第 03 讲　解不等式

知识梳理

1．解不含参数的一元二次不等式

①化 0：将一元二次不等式化为一端为 0 的形式；

②求根：求出相应一元二次方程的根，或判断出方程没有实数根；

③画图：画出相应二次函数示意草图，方程有根的将根标在图中；

④求解：根据不等号方向判断取草图中位于 x 轴上方或下方；

注意：开口向上，大于 0 取两边，小于 0 取中间；开口向下则相反。

2．解含参数的一元二次不等式

如：$ax^2+bx+c\ge 0\left(a\ne 0\right)$

⑴ $a=0$

⑵ $a\ne 0\Rightarrow$ 因式分解求两根 $\Rightarrow \left.\begin{matrix}(1)a>0\\(2)a<0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{两根大小未知，则比较大小}}\begin{cases}x_1=x_2\\x_1>x_2\\x_1<x_2\end{cases}$

3．解分式不等式

(1)$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\quad\Leftrightarrow\quad f(x)g(x)>0(<0)$；

(2)$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0(\leqslant 0)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}f\left(x\right)g\left(x\right)\ge 0(\le 0)\\ g\left(x\right)\ne 0\end{cases}$.

4．解绝对值不等式

平方后变成开口向上的一元二次不等式，再按一元二次不等式求解．

5．解指数不等式

(1)形如 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$的不等式，可借助 $y=a^x$ 的单调性求解；

(2)形如 $a^{f(x)}>b$ 的不等式，可将 b 化为以 a 为底数的指数幂的形式，再借助 $y=a^x$ 的单调性求解；

(3)形如 $a^x>b^x$ 的不等式，可借助两函数 $y=a^x$，$y=b^x$ 的图象求解．

6．解对数不等式

(1)形如 $\log_a x>\log_a b$ 的不等式，借助 $y=\log_a x$ 的单调性求解，如果 a 的取值不确定，需分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况进行讨论.

(2)形如 $\log_a x>b$ 的不等式，应将 b 化为以 a 为底数的对数式的形式($b=\log_a a^b$)，再借助 $y=\log_a x$ 的单调性求解.

(3)形如 $\log_{f(x)}a>\log_{g(x)}a$ ($f(x)$，$g(x)>0$ 且不等于 1，$a>0$)的不等式，可利用换底公式化为同底的对数进行求解，或利用函数图象求解.

7．解三角函数不等式

用三角函数图象解三角不等式的步骤

(1)作出相应的正弦函数或余弦函数或正切函数在$[0,2\pi]$上的图象；

(2)写出不等式在区间$[0,2\pi]$上的解集；

(3)根据公式一写出定义域内的解集.

例题详解

一．解不含参数的一元二次不等式

例 1． 解不等式：(1) $x^2-x-2\le 4$.

(2) $-2x^2+3x-1<0$.

(3) $-\frac{1}{2}x^2+3x-5>0$.

(4) $-\frac{1}{2}x^2+3x-5\le 0$.

(5) $-4x^2+4x-1<0$

(6) $x^2-6x+9\le 0$；

(7) $x^2\ge 1$.

【复习指导】：对比以上 7 个小例题，结合图像，总结区分解集为两根之间、两根之外、Ø、R、＝或≠某根的情况。

【详解】 (1) $x^2-x-6\le 0$

$(x+2)(x-3)\le 0$

所以 $-2\le x\le 3$ ，即解集为 $\{x\,|-2\le x\le 3\}$.

(2) $-2x^2+3x-1<0$ 等价于 $2x^2-3x+1>0$ 等价于 $(2x-1)(x-1)>0$，解得：$x>1$ 或 $x<\frac{1}{2}$，所以不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$；

⑶$-\frac{1}{2}x^2+3x-5>0$，$x^2-6x+10<0$，

$\Delta=\left(-6\right)^2-4\times10=-4<0$，

所以原不等式的解集为$\varnothing$.

⑷设函数$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-5$，令$g(x)=0$，则$\Delta=3^2-4\times(-\frac{1}{2})\times(-5)=-1<0$，即函数$g(x)$的图象与$x$轴无公共点，

又二次函数$g(x)$图象开口向下，不等式$g(x)\le0$恒成立，

所以不等式$-\frac{1}{2}x^2+3x-5\le0$的解集是：**R**.

⑸因为$-4x^2+4x-1=-\left(2x-1\right)^2\le0$，所以$-4x^2+4x-1<0$的解集为$\left\{x\middle|x\ne\frac{1}{2}\right\}$.

⑹$x^2-6x+9=(x-3)^2\le0$，可得$x=3$，

$\therefore$不等式解集为$\left\{x\mid x=3\right\}$.

⑺原不等式造价变形为$x^2-1\ge0$，即$(x+1)(x-1)\ge0$，

设函数$\varphi(x)=(x+1)(x-1)$，则函数$\varphi(x)$的图象与x轴交点的横坐标为-1或1，

又二次函数$\varphi(x)$图象开口向上，由$\varphi(x)\ge0$得：得$x\le-1$或$x\ge1$，

所以不等式$x^2\ge1$的解集是：$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

二．解含参数的一元二次不等式

例 2．解关于x的不等式：$x^2+(1-a)x-a<0$

【详解】方程$x^2+(1-a)x-a=0$的解为$x_1=-1$，$x_2=a$，

当$a>-1$时，原不等式的解集为$\left(-1,a\right)$；

当$a=-1$时，原不等式的解集为$\varnothing$；

当$a<-1$时，原不等式的解集为$\left(a,-1\right)$.

例 3. 解关于x的不等式：$ax^2+(1-2a)x-2>0$.

【复习指导】： 1.十字相乘法进行因式分解；2.对 ax^2 前的 a 进行分类讨论，a=0，a>0，a<0；3.对两根进行比较大小，分类讨论。

【详解】①当 $a=0$ 时，原不等式可化为：$x-2>0$,可得不等式的解集为$(2,+\infty)$，

②当 $a>0$ 时，原不等式可化为：$(x-2)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)>0$，

不等式的解集为：$(-\infty,-\dfrac{1}{a})\cup(2,+\infty)$；

③当 $a<0$ 时，原不等式可化为：$(x-2)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)<0$，

当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，不等式的解集为：$\left(2,-\dfrac{1}{a}\right)$，

当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式的解集为：$\left(-\dfrac{1}{a},2\right)$，

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式的解集为:$\varnothing$.

三．解分式不等式

例 4. 解不等式：（1）$\dfrac{2x-1}{x+4}<0$.　(2) $\dfrac{8-x}{5+x}\geq 0$.　(3) $\dfrac{2+x}{3-x}>1$.　(4) $\dfrac{5-x}{x+4}\geq 1$.

【复习指导】： 1. 注意分母≠0 的情况；2. 不等号右边是非 0 常数时，一般化为不等号右边为 0 的一元二次不等式再计算。

【详解】（1）原不等式化为：$(2x-1)(x+4)<0$

方程 $(2x-1)(x+4)=0$ 的 2 个解为 $x_1=-4$，$x_2=\dfrac{1}{2}$

根据函数 $y=(2x-1)(x+4)$ 的图像，可知：原不等式解集为$\left\{x\,|-4<x<\dfrac{1}{2}\right\}$.

（2）由 $\dfrac{8-x}{5+x}\geq 0$ 得 $\dfrac{x-8}{5+x}\leq 0$，$\therefore\begin{cases}(x-8)(5+x)\leq 0\\5+x\neq 0\end{cases}$，解得 $-5<x\leq 8$，

故不等式 $\dfrac{8-x}{5+x}\geq 0$ 的解集为$(-5,8]$.

(3)依题意：$\frac{2+x}{3-x}-1>0$，$\frac{2x-1}{3-x}>0$，$\frac{2x-1}{x-3}<0$，$(x-3)(2x-1)<0$，解集为$\{x|\frac{1}{2}<x<3\}$.

(4)原不等式可变形为$\frac{2x-1}{x+4}\le 0$，即$\begin{cases}(2x-1)(x+4)\le 0\\ x\ne -4\end{cases}$，

设函数$h(x)=(2x-1)(x+4)$，由$h(x)=0$得$x=-4$或$x=\frac{1}{2}$，即函数$h(x)$的图象与x轴交点的横坐标为-4或$\frac{1}{2}$，

又二次函数$h(x)$图象开口向上，由$h(x)\le 0$，且$x\ne -4$得：$-4<x\le\frac{1}{2}$，所以不等式$\frac{5-x}{x+4}\ge 1$的解集是：$(-4,\frac{1}{2}]$.

四．解绝对值不等式

例5． 解下列不等式：

(1)$\left|x+\frac{1}{2}\right|>2$；

(2)$|3x-1|\le 6$；

(3)$4<|1-3x|\le 7$；

(4)$|2x-1|>2-3x$；

(5)$|x-1|>|2x+3|$；

(6)$|x-4|-|2x-3|\le 1$.

【复习指导】：解含绝对值的不等式时，(1)利用公式$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f(x)>a$或$f(x)<-a$，$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$化简不等式求其解；(2) 不等式两边正负性相同时，可通过两边平方化简不等式求其解；(3)通过讨论去掉绝对值，再解不等式可得结果.

【详解】(1)利用绝对值的几何意义可以将$\left|x+\frac{1}{2}\right|>2$转化为$x+\frac{1}{2}>2$或$x+\frac{1}{2}<-2$，解得$x<-\frac{5}{2}$或$x>\frac{3}{2}$；

(2)利用绝对值的几何意义可以将$|3x-1|\le 6$转化为$-6\le 3x-1\le 6$，从而解得$\left\{x|-\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}\right\}$.

(3)不等式$4<|1-3x|\le 7$可化为$\begin{cases}|1-3x|>4\\ |1-3x|\le 7\end{cases}$，

由$|1-3x|>4$可得$1-3x>4$或$1-3x<-4$

$\therefore x<-1$或$x>\frac{5}{3}$，

由$|1-3x|\le 7$可得$-7\le 1-3x\le 7$，

∴ $-2 \le x \le \frac{8}{3}$，

∴ $-2 \le x < -1$ 或 $\frac{5}{3} < x \le \frac{8}{3}$，

∴ $4 < |1-3x| \le 7$ 的解集为 $[-2,-1) \cup \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$

(4)不等式 $|2x-1| > 2-3x$ 可化为 $\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-1 > 2-3x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 1-2x > 2-3x \end{cases}$，

∴ $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x > \frac{3}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$，

∴ $x > \frac{3}{5}$，

∴ 不等式 $|2x-1| > 2-3x$ 的解集为 $\left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$，

(5)由不等式 $|x-1| > |2x+3|$ 两边平方得，$(x-1)^2 > (2x+3)^2$，整理得 $3x^2+14x+8<0$，即 $(x+4)(3x+2)<0$，解得 $-4 < x < -\frac{2}{3}$，所以，原不等式的解集为 $\left(-4, -\frac{2}{3}\right)$.

(6)不等式 $|x-4|-|2x-3| \le 1$ 可化为

$\begin{cases} x \ge 4 \\ x-4-(2x-3) \le 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{3}{2} < x < 4 \\ 4-x-(2x-3) \le 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \le \frac{3}{2} \\ 4-x-(3-2x) \le 1 \end{cases}$

∴ $x \ge 4$ 或 $2 \le x < 4$ 或 $x \le 0$，

故 $|x-4|-|2x-3| \le 1$ 的解集为 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

五．解指数不等式

例 6． 解不等式：（1）$3^{x-1} > 9^x$；

（2）$0.2^x < 25$.

（3）$(\frac{1}{3})^{2x-1} \ge 27$

（4）$4^x - 4 \cdot 2^x - 12 > 0$

【复习指导】： 解指数不等式时，将不等式两边的指数幂或常数化为同底数的指数幂，再利用指数函数的单调性解不等式。

【详解】（1）Q $3^{x-1}>9^{x},\therefore 3^{x-1}>3^{2x}$.又 $y=3^{x}$ 在定义域 R 上是增函数，

$\therefore x-1>2x,\quad \therefore x<-1$，即 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

（2）Q $0<0.2<1$，∴指数函数 $f(x)=0.2^{x}$ 在 R 上是减函数.

又 $25=0.2^{-2},\therefore 0.2^{x}<0.2^{-2},\therefore x>-2$，即 x 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

（3）由 $(\dfrac{1}{3})^{2x-1}\geq 27$，得 $3^{1-2x}\geq 3^{3}$

又因为 $y=3^{x}$ 是增函数，$1-2x\geq 3$，解得 $x\leq -1$.

所以解集为 $\left\{x\middle|x\leq -1\right\}$

（4）原不等式可化为 $\left(2^{x}+2\right)\left(2^{x}-6\right)>0$，

因为 $2^{x}+2>0$，所以 $2^{x}>6$， 解得 $x>\log_{2}6$.

所以原不等式的解集是 $\left(\log_{2}6,+\infty\right)$.

例 7. 解关于x的不等式$a^{2x^2-3x+2}>a^{2x^2+2x-3}$ （$a>0$，且$a\neq 1$）.

【详解】当 $0<a<1$ 时，原不等式可化为 $2x^{2}-3x+2<2x^{2}+2x-3$，

解得: $x>1$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>1\right\}$；

当 $a>1$ 时，原不等式可化为 $2x^{2}-3x+2>2x^{2}+2x-3$，

解得： $x<1$ ，所以原不等式的解集为 $\{x\mid x<1\}$.

六．解对数不等式

例 8. 解不等式:（1）$log_2 x<log_2(x^2-3x)$

（2）$lg(x^2-3x)<1$

（3）$\log_{0.7}(4x)\geq \log_{0.7}(x+3)$.

（4）$(\frac{1}{2})^{log_3(x-1)}\geq 2$.

【复习指导】:

解对数不等式时，将常数化为同底数的对数结构，利用对数函数的单调性化简不等式，特别要注意对数函数的真数＞0，不要漏写不等式。

【详解】（1）由 $\log_2 x<\log_2(x^2-3x)$，得 $0<x<x^2-3x$，

解得 $x>4$，所以不等式的解集为 $(4,+\infty)$

（2）原不等式可以化为 $\lg\left(x^2-3x\right)<\lg 10$，

由于对数函数 $y=\lg x$ 是定义域为 $\left(0,+\infty\right)$ 上的增函数，

$\therefore$ 原不等式等价于 $\begin{cases}x^2-3x>0\\x^2-3x<10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\langle 0\text{或}x\rangle 3\\-2<x<5\end{cases}\Rightarrow -2<x<0$ 或 $3<x<5$，

因此，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-2<x<0\text{ 或 }3<x<5\right\}$.

（3） $\log_{0.7}(4x)\geq\log_{0.7}(x+3)$.

Q $0.7<1$，函数 $y=\log_{0.7}x$ 是减函数，.

$\therefore$ 由 $\log_{0.7}(4x)\geq\log_{0.7}(x+3)$，得：

$4x\leq x+3$，解出：$x\leq 1$，

又 $\begin{cases}4x>0\\x+3>0\end{cases}$ 解出：$x>0$

综上，$0<x\leq 1$.

（4）不等式 $(\frac{1}{2})^{log_3(x-1)}\geq 2$ 可化为 log_3（x-1）≤-1，

即 0＜x-1≤$\frac{1}{3}$，解得 1＜x≤$\frac{4}{3}$，

所以不等式的解集为（1，$\frac{4}{3}$].

例 9．解不等式：$\log_a(x-4)>\log_a(x-2)$

【详解】(1)当 $a>1$ 时，原不等式等价于 $\begin{cases}x-4>x-2\\x-4>0\\x-2>0\end{cases}$ 该不等式组无解；

(2)当 $0<a<1$ 时，原不等式等价于 $\begin{cases}x-4<x-2\\x-4>0\\x-2>0\end{cases}$ 解得 $x>4$.

所以当 $a>1$ 时，原不等式的解集为空集；

当 0<a<1 时，原不等式的解集为(4，＋∞).

七．解三角函数不等式

例 10． 求下列不等式的解集.

（1）$\frac{1}{2}+sin x\geq 0$；

（2）$cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$；

（3）$3 tan x-\sqrt{3}\geq 0$.

（4）$-\frac{1}{2}\leq \sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$

（5）$\frac{\sqrt{3}}{3}\leq tan x<1$.

【复习指导】：将三角函数不等式化为形如 $\sin x\geq -\frac{1}{2}$ 的形式，即不等号一边是三角函数值，另一边是常数，然后结合三角函数图像找出正确的范围，注意检查不等式结果是否要有“＝”号。

【详解】（1）$\because \frac{1}{2}+\sin x\geq 0$，$\therefore \sin x\geq -\frac{1}{2}$，

利用正弦线或正弦曲线可知所求解集为 $\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in Z\right.\right\}$.

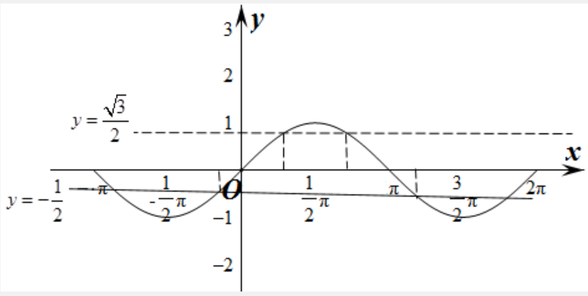
（2）$\because \cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，$\therefore \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

利用余弦线或余弦曲线可知所求解集为 $\left\{x\left|\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi,k\in Z\right.\right\}$.

（3）$\because 3\tan x-\sqrt{3}\geq 0\ \therefore \tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，

利用正切线或正切曲线可知所求解集为 $\left\{x\left|\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right.\right\}$.

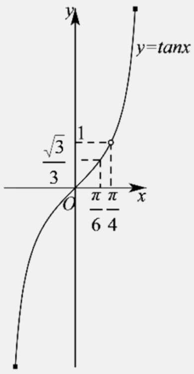
（4）作出正弦函数的图象，如图：



由图象可知，当$-\frac{1}{2}\le\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$时，

则$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\le\theta<2k\pi+\frac{\pi}{3}$或　$2k\pi+\frac{2}{3}\pi<\theta\le2k\pi+\frac{7}{6}\pi(k\in z)$

（5）作出正切函数$y=\tan x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的图象如下图所示：



由图象可知，不等式$\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x<1$在$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的解为$\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{4}$.

因此，不等式$\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x<1$的解集为$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in Z)$.

达标检测

1．不等式$-x^2+3x+18<0$的解集为（　　）

A．$\{x|x>6$或$x<-3\}$　　　　B．$\{x|-3<x<6\}$

C．$\{x|x>3$或$x<-6\}$　　　　D．$\{x|-6<x<3\}$

【答案】A

【分析】根据二次不等式的解法求解即可.

【详解】$-x^2+3x+18<0$可化为$x^2-3x-18>0$，

即$\left(x-6\right)\left(x+3\right)>0$，即$x>6$或$x<-3$.

所以不等式的解集为$\{x|x>6$或$x<-3\}$.

故选：A

2．“$-2<x<-1$”是“$|x|>1$”成立的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】解不等式$|x|>1$，再根据充分条件和必要条件的定义即可得出结论.

【详解】解：解不等式$|x|>1$，得$x>1$或$x<-1$，

又$-2<x<-1$，

所以“$-2<x<-1$”是“$|x|>1$”成立的充分不必要条件.

故选：A.

3．不等式$\dfrac{|x+1|}{|x-1|}<1$的解集为（　）

A．$\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$　B．$\{x|0<x<1\}$

C．$\{x|-1<x<0\}$　D．$\{x|x<0\}$

【答案】D

【分析】将不等式转化为$|x+1|<|x-1|$，通过平方可解得结果.

【详解】不等式$\dfrac{|x+1|}{|x-1|}<1\Leftrightarrow|x+1|<|x-1|\left(x\neq1\right)\Leftrightarrow|x+1|^2<|x-1|^2\left(x\neq1\right)\Leftrightarrow x<0$.

故选：D.

4．已知集合$A=\{x\,|\log_2 x<3\},B=\{x\,||x-1|<3\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$(0,4)$　　B．$(-2,3)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$(-2,8)$

【答案】A

【分析】先根据对数函数的单调性和绝对值不等式求得集合 A,B，再根据交集的运算即可求解.

【详解】解：因为 $A=\{x\,|\,0<x<8\},B=\{x\,||\,x-1\,|<3\}=\{x\,|-2<x<4\}$，

所以 $A\cap B=\{x\,|\,0<x<4\}$.

故选：A.

5．已知 $x\in R$，“$|x+1|>3$”是“$x^2>4$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】求出 $|x+1|>3$ 和 $x^2>4$ 的解集，再根据集合间的关系，即可得解；

【详解】解不等式 $|x+1|>3$ 可得 $x+1<-3$ 或 $x+1>3$，解得 $x<-4$ 或 $x>2$，

解不等式 $x^2>4$，可得 $x<-2$ 或 $x>2$.

Q $\{x|x<-4$ 或 $x>2\}\subset\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$，

因此，“$|x+1|>3$”是“$x^2>4$”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】掌握充分条件和必要条件的定义是解题关键.

6．设集合 $A=\{x||4x-1|\geq 9\}$，$B=\left\{x|\dfrac{x}{x+3}\leq 0\right\}$，则 $A\cap B$ 等于（　）

A．$(-3,-2]$　　B．$(-3,-2]\cup\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$

C．$(-\infty,-2]\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　D．$(-\infty,-3)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【分析】根据绝对值不等式与分式不等式的解法求出集合的等价条件，根据集合的交集运算进行求解即可.

【详解】因为 $A=\{x||4x-1|\geq 9\}=\{x\,|\,x\leq -2$ 或 $x\geq\dfrac{5}{2}\}$，，

$B=\left\{x\,|\,\frac{x}{x+3}\le 0\right\}=\{x\,|-3<x\le 0\}$，

所以 $A\cap B=(-3,-2]$，

故选：A．

7．设 $x\in \mathbf{R}$，则"$|2x-1|\le 5$"的必要不充分条件是（　）

A．$[-2,3)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$[-2,4]$　　D．$[3,+\infty)$

【答案】C

【分析】根据必要不充分条件的含义可知所选集合应该能真包含集合$[-2,3]$，由此可判断答案.

【详解】由$|2x-1|\le 5$，得$-5\le 2x-1\le 5$，即$-2\le x\le 3$，

则选项是"$-2\le x\le 3$"的必要不充分条件，即$[-2,3]$是选项中集合的真子集，

结合选项，A,B 中集合都不含 3，不符合题意，D 中集合$[3,+\infty)$不能包含$[-2,3]$，不符合题意，

而 C 集合满足$[-2,3]\subsetneqq[-2,4]$，

故选：C.

8．设全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x|\ \mathrm{e}^{x-3}>\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right\},B=\left\{x|\ x^2-2x-3<0\right\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$（　）

A．$\{x|-1\le x\le 1\}$　　B．$\{x|\ x\le -1\}$

C．$\{x|\ x\le 1$或$x\ge 3\}$　　D．$\{x|\ x\le 3\}$

【答案】B

【分析】根据指数函数的性质求出集合A，再解一元二次不等式求出集合B，最后根据并集、补集的定义计算可得.

【详解】解：由$\mathrm{e}^{x-3}>\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，即$\mathrm{e}^{x-3}>\mathrm{e}^{-2}$，所以$x-3>-2$，解得$x>1$，

所以$A=\left\{x|\ \mathrm{e}^{x-3}>\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right\}=\{x\,|\,x>1\}$，

由$x^2-2x-3<0$，即$(x+1)(x-3)<0$，解得$-1<x<3$，

所以$B=\left\{x|\ x^2-2x-3<0\right\}=\{x\,|-1<x<3\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid x>-1\}$，

所以 $\complement_R\left(A\cup B\right)=\left\{x\middle|\ x\le -1\right\}$；

故选：B

9．设集合 $A=\left\{x\middle|1\le 2^x\le 8\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ \log_3(x-1)<1\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\left[0,3\right]$　　B．$\left[1,3\right]$　　C．$\left(1,3\right]$　　D．$\left[0,4\right]$

【答案】C

【分析】首先解指数不等式与对数不等式分别求出集合 A、B，再根据交集的定义计算可得.

【详解】解：由 $1\le 2^x\le 8$，即 $2^0\le 2^x\le 2^3$，所以 $0\le x\le 3$，即 $A=\left\{x\mid 1\le 2^x\le 8\right\}=\left\{x\mid 0\le x\le 3\right\}$，

由 $\log_3(x-1)<1$，即 $\log_3(x-1)<\log_3 3$，所以 $0<x-1<3$，所以 $1<x<4$，

所以 $B=\left\{x\middle|\ \log_3(x-1)<1\right\}=\left\{x\mid 1<x<4\right\}$，

则 $A\cap B=\left(1,3\right]$；

故选：C

10．若集合 $A=\{x|\sqrt{x}<1\},B=\left\{x\middle|2^x\le\sqrt{2}\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right)$

【答案】C

【分析】解无理不等式确定集合 A，解指数不等式确定集合 B，然后由交集定义求解.

【详解】$A=\{x\mid\sqrt{x}<1\}=\{x\mid 0\le x<1\}$，$B=\{x\mid 2^x\le\sqrt{2}\}=\{x\mid x\le\frac{1}{2}\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 0\le x\le\frac{1}{2}\}$.

故选：C.

11．设集合 $M=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^x<8\right\}$，$N=\left\{x\mid x^2-2x<0\right\}$，则 $M\cap N$ 等于（　）

A．$\left\{x\mid -1<x<3\right\}$　　B．$\{x\mid -1<x<2\}$

C．$\{x\mid 0<x<1\}$　　D．$\{x\mid 0<x<2\}$

【答案】D

【分析】首先解指数不等式、一元二次不等式求出集合 M 、 N ，再根据交集的定义计算可得.

【详解】解：由 $\frac{1}{2}<2^x<8$ ，即 $2^{-1}<2^x<2^3$，解得 $-1<x<3$，所以 $M=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^x<8\right.\right\}=\{x\mid -1<x<3\}$，

由 $x^2-2x<0$ ，即 $x(x-2)<0$ ，解得 $0<x<2$，即 $N=\{x\mid x^2-2x<0\}=\{x\mid 0<x<2\}$，

所以 $M \cap N=\{x\mid 0<x<2\}$.

故选：D

12．“$2^a>2^b$”是“$\log_2 a>\log_2 b$”的（　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】由 $2^a>2^b$ 是否得出 $\log_2 a>\log_2 b$ ，判定充分性；由 $\log_2 a>\log_2 b$ 是否推出 $2^a>2^b$ ，判定必要性是否成立.

【详解】$\because 2^a>2^b$ 等价于 $a>b$ ，

当 $0 \geq a>b$ 或 $a>0\geq b$ 时， $\log_2 a>\log_2 b$ 不成立；

$\therefore$充分性不成立；

又$\because \log_2 a>\log_2 b$ 等价于 $a>b>0$，有 $2^a>2^b$；

$\therefore$必要性成立；

$\therefore$“$2^a>2^b$”是“$\log_{2^a}>\log_{2^b}$”的必要不充分条件.

故选：B.

13．设全集 $U=\mathbf{R}$， $A=\{x\in N\mid y=\ln(2-x)\},B=\{x\mid 2^{x(x-2)}\leq 1\}$， $A\cap B=$（　）

A． $\{x\mid x\geq 1\}$　　B． $\{x\mid 1\leq x<2\}$　　C． $\{1\}$　　D． $\{0,1\}$

【答案】D

【分析】由题分别算出集合 A,B 包含的范围,再取交集即可.

【详解】由 $A=\{x\in N\mid y=\ln(2-x)\}$ 得 $2-x>0,x<2$,又 $x\in\mathbf{N}$ 所以 $x=0,1$.

又 $B=\{x\mid 2^{x(x-2)}\leq 1\}$,其中 $2^{x(x-2)}\leq 1=2^0 \Rightarrow x(x-2)\leq 0$

所以$0\le x\le 2$,故$A=\{0,1\},B=\left\{x\,|\,0\le x\le 2\right\}$ ，

所以$A\cap B=\left\{0,1\right\}$.

故选 D.

【点睛】本题主要考查集合的基本运算,注意看清集合是自变量还是因变量的范围.

14．设集合 M=$\left\{x\,|\,2^x>1\right\}$，$N=\left\{x\,|\,\dfrac{x+1}{x-1}<0\right\}$，则 M∩N=（　）

A．[0，1)　　　　B．(0，1)　　　　C．(－1，+∞)　　　　D．(1，+∞)

【答案】B

【分析】首先求出集合M，N，再根据交集的定义计算可得；

【详解】解：因为 M=$\left\{x\,|\,2^x>1\right\}$，$N=\left\{x\,|\,\dfrac{x+1}{x-1}<0\right\}$

所以$M=\left\{x\,|\,x>0\right\},N=\left\{x\,|\,-1<x<1\right\}$，　$M\cap N=\left\{x\,|\,0<x<1\right\}$，

故选：B

15．已知集合$A=\left\{x\middle|-5\le 2x-1\le 5\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\sqrt{9-3^x}\right\}$，则$A\cup B=$（　）

A．$\left[-2,2\right]$　　　　B．$\left(-\infty,2\right]$　　　　C．$\left[2,+\infty\right)$　　　　D．$\left(-\infty,3\right]$

【答案】D

【分析】解一元一次不等式得集合 A，由根式的性质求集合 B，根据并运算求$A\cup B$即可.

【详解】由题意知，$A=\left\{x\middle|-2\le x\le 3\right\}$，$B=\left\{x\middle|x\le 2\right\}$，

$\therefore A\cup B=\left\{x\middle|x\le 3\right\}$.

故选：D

16．已知集合$A=\left\{x\middle|\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}>1\right\}$，集合$B=\left\{x\middle|\log_2 x\le 1\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．(0, 1)　　　　B．$(1,2]$　　　　C．$(0,2]$　　　　D．$\varnothing$

【答案】A

【分析】首先解指数不等式与对数不等式求出集合A、B，再根据交集的定义计算可得；

【详解】解：由$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}>1$，即$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$，所以$x-1<0$，所以$x<1$，所以$A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}>1\right.\right\}=(-\infty,1)$，

由$\log_2 x\le 1$，所以$\log_2 x\le\log_2 2$，所以$0<x\le 2$，即$B=\left\{x\left|\log_2 x\le 1\right.\right\}=(0,2]$，所以$A\cap B=(0,1)$.

故选：A

17．已知集合$A=\left\{x\left|x^2<\frac{9}{4}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}<2^x<4\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|-2<x<2\right.\right\}$　　C．$\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<2\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|-2<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$

【答案】A

【分析】首先求出集合A、B，再根据交集的定义计算即可；

【详解】解：因为$A=\left\{x\left|x^2<\frac{9}{4}\right.\right\}=\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}<2^x<4\right.\right\}=\left\{x\left|-2<x<2\right.\right\}$，所以

$A\cap B=\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，

故选：A.

18．设集合$A=\left\{x\left|1\le\log_2 x\le 3\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2-3x-4<0\right.\right\}$，则$A\cup B$等于（　　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-1,8]$　　C．$[2,4)$　　D．$[4,8]$

【答案】B

【分析】解出集合A、B，利用并集的定义可求出集合$A\cup B$.

【详解】$\because A=\left\{x\left|1\le\log_2 x\le 3\right.\right\}=[2,8]$，$B=\left\{x\left|x^2-3x-4<0\right.\right\}=(-1,4)$，因此，$A\cup B=(-1,8]$.

故选：B.

【点睛】本题考查并集的计算，同时也考查了对数不等式和一元二次不等式的求解，考查计算能力，属于基础题.

19．已知集合$P=\left\{x\left|\log_2(3-x)\le 1\right.\right\}$，$Q=\left\{x\left|\frac{3x-2}{x}\le 2\right.\right\}$，则$\left(\complement_R P\right)\cap Q=$（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(0,1]$　　C．$[1,2]$　　D．$(1,2]$

【答案】A