专项训练六　只用无刻度的直尺和圆规作图

类型一：与数学文化有关的作图

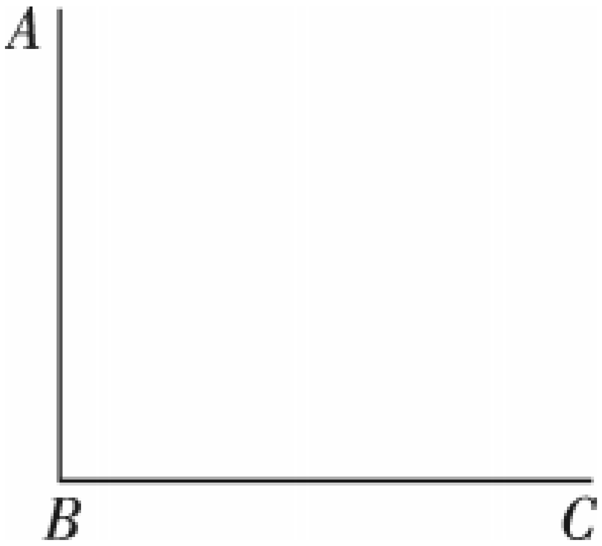
(省卷2023T20，2022－2021T21；兰州卷2023T21，2022T22)

1.(2022·甘肃)中国清朝末期的几何作图教科书《最新中学教科书用器画》由国人自编，书中记载了大量几何作图题，所有内容均用浅近的文言文表述，第一编记载了这样一道几何作图题：

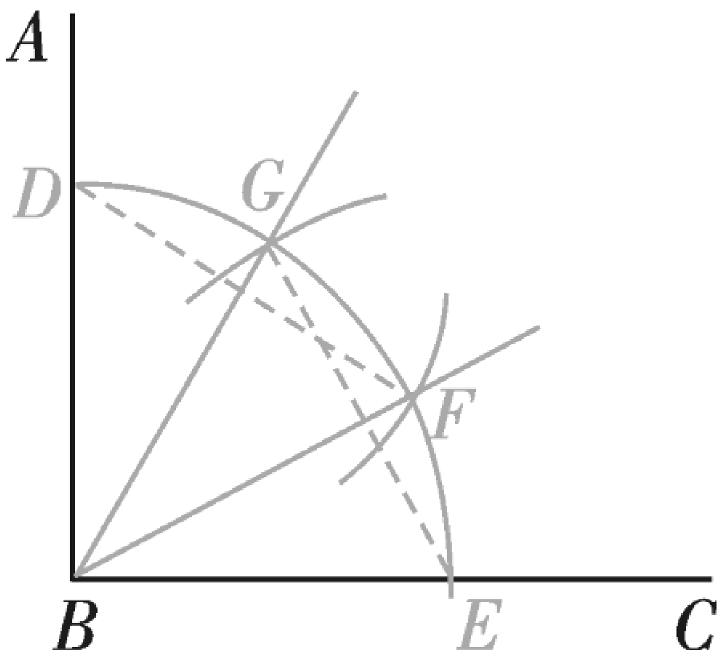
原文	释义
甲乙丙为定直角. 以乙为圆心，以任何半径作丁戊弧； 以丁为圆心，以乙丁为半径画弧得交点己； 再以戊为圆心，仍以原半径画弧得交点庚； 乙与己及庚相连作线	如　　，∠ABC　直角　　， 以点B　　心　　， 以任意　　半径画弧　　， 分　交射　　BA，BC于点D，E ； 以点D　　心　　，以BD 半径画弧与　$\overset{\frown}{DE}$交于点F； 再以点E　　心　　，仍以BD 半径画弧与　$\overset{\frown}{DE}$交于点G； 作射　　BF，BG

(1)根据以上信息，请用不带刻度的直尺和圆规，在图中完成这道作图题；(保留作图痕迹，不写作法)

(2)根据(1)完成的图，探究∠DBG，∠GBF，∠FBE的大小关系，并说明理由．



解：(1)画图如图所示．



(2)$\angle DBG=\angle GBF=\angle FBE$.

理由：连接DF，EG，

则$BD=BF=DF$，

$BE=BG=EG$，

即$\triangle BDF$和$\triangle BEG$均为等边三角形，

$\therefore \angle DBF=\angle EBG=60^\circ$，

$\because \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle DBG=\angle GBF=\angle FBE=30^\circ$.

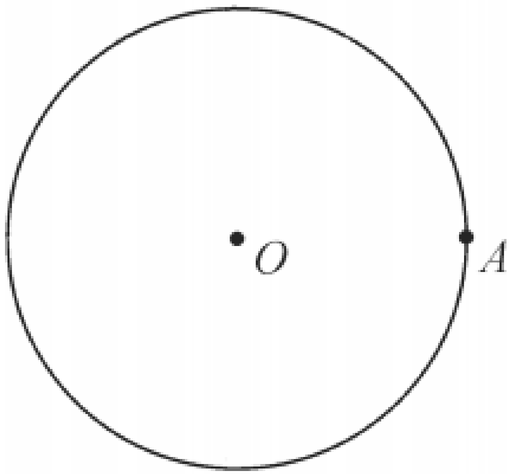
2．(2023·甘肃)1672年，丹麦数学家莫尔在他的著作《欧几里得作图》中指出：只用圆规可以完成一切尺规作图.1797年，意大利数学家马斯凯罗尼又独立发现此结论，并写在他的著作《圆规的几何学》中，请利用数学家们发现的结论，完成下面的作图题：

如图，已知⊙O，A是⊙O上一点，只用圆规将⊙O的圆周四等分．(按如下步骤完成，保留作图痕迹)

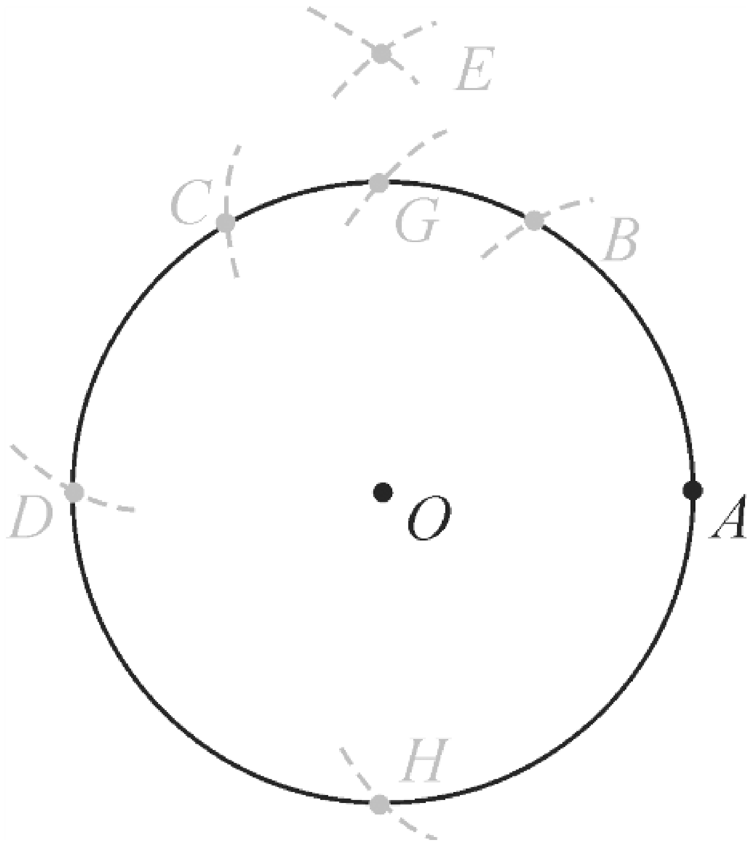
①以点A为圆心，OA长为半径，自点A起，在⊙ O上逆时针方向顺次截取$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$;

②分别以点A，点D为圆心，AC长为半径作弧，两弧交于⊙ O上方点E;

③以点A为圆心，OE长为半径作弧交⊙ O于G，H两点．即点A，G，D，H将⊙ O的圆周四等分．



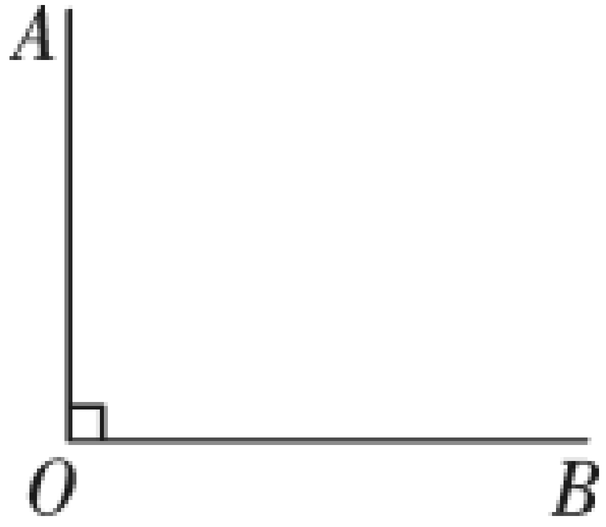
解：如图所示．即点A，G，D，H把⊙O的圆周四等分．



3.(2024·泾川县模拟)用尺规“三等分任意角”是数学史上一个著名难题，它已经被数学家伽罗瓦用《近世代数》和《群论》证明是不可能的．但对于特定度数的已知角，如90°角，45°角等，是可以用尺规进行三等分的．下面是小明的探究过程：

已知：如图①，$\angle AOB=90°$.

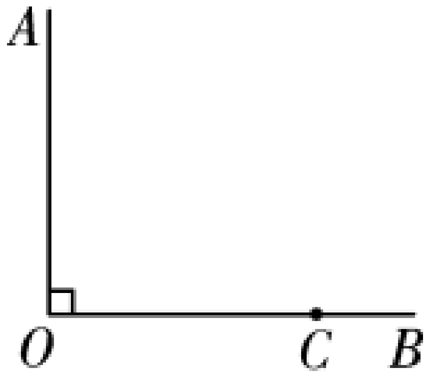
求作：射线OE，OG三等分$\angle AOB$.



①

作法：如图②，Ⅰ)在射线OB上取任一点C；Ⅱ)分别以O，C为圆心，OC长为半径画弧，两弧在OB上方交于点E，在OB下方交于点F，连接CE；Ⅲ)作直线EF交OC于点D；Ⅳ)以D为圆心，OD长为半径画弧，交线段CE于点G(点G不与点C重合)；Ⅴ)作射线OG，OE.所以射线OG，OE即为所求射线.

(1)利用直尺和圆规，依作法补全图形(保留作图痕迹)；



②

(2)完成下面的证明．

证明：∵$OE=OC=CE$，

∴△COE为等边三角形．∴$\angle COE=60°$.

∴$\angle AOE=30°$.由作图得$\angle CGO=$__90__°.

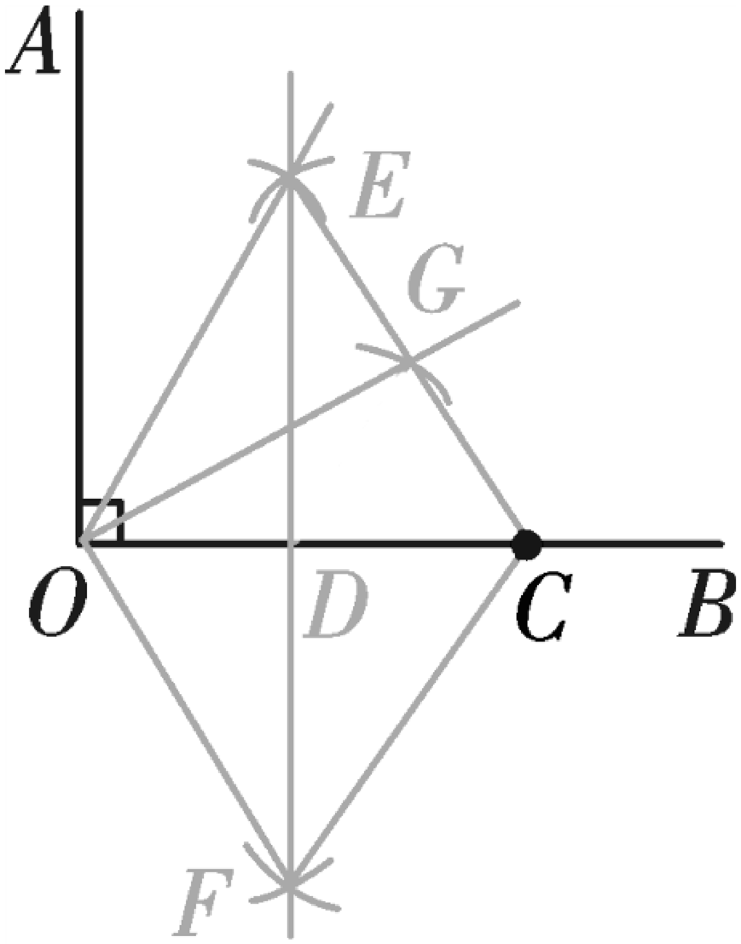
又∵$OE=OC$，$OG\perp EC$，

∴OG平分$\angle EOC$．__(等腰三角形三线合一)__(填推理的依据)

∴$\angle AOE=\angle COG=\angle EOG=30°$.

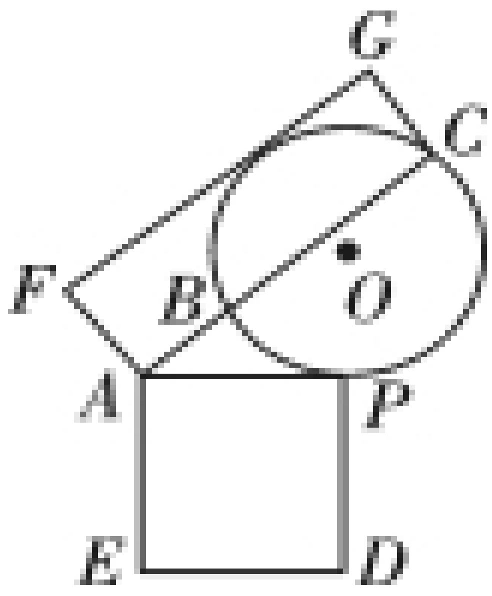
即射线OE，OG三等分$\angle AOB$.

解：(1)如图②，补全图形如图所示．



②

4．(2024·平凉州模拟)古希腊数学家欧几里得(约公元前325－公元前265)，被称为“几何学之父”．在其所著的《几何原本》中第3卷给出下面一个命题：



命题：直线AP为⊙O的切线，直线AC为⊙O的割线，以AP长为边构造正方形APDE，以AB，AC长为边长构造矩形ACGF，可得正方形APDE的面积等于矩形ACGF的面积，由此可得$AP^2=AB\cdot AC$.

某数学兴趣小组对该命题进行了论证，其作答共分为两个流程：尺规作图和论证推理.

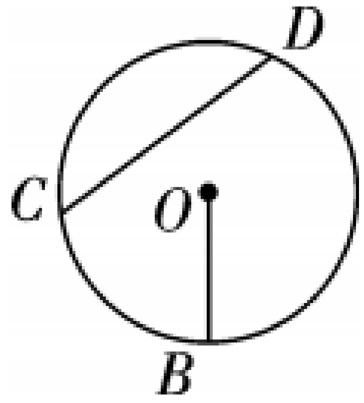
(1)尺规作图步骤如下：

①以点B为圆心，小于OB的长为半径作弧，分别交直线OB于P，Q两点；

②分别以P，Q为圆心，以大于$\frac{1}{2}$PQ的长为半径作弧，两弧交于点E；

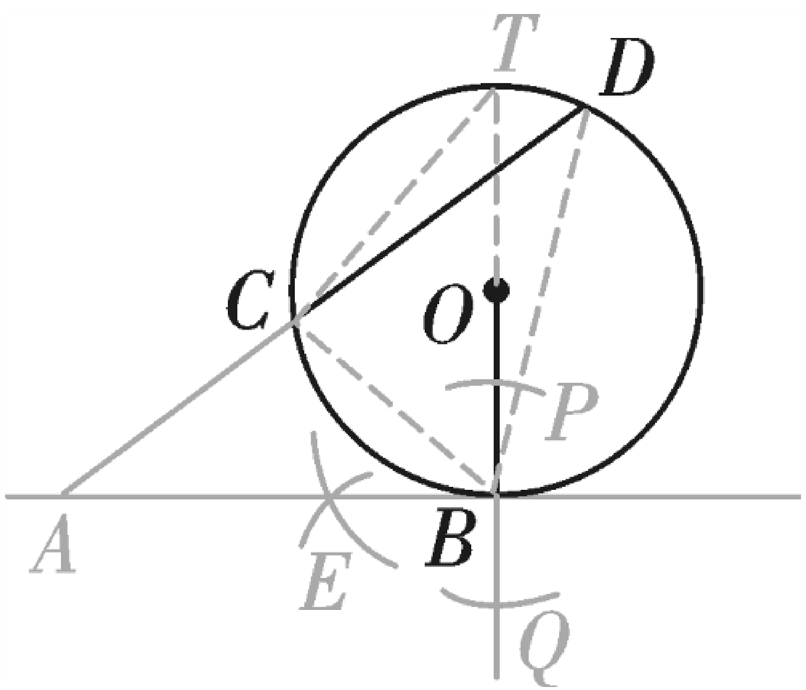
③作射线BE，射线BE与射线DC交于点A；

④可得直线AB为⊙O的切线．请按描述完成作图；



(2)依据所作图形，求证：$AB^2 = AC \cdot AD$.

(1)解：作图如图所示．



(2)证明：连接BC，BD，延长BO交⊙O于点T，连接CT.

$\because AB \perp BT$，$\therefore \angle ABC + \angle CBT = 90^\circ$，

$\because BT$是直径，$\therefore \angle BCT = 90^\circ$，

$\therefore \angle CBT + \angle T = 90^\circ$，$\therefore \angle ABC = \angle T$，

$\because \angle T = \angle D$，$\therefore \angle ABC = \angle D$，

$\because \angle CAB = \angle BAD$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADB$，

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$，$\therefore AB^2 = AC \cdot AD$.