.

【解答】

$$\text{解: 依题意设 } P(-c, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \frac{c^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } y_1 = \frac{b^2}{a};$$

$$\text{由于 } |PF_2| = 9|F_2Q|, \text{ 所以 } \overrightarrow{PF_2} = 9\overrightarrow{F_2Q}, \text{ 所以 } (2c, -y_1) = 9(x_2 - c, y_2),$$

$$\text{所以 } x_2 = c + \frac{2c}{9} = \frac{11c}{9}, y_2 = -\frac{b^2}{9a},$$

$$\text{由 } \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \text{ 得 } \frac{(\frac{11c}{9})^2}{a^2} + \frac{(\frac{-b^2}{9a})^2}{b^2} = 1, \text{ 化为 } 121c^2 + b^2 = 81a^2,$$

$$\text{所以 } 3c^2 = 2a^2, \text{ 得 } e = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

故选 A.

6. 【答案】C

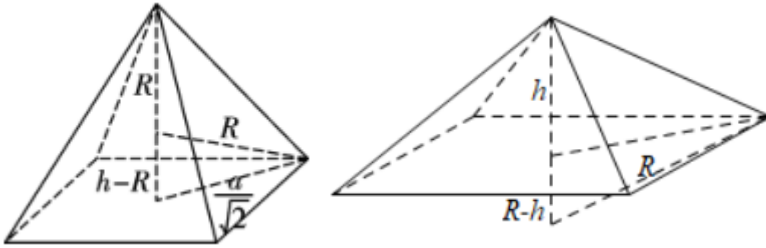
【解析】【分析】

本题主要考查球的切接问题以及锥体、球体的体积，属于中档题.

设正四棱锥的底边长为 a ，球的半径为 R ，则 $R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$ ，根据球的体积公式求得 R ，再由棱锥体积公式以及利用导数求得取最值时 h 的值即可.

【解答】

解：如图，设正四棱锥的底边长为 a ，球的半径为 R ，



$$\text{因为 } V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi ,$$

$$\therefore R = 3 ,$$

$$\text{可知 } R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 , \text{ 则 } a^2 = -2h^2 + 12h ,$$

$$\text{该正四棱锥的体积为 } V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3}(-2h^3 + 12h^2) ,$$

$$\text{则 } V' = -2h^2 + 8h = -2h(h - 4) ,$$

$$\text{又 } h \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] ,$$

$$\text{则当 } h \in \left[\frac{3}{2}, 4\right) \text{ 时, } V' > 0 ; \text{ 当 } h \in \left(4, \frac{9}{2}\right] \text{ 时, } V' < 0 ;$$

故当 $h = 4$ 时, V 取得最大值.

故选 C .

7. 【答案】 D

【解析】 【分析】

本题考查导数的新定义问题，属于中档题.

根据题意分别求得 m, n 的范围，即可得解.

【解答】

$$\text{解：函数 } g(x) = \ln x , \text{ 得 } g'(x) = \frac{1}{x} \text{ 由题意可得, } g(m) = g'(m) , \text{ 即 } \frac{1}{m} = \ln m ,$$

$$\text{设 } H(x) = \frac{1}{x} - \ln x , \quad H'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} , \text{ 因为 } x > 0 , \text{ 所以 } H'(x) < 0 , \text{ 易得 } H(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单}$$

$$\text{调递减且 } H(1) = 1 > 0 , \quad H(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 = \ln \frac{\sqrt{e}}{2} < 0 , \text{ 故 } 1 < m < 2 ,$$

由 $h(x) = x^3 - 2$, 得 $h'(x) = 3x^2$, 由题意得: $n^3 - 2 = 3n^2$, $n = 3 + \frac{2}{n^2} > 3$,

所以 $m < n$, 故选 D .

8. 【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查两点间的距离公式, 点到直线的距离, 导数的几何意义应用, 属于拔高题.

将求最值问题转化成求两点距离问题, 再利用导数求出切线斜率, 最终转化成点到直线的距离.

【解答】

解: $\sqrt{(x-y)^2 + (xe^x - y + 1)^2}$ 可以看成点 $P(x, xe^x)$ 与点 $Q(y, y-1)$ 之间的距离,

而点 $P(x, xe^x)$ 是函数 $f(x) = xe^x$ 图象上的点,

点 $Q(y, y-1)$ 是直线 $l: y = x - 1$ 上的点,

即 $\sqrt{(x-y)^2 + (xe^x - y + 1)^2} = |PQ|$ 的最小值,

即为函数 $f(x)$ 上的点到直线 $l: y = x - 1$ 上的点的距离的最小值,

$$f'(x) = (x+1)e^x ,$$

设函数 $f(x) = xe^x$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线 l_1 与直线 l 平行,

则直线 l_1 的斜率为 1 , 可得 $f'(x_0) = (1+x_0)e^{x_0} = 1$,

$$\text{整理得 } e^{x_0}(1+x_0) - 1 = 0 ,$$

$\therefore g(x) = e^x(1+x) - 1$ 在定义域内单调递增, 且 $g(0) = 0$,

\therefore 方程 $e^{x_0}(1+x_0) - 1 = 0$ 有且仅有一个解 $x_0 = 0$, 则 $M(0, 0)$,

故 $|PQ|$ 的最小值为点 $M(0, 0)$ 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故选 A .

9. 【答案】AD

【解析】【分析】

本题考查了函数的奇偶性的判断, 属于中档题.

利用奇偶函数的定义分别判断即可.

【解答】

解: 设 $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$, 因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数,

所以 $h(x)$ 的定义域为 R , $h(-x) = f(-x) \cdot f(x) = h(x)$,

所以 $h(x)$ 为偶函数, 故 A 正确;

$t(x) = g(x) + g(-x)$ ，因为 $g(x)$ 是定义在 R 上的函数，所以 $t(x)$ 的定义域为 R ，
 $t(-x) = g(-x) + g(x) = t(x)$ ，所以 $t(x)$ 为偶函数，故 **B** 错误；
 设 $m(x) = f(g(x))$ ，因为 $f(x)$ ， $g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，
 所以 $m(x)$ 的定义域为 R ，因为 $g(x)$ 为奇函数， $f(x)$ 为偶函数，所以
 $m(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = m(x)$ ，所以 $m(x)$ 为偶函数，故 **C** 错误；
 设 $n(x) = f(x) - g(x)$ ，因为 $f(x)$ ， $g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，所以 $n(x)$ 的定义域为 R ，
 $n(x) + n(-x) = f(x) - g(x) + f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) - f(x) - g(x) = -2g(x)$ ，
 因为 $g(x)$ 是不恒为 0 的函数，所以 $n(x) + n(-x) = 0$ 不恒成立，
 所以 $n(x)$ 不是奇函数，
 $n(x) - n(-x) = f(x) - g(x) - [f(-x) - g(-x)] = f(x) - g(x) + f(x) + g(x) = 2f(x)$ ，
 因为 $f(x)$ 是不恒为 0 的函数，所以 $n(x) = n(-x)$ 不恒成立，
 所以 $n(x)$ 不是偶函数，所以 $n(x)$ 是非奇非偶函数，故 **D** 正确，故选 **AD**。

10. 【答案】ACD

【解析】【分析】

本题主要考查空间中点线面位置关系的判断，属于中档题。

利用线面、面面垂直的性质对选项一一判断即可。

【解答】

解：对于 **A**， $\because m \perp \alpha$ ， $n \perp \alpha$ ，

\therefore 由线面垂直的性质可得 $m // n$ ，故 **A** 正确；

对于 **B**， $m // \alpha$ ， $n // \alpha$ ，则 m 与 n 可能异面或相交或平行，故 **B** 错误；

对于 **C**， $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \subset \alpha$ ， $m \perp l$ ，

由面面垂直的性质定理知， $m \perp \beta$ ，故 **C** 正确，

对于 **D**，设 $\alpha \cap \delta = a$ ， $m \subset \delta$ ， $m // \alpha$ ，

则 $m // a$ ，设 $\beta \cap \gamma = b$ ， $m \subset \gamma$ ， $m // \beta$ ，

则 $m // b$ ， $\therefore a // b$ ，又 $b \subset \beta$ ， $a \not\subset \beta$ ，

则 $a // \beta$ ，又 $a \subset \alpha$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ，则 $a // l$ ，则 $m // l$ ，故 **D** 正确，

故选 **ACD**。

11. 【答案】AB

【解析】【分析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/36605011500010053>