专题 05 数列下的新定义

【题型归纳目录】

题型一：牛顿数列问题

题型二：高考真题下的数列新定义

题型三：数列定义新概念

题型四：数列定义新运算

题型五：数列定义新情景

题型六：差分数列、对称数列

题型七：非典型新定义数列

【方法技巧与总结】

1、“新定义型”数列题考查了学生阅读和理解能力，同时考查了学生对新知识、新事物接受能力和加以简单运用的能力，考查了学生探究精神．要求解题者通过观察、阅读、归纳、探索进行迁移，即读懂和理解新定义，获取有用的新信息，然后运用这些有效的信息进一步推理，综合运用数学知识解决问题的能力和探索能力(多想少算甚至不算)．因此，“新定义型”数列在高考中常有体现，是一种用知识归类、套路总结、强化训练等传统教学方法却难以解决高考中不断出现的新颖试题．

2、解答与数列有关的新定义问题的策略：

(1)通过给定的与数列有关的新定义，或约定的一种新运算，或给出的由几个新模型来创设的新问题的情景，要求在阅读理解的基础上，依据题设所提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的.

(2)遇到新定义问题，需耐心研究题中信息，分析新定义的特点，搞清新定义的本质，按新定义的要求“照章办事”，逐条分析、运算、验证，使问题得以顺利解决.

(3)类比“熟悉数列”的研究方式，用特殊化的方法研究新数列，向“熟悉数列”的性质靠拢.

【典型例题】

题型一：牛顿数列问题

【典例 1-1】(2024·广东韶关·二模)记 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，满足 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的数列 $\left\{x_n\right\}$ 称为函数 $f\left(x\right)$ 的“牛顿数列”.已知数列 $\left\{x_n\right\}$ 为函数 $f\left(x\right)=x^2-x$ 的牛顿数列，且数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=2,a_n=\ln\dfrac{x_n}{x_n-1},x_n>1$.

(1)求 a_2；

(2)证明数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列并求 a_n；

(3)设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，若不等式 $(-1)^n\cdot tS_n-14\le S_n^2$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求 t 的取值范围.

【解析】(1)因为 $f(x)=x^2-x$，则 $f'(x)=2x-1$，从而有 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\dfrac{x_n^2-x_n}{2x_n-1}=\dfrac{x_n^2}{2x_n-1}$，

由 $a_1=2, a_n=\ln\dfrac{x_n}{x_n-1}$，则 $2=\ln\dfrac{x_1}{x_1-1}$，

则 $\dfrac{x_1}{x_1-1}=\mathrm{e}^2$，解得 $x_1=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2-1}$ 则有 $x_2=\dfrac{x_1^2}{2x_1-1}=\dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4-1}$，所以 $a_2=\ln\dfrac{x_2}{x_2-1}=2\ln\dfrac{x_1}{x_1-1}=4$；

(2)由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2x_n-1}$，则 $\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{x_n^2}{2x_n-1}}{\dfrac{x_n^2}{2x_n-1}-1}=\dfrac{x_n^{\ 2}}{x_n^{\ 2}-2x_n+1}=\left(\dfrac{x_n}{x_n-1}\right)^2$，

所以 $a_{n+1}=\ln\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}-1}=\ln\left(\dfrac{x_n}{x_n-1}\right)^2=2\ln\dfrac{x_n}{x_n-1}=2a_n(x_n>1)$，

故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$ (非零常数)，且 $a_1=2\neq0$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$；

(3)由等比数列的前 n 项和公式得：$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

因为不等式 $(-1)^n\cdot tS_n-14\leq S_n^{\ 2}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，又 $S_n>0$ 且 S_n 单调递增，

所以 $(-1)^n\cdot t\leq S_n+\dfrac{14}{S_n}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，令 $g(x)=x+\dfrac{14}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=1-\dfrac{14}{x^2}=\dfrac{x^2-14}{x^2}$，当 $x\in(0,\sqrt{14})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 是减函数，

当 $x\in(\sqrt{14},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 是增函数，

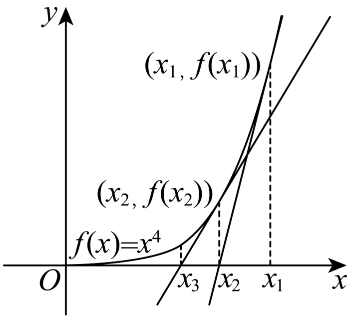
又 $2=S_1<\sqrt{14}<S_2=6$，且 $g(2)=9$，$g(6)=\dfrac{25}{3}$，$g(6)<g(2)$，则 $g(x)_{\min}=g(6)=\dfrac{25}{3}$，

当 n 为偶数时，原式化简为 $t\leq S_n+\dfrac{14}{S_n}$，所以当 $n=2$ 时，$t\leq\dfrac{25}{3}$；

当 n 为奇数时，原式化简为 $-t\leq S_n+\dfrac{14}{S_n}$，所以当 $n=1$ 时，$-t\leq9$，所以 $t\geq-9$；

综上可知，$-9\leq t\leq\dfrac{25}{3}$.

【典例 1-2】(2024·高二·浙江绍兴·期末)物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出了“牛顿数列”，它在航空航天中应用非常广泛．其定义是：对于函数 $f(x)$，若满足 $(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列．已知 $f(x)=x^4$，如图，在横坐标为 $x_1=1$ 的点处作 $f(x)$ 的切线，切线与 x 轴交点的横坐标为 x_2，用 x_2 代替 x_1 重复上述过程得到 x_3，一直下去，得到数列 $\{x_n\}$.



(1)求数列$\{x_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{n\cdot x_n\}$的前 n 项和为S_n，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，满足$S_n\geq 16-\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^n$，求整数$\lambda$的最小值．(参考数据：$0.9^4=0.6561$，$0.9^5\approx 0.5905$，$0.9^6\approx 0.5314$，$0.9^7\approx 0.4783$)

【解析】(1)

$\because f'(x)=4x^3$，

$\therefore f(x)$在点(x_n,y_n)处的切线方程为：$y-y_n=4x_n^3(x-x_n)$

令$y=0$，得$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n$，

所以$\{x_n\}$是首项为 1，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列，

故$x_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(2)令$b_n=n\cdot x_n=n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

法一：错位相减法

$S_n=1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，

$\frac{3}{4}S_n=\qquad 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots+n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

两式相减得：$\frac{1}{4}S_n=1+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

化简得：$S_n=16-(16+4n)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

故$16-(16+4n)\left(\frac{3}{4}\right)^n\geq 16-\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^n$，

化简得$\lambda\geq(16+4n)\left(\frac{9}{10}\right)^n$

令 $d_n=(16+4n)\left(\frac{9}{10}\right)^n$，

则 $d_{n+1}-d_n=\left(\frac{-2n+10}{5}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^n$，

当 $n\le 5$ 时，$d_{n+1}-d_n\ge 0$，即 $d_6=d_5>d_4>d_3>d_2>d_1$，

当 $n\ge 6$ 时，$d_{n+1}-d_n<0$，即 $d_6>d_7>d_8>\ldots$，

所以 $(d_n)_{\max}=d_5=d_6=36\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5\approx 21.26$

从而整数 $\lambda_{\min}=22$；

法二：裂项相消法

由 $b_n=n\cdot x_n=\frac{4}{3}n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

设 $c_n=(kn+m)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 且 $b_n=c_{n+1}-c_n$，

则 $\frac{4}{3}n\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(-\frac{kn}{4}+\frac{3k-m}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

于是 $\begin{cases}-\frac{k}{4}=\frac{4}{3}\\ \frac{3k-m}{4}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}k=-\frac{16}{3}\\ m=-16\end{cases}$，

即 $c_n=\left(-\frac{16}{3}n-16\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left[(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_{n+1}-c_n)\right]$

$=c_{n+1}-c_1=16-(16+4n)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

故 $16-(16+4n)\left(\frac{3}{4}\right)^n\ge 16-\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^n$，化简得 $\lambda\ge(16+4n)\left(\frac{9}{10}\right)^n$

令 $d_n=(16+4n)\left(\frac{9}{10}\right)^n$，

则 $\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{45+9n}{40+10n}\ge 1$ 时，$n\le 5$，

当当 $n\le 5$ 时，$\frac{d_{n+1}}{d_n}\ge 1$，即 $d_6=d_5>d_4>d_3>d_2>d_1$，

当 $n\ge 6$ 时，$0<\frac{d_{n+1}}{d_n}<1$，即 $d_6>d_7>d_8>\ldots$，

所以$(d_n)_{\max}=d_5=d_6=36\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5\approx 21.26$

从而整数$\lambda_{\min}=22$

【变式 1-1】(2024·广东广州·二模)已知函数$f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$.

(1)证明：$f(x)$恰有一个零点a，且$a\in(1,b)$；

(2)我们曾学习过“二分法”求函数零点的近似值，另一种常用的求零点近似值的方法是“牛顿切线法”.任取$x_1\in(1,a)$，实施如下步骤：在点$(x_1,f(x_1))$处作$f(x)$的切线，交x轴于点$(x_2,0)$：在点$(x_2,f(x_2))$处作$f(x)$的切线，交x轴于点$(x_3,0)$；一直继续下去，可以得到一个数列$\{x_n\}$，它的各项是$f(x)$不同精确度的零点近似值.

(i)设$x_{n+1}=g(x_n)$，求$g(x_n)$的解析式；

(ii)证明：当$x_1\in(1,a)$，总有$x_n<x_{n+1}<a$.

【解析】(1) $f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$，定义域为$(0,+\infty)$，

所以，$f'(x)=\frac{1}{x}+2>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$f(1)=\ln 1+2-b=2-b<0(b>2)$，$f(b)=\ln b+2b-b=\ln b+b>0(b>2)$，

所以，存在唯一$a\in(1,b)$，使得$f(a)=0$，即：$f(x)$有唯一零点a，且$a\in(1,b)$；

(2)(i)由(1)知$f'(x)=\frac{1}{x}+2$，

所以，曲线$f(x)$在$(x_n,f(x_n))$处的切线斜率为$k_n=\frac{1}{x_n}+2$，

所以，曲线$f(x)$在$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，即$y=\frac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，

令$y=0$得$x=\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$，

所以，切线与x轴的交点$(\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n},0)$，即$x_{n+1}=\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$，

所以，$g(x_n)=\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$；

证明：(ii)对任意的$x_n\in(0,+\infty)$，由(i)知，曲线$f(x)$在$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为：$y=\frac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，

故令$h(x)=y=\frac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，

令$F(x)=f(x)-h(x)=\ln x-\frac{1}{x_n}x-\ln x_n+1$，

所以，$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_n}=\frac{x_n-x}{x_n x}$，

所以，当 $x\in(0,x_n)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_n,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

所以，恒有 $F(x)\le F(x_n)=0$，即 $f(x)\le h(x)$ 恒成立，当且仅当 $x=x_n$ 时等号成立，

另一方面，由(i)知，$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，且当 $x_n\ne a$ 时，$x_{n+1}\ne x_n$，

(若 $x_n=a$，则 $f(x_n)=f(a)=0$，故任意 $x_{n+1}=x_n=\cdots=x_1=a$，显然矛盾)，

因为 x_{n+1} 是 $h(x)$ 的零点，

所以 $f(x_{n+1})<h(x_{n+1})=f(a)=0$，

因为 $f(x)$ 为单调递增函数，

所以，对任意的 $x_n\ne a$ 时，总有 $x_{n+1}<a$，

又因为 $x_1<a$，

所以，对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$，均有 $x_n<a$，

所以，$f'(x_n)>0$，$f(x_n)<f(a)=0$，

所以 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}>x_n$，

综上，当 $x_1\in(1,a)$，总有 $x_n<x_{n+1}<a$．

题型二：高考真题下的数列新定义

【典例 2-1】（2024 年高考新课卷 1） 设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\left(i<j\right)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列.

(1)写出所有的 $\left(i,j\right)$，$1\le i<j\le 6$，使数列 $a_1,a_2,...,a_6$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列；

(2)当 $m\ge 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(2,13\right)-$ 可分数列；

(3)从 $1,2,...,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，记数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\frac{1}{8}$.

【答案】(1) $\left(1,2\right),\left(1,6\right),\left(5,6\right)$

(2)证明见解析　　(3)证明见解析

【解析】

【分析】(1) 直接根据 $\left(i,j\right)-$ 可分数列的定义即可；

(2) 根据 $\left(i,j\right)-$ 可分数列的定义即可验证结论；

(3) 证明使得原数列是 $(i,j)-$ 可分数列的 (i,j) 至少有 $(m+1)^2-m$ 个，再使用概率的定义.

【小问 1 详解】

首先，我们设数列 $a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$ 的公差为 d，则 $d\neq 0$.

由于一个数列同时加上一个数或者乘以一个非零数后是等差数列，当且仅当该数列是等差数列，

故我们可以对该数列进行适当的变形 $a_k'=\dfrac{a_k-a_1}{d}+1\left(k=1,2,\ldots,4m+2\right)$，

得到新数列 $a_k'=k\left(k=1,2,\ldots,4m+2\right)$，然后对 $a_1',a_2',\ldots,a_{4m+2}'$ 进行相应的讨论即可.

换言之，我们可以不妨设 $a_k=k\left(k=1,2,\ldots,4m+2\right)$，此后的讨论均建立在该假设下进行.

回到原题，第 1 小问相当于从 $1,2,3,4,5,6$ 中取出两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，使得剩下四个数是等差数列.

那么剩下四个数只可能是 $1,2,3,4$，或 $2,3,4,5$，或 $3,4,5,6$.

所以所有可能的 (i,j) 就是 $(1,2),(1,6),(5,6)$.

【小问 2 详解】

由于从数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 中取出 2 和 13 后，剩余的 $4m$ 个数可以分为以下两个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\{1,4,7,10\},\{3,6,9,12\},\{5,8,11,14\}$，共 3 组；

②$\{15,16,17,18\},\{19,20,21,22\},\ldots,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共 $m-3$ 组.

(如果 $m-3=0$，则忽略②)

故数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 是 $(2,13)-$ 可分数列.

【小问 3 详解】

定义集合 $A=\left\{4k+1\,\middle|\,k=0,1,2,\ldots,m\right\}=\{1,5,9,13,\ldots,4m+1\}$，

$B=\left\{4k+2\,\middle|\,k=0,1,2,\ldots,m\right\}=\{2,6,10,14,\ldots,4m+2\}$.

下面证明，对 $1\le i<j\le 4m+2$，如果下面两个命题同时成立，

则数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 一定是 $(i,j)-$ 可分数列：

命题 1：$i\in A,j\in B$ 或 $i\in B,j\in A$；

命题 2：$j-i\neq 3$.

我们分两种情况证明这个结论.

第一种情况：如果 $i\in A,j\in B$，且 $j-i\neq 3$.

此时设 $i=4k_1+1$，$j=4k_2+2$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,\ldots,m\}$.

则由 $i<j$ 可知 $4k_1+1<4k_2+2$，即 $k_2-k_1>-\frac{1}{4}$，故 $k_2\geq k_1$.

此时，由于从数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 中取出 $i=4k_1+1$ 和 $j=4k_2+2$ 后，

剩余的 $4m$ 个数可以分为以下三个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\ldots,\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\}$，共 k_1 组；

②$\{4k_1+2,4k_1+3,4k_1+4,4k_1+5\},\{4k_1+6,4k_1+7,4k_1+8,4k_1+9\},\ldots,\{4k_2-2,4k_2-1,4k_2,4k_2+1\}$，共 k_2-k_1 组；

③$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},\ldots,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共 $m-k_2$ 组.

(如果某一部分的组数为 0，则忽略之)

故此时数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 是 $(i,j)-$ 可分数列.

第二种情况：如果 $i\in B, j\in A$，且 $j-i\neq 3$.

此时设 $i=4k_1+2$，$j=4k_2+1$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,\ldots,m\}$.

则由 $i<j$ 可知 $4k_1+2<4k_2+1$，即 $k_2-k_1>\frac{1}{4}$，故 $k_2>k_1$.

由于 $j-i\neq 3$，故 $(4k_2+1)-(4k_1+2)\neq 3$，从而 $k_2-k_1\neq 1$，这就意味着 $k_2-k_1\geq 2$.

此时，由于从数列 $1,2,\ldots,4m+2$ 中取出 $i=4k_1+2$ 和 $j=4k_2+1$ 后，剩余的 $4m$ 个数可以分为以下四个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\ldots,\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\}$，共 k_1 组；

②$\{4k_1+1,3k_1+k_2+1,2k_1+2k_2+1,k_1+3k_2+1\}$，$\{3k_1+k_2+2,2k_1+2k_2+2,k_1+3k_2+2,4k_2+2\}$，共 2 组；

③全体 $\{4k_1+p,3k_1+k_2+p,2k_1+2k_2+p,k_1+3k_2+p\}$，其中 $p=3,4,\ldots,k_2-k_1$，共 k_2-k_1-2 组；

④$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},\ldots,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共 $m-k_2$ 组.

(如果某一部分的组数为 0，则忽略之)

这里对②和③进行一下解释：将③中的每一组作为一个横排，排成一个包含 k_2-k_1-2 个行，4 个列的数表以后，4 个列分别是下面这些数：

$\{4k_1+3,4k_1+4,\ldots,3k_1+k_2\}$，$\{3k_1+k_2+3,3k_1+k_2+4,\ldots,2k_1+2k_2\}$，

$\{2k_1+2k_2+3,2k_1+2k_2+3,\ldots,k_1+3k_2\}$，$\{k_1+3k_2+3,k_1+3k_2+4,\ldots,4k_2\}$.

可以看出每列都是连续的若干个整数，它们再取并以后，将取遍$\{4k_1+1,4k_1+2,\ldots,4k_2+2\}$中除开五个集合$\{4k_1+1,4k_1+2\}$，$\{3k_1+k_2+1,3k_1+k_2+2\}$，$\{2k_1+2k_2+1,2k_1+2k_2+2\}$，$\{k_1+3k_2+1,k_1+3k_2+2\}$，$\{4k_2+1,4k_2+2\}$中的十个元素以外的所有数.

而这十个数中，除开已经去掉的$4k_1+2$和$4k_2+1$以外，剩余的八个数恰好就是②中出现的八个数.

这就说明我们给出的分组方式满足要求，故此时数列$1,2,\ldots,4m+2$是$(i,j)-$可分数列.

至此，我们证明了：对$1\le i<j\le 4m+2$，如果前述命题1和命题2同时成立，则数列$1,2,\ldots,4m+2$一定是$(i,j)-$可分数列.

然后我们来考虑这样的(i,j)的个数.

首先，由于$A\cap B=\varnothing$，A和B各有$m+1$个元素，故满足命题1的(i,j)总共有$(m+1)^2$个；

而如果$j-i=3$，假设$i\in A,j\in B$，则可设$i=4k_1+1$，$j=4k_2+2$，代入得$(4k_2+2)-(4k_1+1)=3$.

但这导致$k_2-k_1=\frac{1}{2}$，矛盾，所以$i\in B,j\in A$.

设$i=4k_1+2$，$j=4k_2+1$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,\ldots,m\}$，则$(4k_2+1)-(4k_1+2)=3$，即$k_2-k_1=1$.

所以可能的(k_1,k_2)恰好就是$(0,1),(1,2),\ldots,(m-1,m)$，对应的$(i,j)$分别是$(2,5),(6,9),\ldots,(4m-2,4m+1)$，总共$m$个.

所以这$(m+1)^2$个满足命题1的(i,j)中，不满足命题2的恰好有m个.

这就得到同时满足命题1和命题2的(i,j)的个数为$(m+1)^2-m$.

当我们从$1,2,\ldots,4m+2$中一次任取两个数i和$j\,(i<j)$时，总的选取方式的个数等于$\frac{(4m+2)(4m+1)}{2}=(2m+1)(4m+1)$.

而根据之前的结论，使得数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的(i,j)至少有$(m+1)^2-m$个.

所以数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的概率P_m一定满足

$$P_m\ge\frac{(m+1)^2-m}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}>\frac{m^2+m+\frac{1}{4}}{(2m+1)(4m+2)}=\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{2(2m+1)(2m+1)}=\frac{1}{8}.$$

这就证明了结论.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于对新定义数列的理解，只有理解了定义，方可使用定义验证或探究结论.

【典例 2-2】（2024年高考新课卷 2）已知双曲线 $C:x^2-y^2=m(m>0)$，点 $P_1(5,4)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,...)$，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n)．

(1)若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2,y_2；

(2)证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

(3)设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$．

【答案】(1) $x_2=3$，$y_2=0$

(2)证明见解析　　(3)证明见解析

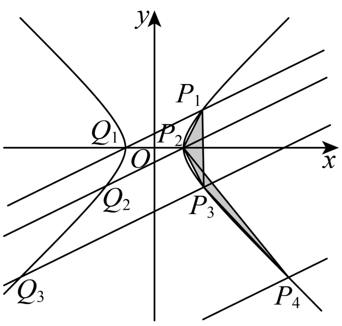
【解析】

【分析】(1) 直接根据题目中的构造方式计算出 P_2 的坐标即可；

(2) 根据等比数列的定义即可验证结论；

(3) 思路一：使用平面向量数量积和等比数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.思路二：使用等差数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.

【小问 1 详解】



由已知有 $m=5^2-4^2=9$，故 C 的方程为 $x^2-y^2=9$.

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，过 $P_1(5,4)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线为 $y=\dfrac{x+3}{2}$，与 $x^2-y^2=9$ 联立得到 $x^2-\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2=9$.

解得 $x=-3$ 或 $x=5$，所以该直线与 C 的不同于 P_1 的交点为 $Q_1(-3,0)$，该点显然在 C 的左支上.

故 $P_2(3,0)$，从而 $x_2=3$，$y_2=0$.

【小问 2 详解】

由于过 $P_n(x_n,y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $y=k(x-x_n)+y_n$，与 $x^2-y^2=9$ 联立，得到方程

$x^2-\left(k(x-x_n)+y_n\right)^2=9$.

展开即得 $\left(1-k^2\right)x^2-2k\left(y_n-kx_n\right)x-\left(y_n-kx_n\right)^2-9=0$，由于 $P_n\left(x_n,y_n\right)$ 已经是直线 $y=k\left(x-x_n\right)+y_n$ 和 $x^2-y^2=9$ 的公共点，故方程必有一根 $x=x_n$.

从而根据韦达定理，另一根 $x=\dfrac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}-x_n=\dfrac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2}$，相应的

$y=k\left(x-x_n\right)+y_n=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以该直线与 C 的不同于 P_n 的交点为 $Q_n\left(\dfrac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2},\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$，而注意到 Q_n 的横坐标亦可通过韦达定理表示为 $\dfrac{-\left(y_n-kx_n\right)^2-9}{\left(1-k^2\right)x_n}$，故 Q_n 一定在 C 的左支上.

所以 $P_{n+1}\left(\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2},\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$.

这就得到 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}-\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$

$$=\frac{x_n+k^2x_n+2kx_n}{1-k^2}-\frac{y_n+k^2y_n+2ky_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2+2k}{1-k^2}\left(x_n-y_n\right)=\frac{1+k}{1-k}\left(x_n-y_n\right).$$

再由 $x_1^2-y_1^2=9$，就知道 $x_1-y_1\neq 0$，所以数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

【小问 3 详解】

方法一：先证明一个结论：对平面上三个点 U,V,W，若 $\overrightarrow{UV}=\left(a,b\right)$， $\overrightarrow{UW}=\left(c,d\right)$，则

$S_{\triangle UVW}=\dfrac{1}{2}\left|ad-bc\right|$.(若 U,V,W 在同一条直线上，约定 $S_{\triangle UVW}=0$)

证明： $S_{\triangle UVW}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sin\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\cos^2\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}}$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}}{\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{UV}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|^2-\left(\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-\left(ac+bd\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-2abcd}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-2abcd}=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}=\frac{1}{2}|ad-bc|.$$

证毕，回到原题.

由于上一小问已经得到 $x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故 $x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2-2k}{1-k^2}(x_n+y_n)=\frac{1-k}{1+k}(x_n+y_n)$.

再由 $x_1^2-y_1^2=9$，就知道 $x_1+y_1\neq 0$，所以数列 $\{x_n+y_n\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列.

所以对任意的正整数 m，都有

$$x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}$$

$$=\frac{1}{2}\left((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})+(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\right)-\frac{1}{2}\left((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})-(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x_n-y_n)(x_{n+m}+y_{n+m})-\frac{1}{2}(x_n+y_n)(x_{n+m}-y_{n+m})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m(x_n-y_n)(x_n+y_n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m(x_n+y_n)(x_n-y_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)(x_n^2-y_n^2)$$

$$=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).$$

而又有 $\overrightarrow{P_{n+1}P_n}=(-(x_{n+1}-x_n),-(y_{n+1}-y_n))$， $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1})$，

故利用前面已经证明的结论即得

$$S_n=S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}\left|-(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})+(y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})-(y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_{n+1}y_{n+2}-y_{n+1}x_{n+2})+(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1})-(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)-\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\right)\right|.$$

这就表明 S_n 的取值是与 n 无关的定值，所以 $S_n=S_{n+1}$.

方法二：由于上一小问已经得到 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故 $x_{n+1}+y_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\dfrac{1+k^2-2k}{1-k^2}(x_n+y_n)=\dfrac{1-k}{1+k}(x_n+y_n)$.

再由 $x_1^2-y_1^2=9$，就知道 $x_1+y_1\neq 0$，所以数列 $\{x_n+y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1-k}{1+k}$ 的等比数列.

所以对任意的正整数 m，都有

$$
\begin{aligned}
&x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\\
&=\frac{1}{2}\big((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})+(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\big)-\frac{1}{2}\big((x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m})-(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m})\big)\\
&=\frac{1}{2}(x_n-y_n)(x_{n+m}+y_{n+m})-\frac{1}{2}(x_n+y_n)(x_{n+m}-y_{n+m})\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m(x_n-y_n)(x_n+y_n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m(x_n+y_n)(x_n-y_n)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)(x_n^2-y_n^2)\\
&=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).
\end{aligned}
$$

这就得到 $x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1-k}{1+k}-\dfrac{1+k}{1-k}\right)=x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}$，

以及 $x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3}=\dfrac{9}{2}\left(\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^2\right)=x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}$.

两式相减，即得 $(x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3})-(x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3})=(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1})-(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2})$.

移项得到 $x_{n+2}y_{n+3}-y_nx_{n+2}-x_{n+1}y_{n+3}+y_nx_{n+1}=y_{n+2}x_{n+3}-x_ny_{n+2}-y_{n+1}x_{n+3}+x_ny_{n+1}$.

故 $(y_{n+3}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})=(y_{n+2}-y_{n+1})(x_{n+3}-x_n)$.

而 $\overrightarrow{P_nP_{n+3}}=(x_{n+3}-x_n,y_{n+3}-y_n)$，$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1})$.

所以 $\overrightarrow{P_nP_{n+3}}$ 和 $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ 平行，这就得到 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，即 $S_n=S_{n+1}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将解析几何和数列知识的结合，需要综合运用多方面知识方可得解.

【典例 2-3】(2023·北京·高考真题)已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的项数均为 $m\,(m>2)$，且 $a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n，并规定 $A_0=B_0=0$．对于 $k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，

定义 $r_k=\max\{i\mid B_i\le A_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

(1)若 $a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$，求 r_0,r_1,r_2,r_3 的值；

(2)若 $a_1\ge b_1$，且 $2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1,$，求 r_n；

(3)证明：存在 $p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

【解析】(1)由题意可知：$A_0=0,A_1=2,A_2=3,A_3=6,B_0=0,B_1=1,B_2=4,B_3=7$，

当 $k=0$ 时，则 $B_0=A_0=0,B_i>A_0,i=1,2,3$，故 $r_0=0$；

当 $k=1$ 时，则 $B_0<A_1,B_1<A_1,B_i>A_1,i=2,3$，故 $r_1=1$；

当 $k=2$ 时，则 $B_i\le A_2,i=0,1,B_2>A_2,B_3>A_2$，故 $r_2=1$；

当 $k=3$ 时，则 $B_i\le A_3,i=0,1,2,B_3>A_3$，故 $r_3=2$；

综上所述：$r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$.

(2)由题意可知：$r_n\le m$，且 $r_n\in\mathbf{N}$，

因为 $a_n\ge1,b_n\ge1$，且 $a_1\ge b_1$，则 $A_n\ge B_1>B_0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

所以 $r_0=0,r_1\ge1$，

又因为 $2r_i\le r_{i-1}+r_{i+1}$，则 $r_{i+1}-r_i\ge r_i-r_{i-1}$，即 $r_m-r_{m-1}\ge r_{m-1}-r_{m-2}\ge\cdots\ge r_1-r_0\ge1$，

可得 $r_{i+1}-r_i\ge1$，

反证：假设满足 $r_{n+1}-r_n>1$ 的最小正整数为 $0\le j\le m-1$，

当 $i\ge j$ 时，则 $r_{i+1}-r_i\ge2$；当 $i\le j-1$ 时，则 $r_{i+1}-r_i=1$，

则 $r_m=(r_m-r_{m-1})+(r_{m-1}-r_{m-2})+\cdots+(r_1-r_0)+r_0\ge2(m-j)+j=2m-j$，

又因为 $0\le j\le m-1$，则 $r_m\ge2m-j\ge2m-(m-1)=m+1>m$，

假设不成立，故 $r_{n+1}-r_n=1$，

即数列 $\{r_n\}$ 是以首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $r_n=0+1\times n=n,n\in\mathbf{N}$.

(3)因为 a_n,b_n 均为正整数，则 $\{A_n\},\{B_n\}$ 均为递增数列，

(ⅰ)若 $A_m=B_m$，则可取 $t=q=0$，满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$；

(ⅱ)若 $A_m<B_m$，则 $r_k<m$，

构建 $S_n=B_{r_n}-A_n,1\le n\le m$，由题意可得：$S_n\le0$，且 S_n 为整数，

反证，假设存在正整数 K，使得 $S_K\le -m$，

则 $B_{r_K}-A_K\le -m,B_{r_K+1}-A_K>0$，可得 $b_{r_K+1}=B_{r_K+1}-B_{r_K}=\left(B_{r_K+1}-A_K\right)-\left(B_{r_K}-A_K\right)>m$，

这与 $b_{r_K+1}\in\{1,2,\cdots,m\}$ 相矛盾，故对任意 $1\le n\le m,n\in\mathbf{N}$，均有 $S_n\ge1-m$.

①若存在正整数 N，使得 $S_N=B_{r_N}-A_N=0$，即 $A_N=B_{r_N}$，

可取 $t=q=0,p=N,s=r_N$，

满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$；

②若不存在正整数 N，使得 $S_N=0$，

因为 $S_n\in\{-1,-2,\cdots,-(m-1)\}$，且 $1\le n\le m$，

所以必存在 $1\le X<Y\le m$，使得 $S_X=S_Y$，

即 $B_{r_X}-A_X=B_{r_Y}-A_Y$，可得 $A_Y+B_{r_X}=A_X+B_{r_Y}$，

可取 $p=Y,s=r_Y,q=X,t=r_X$，

满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$；

(iii)若 $A_m>B_m$，

定义 $R_k=\max\{i\mid A_i\le B_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$，则 $R_k<m$，

构建 $S_n=A_{R_n}-B_n,1\le n\le m$，由题意可得：$S_n\le 0$，且 S_n 为整数，

反证，假设存在正整数 $K,1\le K\le m$，使得 $S_K\le -m$，

则 $A_{R_K}-B_K\le -m,A_{R_K+1}-B_K>0$，可得 $a_{R_K+1}=A_{R_K+1}-A_{R_K}=\left(A_{R_K+1}-B_K\right)-\left(A_{R_K}-B_K\right)>m$，

这与 $a_{R_K+1}\in\{1,2,\cdots,m\}$ 相矛盾，故对任意 $1\le n\le m-1,n\in\mathbf{N}$，均有 $S_n\ge 1-m$.

①若存在正整数 N，使得 $S_N=A_{R_N}-B_N=0$，即 $A_{R_N}=B_N$，

可取 $q=t=0,s=N,p=R_N$，

即满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$；

②若不存在正整数 N，使得 $S_N=0$，

因为 $S_n\in\{-1,-2,\cdots,-(m-1)\}$，且 $1\le n\le m$，

所以必存在 $1\le X<Y\le m$，使得 $S_X=S_Y$，

即 $A_{R_X}-B_X=A_{R_Y}-B_Y$，可得 $A_{R_Y}+B_X=A_{R_X}+B_Y$，

可取 $p=R_Y,t=X,q=R_X,s=Y$，

满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

综上所述：存在 $0\le q<p\le m,0\le t<s\le m$ 使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

【典例 2-4】(2022·北京·高考真题)已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 $a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}(j\ge 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$连续可表数列．

(1)判断 $Q:2,1,4$ 是否为 $5-$连续可表数列？是否为 $6-$连续可表数列？说明理由；

(2)若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $8-$连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

(3)若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $20-$连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\ge 7$.

【解析】(1) $a_2=1$，$a_1=2$，$a_1+a_2=3$，$a_3=4$，$a_2+a_3=5$，所以 Q 是 $5-$连续可表数列；易知，不存在 i,j

使得 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}=6$，所以 Q 不是 $6-$连续可表数列.

(2)若 $k\le 3$,设为 $Q:a,b,c$,则至多 $a+b,b+c,a+b+c,a,b,c$，6 个数字，没有 8 个，矛盾；

当 $k=4$ 时,数列 $Q:1,4,1,2$,满足 $a_1=1$，$a_4=2$，$a_3+a_4=3$，$a_2=4$，$a_1+a_2=5$，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_2+a_3+a_4=7$，

$a_1+a_2+a_3+a_4=8$， $\therefore k_{\min}=4$.

(3) $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$，若 $i=j$ 最多有 k 种，若 $i\ne j$，最多有 C_k^2 种，所以最多有 $k+C_k^2=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 种，

若 $k\le 5$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至多可表 $\dfrac{5(5+1)}{2}=15$ 个数，矛盾,

从而若 $k<7$,则 $k=6$， a,b,c,d,e,f 至多可表 $\dfrac{6(6+1)}{2}=21$ 个数，

而 $a+b+c+d+e+f<20$，所以其中有负的，从而 a,b,c,d,e,f 可表 1~20 及那个负数(恰 21 个)，这表明 $a\sim f$ 中仅一个负的，没有 0，且这个负的在 $a\sim f$ 中绝对值最小，同时 $a\sim f$ 中没有两数相同,设那个负数为 $-m(m\ge 1)$ ，

则所有数之和 $\ge m+1+m+2+\cdots+m+5-m=4m+15$， $4m+15\le 19\Rightarrow m=1$，

$\therefore\{a,b,c,d,e,f\}=\{-1,2,3,4,5,6\}$，再考虑排序，排序中不能有和相同，否则不足 20 个，

$\because 1=-1+2$ (仅一种方式)，

$\therefore -1$ 与 2 相邻，

若 -1 不在两端,则"$\underline{x},-1,2,\_\_,\_\_,\_\_$"形式，

若 $x=6$，则 $5=6+(-1)$ (有 2 种结果相同，方式矛盾)，

$\therefore x\ne 6$， 同理 $x\ne 5,4,3$ ，故 -1 在一端，不妨为"$\underline{-1},2,\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$"形式，

若 $A=3$,则 $5=2+3$ (有 2 种结果相同，矛盾)， $A=4$ 同理不行，

$A=5$，则 $6=-1+2+5$ (有 2 种结果相同，矛盾)，从而 $A=6$，

由于 $7=-1+2+6$,由表法唯一知 3,4 不相邻,、

故只能 $-1,2,6,3,5,4$，①或 $-1,2,6,4,5,3$，②

这 2 种情形，

对①：$9=6+3=5+4$，矛盾，

对②：$8=2+6=5+3$，也矛盾，综上 $k\ne 6$，

当 $k=7$ 时，数列 $1,2,4,5,8,-2,-1$ 满足题意，

$\therefore k\ge 7$.

【变式 2-1】(2021·北京·高考真题)设 p 为实数.若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下三个性质，则称 $\{a_n\}$ 为 $\Re_p$ 数列：

① $a_1+p\ge 0$，且 $a_2+p=0$；

② $a_{4n-1}<a_{4n},(n=1,2,\cdots)$；

③ $a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\}$，$(m,n=1,2,\cdots)$.

(1)如果数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 2，-2，-2，-1，那么 $\{a_n\}$ 是否可能为 $\Re_2$ 数列？说明理由；

(2)若数列$\{a_n\}$是$\Re_0$数列，求a_5；

(3)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.是否存在$\Re_p$数列$\{a_n\}$，使得$S_n \ge S_{10}$恒成立？如果存在，求出所有的p；如果不存在，说明理由.

【解析】(1)因 为 $p=2, a_1=2, a_2=-2$, 所以$a_1+a_2+p=2, a_1+a_2+p+1=3$，

因 为$a_3=-2$,所 以$a_3 \notin \{a_1+a_2+2, a_1+a_2+2+1\}$

所以数列$\{a_n\}$，不可能是$\Re_2$数列.

(2)性质①$a_1 \ge 0, a_2=0$，

由性质③$a_{m+2} \in \{a_m, a_m+1\}$，因此$a_3=a_1$或$a_3=a_1+1$，$a_4=0$或$a_4=1$，

若$a_4=0$，由性质②可知$a_3<a_4$，即$a_1<0$或$a_1+1<0$，矛盾；

若$a_4=1, a_3=a_1+1$，由$a_3<a_4$有$a_1+1<1$，矛盾.

因此只能是$a_4=1, a_3=a_1$.

又因为$a_4=a_1+a_3$或$a_4=a_1+a_3+1$，所以$a_1=\dfrac{1}{2}$或$a_1=0$.

若$a_1=\dfrac{1}{2}$，则$a_2=a_{1+1} \in \{a_1+a_1+0, a_1+a_1+0+1\}=\{2a_1, 2a_1+1\}=\{1,2\}$，

不满足$a_2=0$，舍去.

当$a_1=0$，则$\{a_n\}$前四项为:0，0，0，1，

下面用数学归纳法证明$a_{4n+i}=n(i=1,2,3), a_{4n+4}=n+1(n \in N)$：

当$n=0$时，经验证命题成立，假设当$n \le k(k \ge 0)$时命题成立，

当$n=k+1$时：

若$i=1$，则$a_{4(k+1)+1}=a_{4k+5}=a_{j+(4k+5-j)}$，利用性质③：

$\left\{a_j+a_{4k+5-j} \mid j \in N^*, 1 \le j \le 4k+4\right\}=\{k, k+1\}$，此时可得：$a_{4k+5}=k+1$；

否则，若$a_{4k+5}=k$，取$k=0$可得：$a_5=0$，

而由性质②可得：$a_5=a_1+a_4 \in \{1,2\}$，与$a_5=0$矛盾.

同理可得：

$\left\{a_j+a_{4k+6-j} \mid j \in N^*, 1 \le j \le 4k+5\right\}=\{k, k+1\}$，有$a_{4k+6}=k+1$；

$\left\{a_j+a_{4k+8-j} \mid j \in N^*, 2 \le j \le 4k+6\right\}=\{k+1, k+2\}$，有$a_{4k+8}=k+2$；

$\left\{a_j+a_{4k+7-j} \mid j \in N^*, 1 \le j \le 4k+6\right\}=\{k+1\}$，又因为$a_{4k+7}<a_{4k+8}$，有$a_{4k+7}=k+1$.

即当$n=k+1$时命题成立，证毕.

综上可得：$a_1=0$，$a_5=a_{4\times1+1}=1$.

(3)令$b_n=a_n+p$，由性质③可知：

$\forall m,n\in N^*, b_{m+n}=a_{m+n}+p\in\{a_m+p+a_n+p, a_m+p+a_n+p+1\}=\{b_m+b_n, b_m+b_n+1\}$，

由于 $b_1=a_1+p\geq 0, b_2=a_2+p=0, b_{4n-1}=a_{4n-1}+p<a_{4n}+p=b_{4n}$，

因此数列 $\{b_n\}$ 为 $\Re_0$ 数列.

由(2)可知:

若 $\forall n\in N, a_{4n+i}=n-p(i=1,2,3), a_{4n+4}=n+1-p$；

$S_{11}-S_{10}=a_{11}=a_{4\times2+3}=2-p\geq 0$， $S_9-S_{10}=-a_{10}=-a_{4\times2+2}=-(2-p)\geq 0$，

因此 $p=2$， 此时 $a_1,a_2,\ldots,a_{10}\leq 0$， $a_j\geq 0(j\geq 11)$， 满足题意.

【变式 2-2】(2020·北京·高考真题)已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列．给出两个性质：

①对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 $a_i,a_j(i>j)$，在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m，使 $\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$；

②对于 $\{a_n\}$ 中任意项 $a_n(n\geq3)$，在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 $a_k,a_l(k>l)$．使得 $a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$．

(Ⅰ)若 $a_n=n(n=1,2,\cdots)$，判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①，说明理由；

(Ⅱ)若 $a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②，说明理由；

(III)若 $\{a_n\}$ 是递增数列，且同时满足性质①和性质②，证明：$\{a_n\}$ 为等比数列.

【解析】(Ⅰ) Q $a_2=2, a_3=3, \dfrac{a_3^{\ 2}}{a_2}=\dfrac{9}{2}\notin Z\ \therefore\ \{a_n\}$ 不具有性质①；

(Ⅱ) Q $\forall i,j\in N^*, i>j, \dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=2^{(2i-j)-1}, 2i-j\in N^*\ \therefore\ \dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=a_{2i-j}\ \therefore\{a_n\}$ 具有性质①；

Q $\forall n\in N^*, n\geq 3, \exists k=n-1, l=n-2, \dfrac{a_k^{\ 2}}{a_l}=2^{(2k-l)-1}=2^{n-1}=a_n\ \therefore\{a_n\}$ 具有性质②；

(III)解法一

首先，证明数列中的项数同号，不妨设恒为正数：

显然 $a_n\neq 0(n\notin N^*)$，假设数列中存在负项，设 $N_0=\max\{n|a_n<0\}$，

第一种情况：若 $N_0=1$，即 $a_0<0<a_1<a_2<a_3<\cdots$，

由①可知：存在 m_1，满足 $a_{m_1}=\dfrac{a_2^2}{a_1}<0$，存在 m_2，满足 $a_{m_2}=\dfrac{a_3^2}{a_1}<0$，

由 $N_0=1$ 可知 $\dfrac{a_2^2}{a_1}=\dfrac{a_3^2}{a_1}$，从而 $a_2=a_3$，与数列的单调性矛盾，假设不成立.

第二种情况：若 $N_0\geq 2$，由①知存在实数 m，满足 $a_m=\dfrac{a_{N_0}^2}{a_1}<0$，由 N_0 的定义可知：$m\leq N_0$，

另一方面，$a_m=\dfrac{a_{N_0}^2}{a_1}>\dfrac{a_{N_0}^2}{a_{N_0}}=a_{N_0}$，由数列的单调性可知：$m>N_0$，

这与 N_0 的定义矛盾，假设不成立.

同理可证得数列中的项数恒为负数.

综上可得，数列中的项数同号.

其次，证明 $a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$：

利用性质②：取 $n=3$，此时 $a_3=\dfrac{a_k^2}{a_l}(k>l)$，

由数列的单调性可知 $a_k>a_l>0$，

而 $a_3=a_k\cdot\dfrac{a_k}{a_l}>a_k$，故 $k<3$，

此时必有 $k=2,l=1$，即 $a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$，

最后，用数学归纳法证明数列为等比数列：

假设数列 $\{a_n\}$ 的前 $k(k\ge3)$ 项成等比数列，不妨设 $a_s=a_1q^{s-1}(1\le s\le k)$，

其中 $a_1>0,q>1$，($a_1<0,0<q<1$ 的情况类似)

由①可得：存在整数 m，满足 $a_m=\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}=a_1q^k>a_k$，且 $a_m=a_1q^k\ge a_{k+1}$ (*)

由②得：存在 $s>t$，满足：$a_{k+1}=\dfrac{a_s^2}{a_t}=a_s\cdot\dfrac{a_s}{a_t}>a_s$，由数列的单调性可知：$t<s\le k+1$，

由 $a_s=a_1q^{s-1}(1\le s\le k)$ 可得：$a_{k+1}=\dfrac{a_s^2}{a_t}=a_1q^{2s-t-1}>a_k=a_1q^{k-1}$ (**)

由(**)和(*)式可得：$a_1q^k\ge a_1q^{2s-t-1}>a_1q^{k-1}$，

结合数列的单调性有：$k\ge2s-t-1>k-1$，

注意到 s,t,k 均为整数，故 $k=2s-t-1$，

代入(**)式，从而 $a_{k+1}=a_1q^k$.

总上可得，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=a_1q^{n-1}$.

即数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

解法二：

假设数列中的项数均为正数：

首先利用性质②：取 $n=3$，此时 $a_3=\dfrac{a_k^2}{a_l}(k>l)$，

由数列的单调性可知 $a_k>a_l>0$，

而 $a_3=a_k\cdot\dfrac{a_k}{a_l}>a_k$，故 $k<3$，

此时必有 $k=2,l=1$，即 $a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$，

即 a_1,a_2,a_3 成等比数列，不妨设 $a_2=a_1q,a_3=a_1q^2(q>1)$，

然后利用性质①：取 $i=3,j=2$，则 $a_m=\dfrac{a_3^2}{a_2}=\dfrac{a_1^2q^4}{a_1q}=a_1q^3$，

即数列中必然存在一项的值为 a_1q^3，下面我们来证明 $a_4=a_1q^3$，

否则，由数列的单调性可知 $a_4<a_1q^3$，

在性质②中，取 $n=4$，则 $a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_k\dfrac{a_k}{a_l}>a_k$，从而 $k<4$，

与前面类似的可知则存在 $\{k,l\}\subseteq\{1,2,3\}(k>l)$，满足 $a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}$，

若 $k=3,l=2$，则：$a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_1q^3$，与假设矛盾；

若 $k=3,l=1$，则：$a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_1q^4>a_1q^3$，与假设矛盾；

若 $k=2,l=1$，则：$a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_1q^2=a_3$，与数列的单调性矛盾；

即不存在满足题意的正整数 k,l，可见 $a_4<a_1q^3$ 不成立，从而 $a_4=a_1q^3$，

然后利用性质①：取 $i=4,j=3$，则数列中存在一项 $a_m=\dfrac{a_4^2}{a_3}=\dfrac{a_1^2q^6}{a_1q^2}=a_1q^4$，

下面我们用反证法来证明 $a_5=a_1q^4$，

否则，由数列的单调性可知 $a_1q^3<a_5<a_1q^4$，

在性质②中，取 $n=5$，则 $a_5=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_k\dfrac{a_k}{a_l}>a_k$，从而 $k<5$，

与前面类似的可知则存在 $\{k,l\}\subseteq\{1,2,3,4\}(k>l)$，满足 $a_5=\dfrac{a_k^2}{a_l}$，

即由②可知：$a_5=\dfrac{a_k^2}{a_l}=\dfrac{a_1^2q^{2k-2}}{a_1q^{l-1}}=a_1q^{2k-l-1}$，

若 $2k-l-1=4$，则 $a_5=a_1q^4$，与假设矛盾；

若 $2k-l-1>4$，则 $a_5>a_1q^4$，与假设矛盾；

若 $2k-l-1<4$，由于 k,l 为正整数，故 $2k-l-1\le 3$，则 $a_5\le a_1q^3$，与 $a_1q^3<a_5$ 矛盾；

综上可知，假设不成立，则 $a_5=a_1q^4$.

同理可得：$a_6=a_1q^5,a_7=a_1q^6,\cdots$，从而数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

同理，当数列中的项数均为负数时亦可证得数列为等比数列.

由推理过程易知数列中的项要么恒正要么恒负，不会同时出现正数和负数.

从而题中的结论得证，数列$\{a_n\}$为等比数列.

题型三：数列定义新概念

【典例 3-1】(2024·广西南宁·一模)若无穷数列$\{a_n\}$满足$a_1=0,|a_{n+1}-a_n|=f(n)$，则称数列$\{a_n\}$为β数列，若β数列$\{a_n\}$同时满足$a_n\le\frac{n-1}{2}$，则称数列$\{a_n\}$为γ数列.

(1)若数列$\{a_n\}$为β数列，$f(n)=1,n\in\mathbf{N}^*$，证明：当$n\le 2025$时，数列$\{a_n\}$为递增数列的充要条件是$a_{2025}=2024$；

(2)若数列$\{b_n\}$为γ数列，$f(n)=n$，记$c_n=b_{2n}$，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$c_n<c_{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式.

【解析】(1)先证必要性：

依题意得，$|a_{n+1}-a_n|=1$，又数列$\{a_n\}$是递增数列，故$a_{n+1}-a_n=1$，

故数列$\{a_n\}$是$a_1=0$，公差$d=1$的等差数列，

故$a_{2025}=0+(2025-1)\times 1=2024$.

再证充分性：

由$|a_{n+1}-a_n|=1$，得$a_{n+1}-a_n\le 1$，

故$a_{2025}=(a_{2025}-a_{2024})+(a_{2024}-a_{2023})+\cdots(a_2-a_1)+a_1\le 2024$，

当且仅当$a_{n+1}-a_n=1$时取等号.

又$a_{2025}=2024$，故$a_{n+1}-a_n=1$，故数列$\{a_n\}$是递增数列.

(2)因为$c_n=b_{2n}$，由$c_n<c_{n+1}$，知数列$\{c_n\}$是单调递增数列，

故数列$\{b_n\}$的偶数项构成单调递增数列，

依题意，可得$b_2=-1,b_4=0$，故当$b_{2n}\ge 0$时，有$n\ge 2$.

下面证明数列$\{b_n\}$中相邻两项不可能同时为非负数.

假设数列$\{b_n\}$中存在b_i,b_{i+1}同时为非负数，

因为$|b_{i+1}-b_i|=i$，

若$b_{i+1}-b_i=i$，则有$b_{i+1}=b_i+i\ge i>\frac{(i+1)-1}{2}$，与条件矛盾；

若$b_{i+1}-b_i=-i$，则有$b_i=b_{i+1}+i\ge i>\frac{i-1}{2}$，与条件矛盾；

即假设不存在，即对任意正整数n,b_n,b_{n+1}中至少有一个小于 0；

由$b_{2n}\ge 0$，对$n\ge 2$成立，

故$n\ge 2$时，$b_{2n-1}\le 0$，$b_{2n+1}\le 0$，即$b_{2n}>b_{2n-1},b_{2n}>b_{2n+1}$，

故$b_{2n}-b_{2n-1}=2n-1,b_{2n-1}-b_{2n-2}=-\left(2n-2\right)$，

故$\left(b_{2n}-b_{2n-1}\right)+\left(b_{2n-1}-b_{2n-2}\right)=1$，

即$b_{2n}-b_{2n-2}=1,n\geq 2$，即$c_n-c_{n-1}=1,n\geq 2$.

又$c_1=b_2=-1,c_2=b_4=0$，所以数列$\{c_n\}$是$c_1=-1$，公差为1的等差数列，

所以$c_n=-1+\left(n-1\right)=n-2$.

【典例3-2】(2024·山东泰安·一模)已知各项均不为0的递增数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2,a_2=4,a_na_{n+1}=2S_n\left(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n\right)$($n\in\mathbf{N}^*$，且$n\geq 2$).

(1)求数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$；

(2)定义首项为2且公比大于1的等比数列为"G-数列"．证明：

①对任意$k\leq 5$且$k\in\mathbf{N}^*$，存在"G-数列"$\{b_n\}$，使得$b_k\leq a_k\leq b_{k+1}$成立；

②当$k\geq 6$且$k\in\mathbf{N}^*$时，不存在"G-数列"$\{c_n\}$，使得$c_m\leq a_m\leq c_{m+1}$对任意正整数$m\leq k$成立.

【解析】(1)

$a_na_{n+1}=2S_n\left(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n\right)=2S_n\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(n\geq 2\right)$，

$\because\{a_n\}$各项均不为0且递增，

$\therefore a_{n+1}-a_n\neq 0$，

$\therefore 2S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$，

$\therefore 2S_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}a_n}{a_n-a_{n-1}}\left(n\geq 3\right)$，

$\therefore 2a_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}-\dfrac{a_{n-1}a_n}{a_n-a_{n-1}}$，

化简得$a_n\left(a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n\right)=0\left(n\geq 3\right)$，

$\therefore a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n\left(n\geq 3\right)$，

$\because a_1=2,a_2=4$，

$\therefore a_2a_3=2S_2\left(S_3+S_1-2S_2\right)$，

$\therefore a_3=6$，

$\therefore a_1+a_3=2a_2$，

$\therefore\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore a_n=2n,S_n=n^2+n$，

$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$\therefore T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$;

(2)①证明：设“G-数列”公比为q，且$q>1$，

由题意，只需证存在q对$k\le 5$且$k\in N^*,2q^{k-1}\le 2k\le 2q^k$成立，

即$(k-1)\ln q\le \ln k\le k\ln q$成立，

设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=\mathrm{e}$，

当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，

当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减，

$\because \frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$，

$\therefore f(k)=\frac{\ln k}{k}\le\frac{\ln 3}{3}$，

$\therefore$存在$q=\sqrt[3]{3}$，使得$\ln k\le k\ln q$对任意$k\le 5$且$k\in\mathbf{N}^*$成立，

经检验，对任意$k\le 5$且$k\in\mathbf{N}^*,(\sqrt[3]{3})^{k-1}\le k$均成立，

$\therefore$对任意$k\le 5$且$k\in\mathbf{N}^*$，存在“G-数列”$\{b_n\}$使得$b_k\le a_k\le b_{k+1}$成立；

②由①知，若$c_m\le a_m\le c_{m+1}$成立，则$q^{m-1}\le m\le q^m$成立，

当$k\ge 6$时，取$m=3$得$q^2\le 3\le q^3$，取$m=6$得$q^5\le 6\le q^6$，

由$\begin{cases}q^3\ge 3\\ q^5\le 6\end{cases}$，得$\begin{cases}q^{15}\ge 243\\ q^{15}\le 216\end{cases}$，

$\therefore q$不存在，

$\therefore$当$k\ge 6$且$k\in\mathbf{N}^*$时，不存在“G-数列”$\{c_n\}$使得$c_m\le a_m\le c_{m+1}$对任意正整数$m\le k$成立．

【变式3-1】(2024·江西南昌·一模)对于各项均不为零的数列$\{c_n\}$，我们定义：数列$\left\{\frac{c_{n+k}}{c_n}\right\}$为数列$\{c_n\}$的“$k-$比分数列”.已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，且$\{a_n\}$的“$1-$比分数列”与$\{b_n\}$的“2-比分数列”是同一个数列.

(1)若$\{b_n\}$是公比为2的等比数列，求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n；

(2)若$\{b_n\}$是公差为2的等差数列，求a_n.

【解析】(1)由题意知$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}$，

因为$b_1=1$，且$\{b_n\}$是公比为2的等比数列，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$，

因为$a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$首项为 1，公比为 4 的等比数列，

所以$S_n=\dfrac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{1}{3}\times(4^n-1)$；

(2)因为$b_1=1$，且$\{b_n\}$是公差为 2 的等差数列，所以$b_n=2n-1$，

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=\dfrac{2n+3}{2n-1}$，

所以$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n+1}{2n-3},\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{2n-1}{2n-5},\cdots\cdots,\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{5}{1}$，

所以$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{(2n+1)(2n-1)}{3\times1}$，因为$a_1=1$，

所以$a_n=\dfrac{1}{3}\times(4n^2-1)$.

题型四：数列定义新运算

【典例 4-1】(2024·江苏徐州·一模)对于每项均是正整数的数列P：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换T_1，T_1将数列P变换成数列$T_1(P)$：$n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$．对于每项均是非负整数的数列$Q:b_1,b_2,\cdots,b_m$，定义$S(Q)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$，定义变换$T_2$，$T_2$将数列$Q$各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列$T_2(Q)$.

(1)若数列P_0为 2，4，3，7，求$S(T_1(P_0))$的值；

(2)对于每项均是正整数的有穷数列P_0，令$P_{k+1}=T_2(T_1(P_k))$，$k\in\mathrm{N}$.

(i)探究$S(T_1(P_0))$与$S(P_0)$的关系；

(ii)证明：$S(P_{k+1})\le S(P_k)$.

【解析】(1)依题意，$P_0:2,4,3,7$，$T_1(P_0):4,1,3,2,6$，

$S(T_1(P_0))=2(4+2\times1+3\times3+4\times2+5\times6)+16+1+9+4+36=172$.

(2)(i)记$P_0:a_1,a_2,\cdots,a_n,(a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{N}^*)$，

$T_1(P_0):n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$，

$S(T_1(P_0))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$，

$S(P_0)=2(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

$S(T_1(P_0))-S(P_0)=2n+2a_1+2a_2+\cdots+2a_n-4-6-\cdots-2(n+1)+n^2-2a_1-2a_2-\cdots-2a_n+n$

$=n^2+3n-\dfrac{(2n+6)\cdot n}{2}=0$，所以$S(T_1(P_0))=S(P_0)$.

(ii)设 A 是每项均为非负整数的数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$，

当存在$1\le i<j\le n$，使得$a_i\le a_j$时，交换数列 A 的第 i 项与第j项得到数列B，

则 $S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-ja_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\le 0$，

当存在 $1\le m<n$，使得 $a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$ 时，若记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 C，则 $S(C)=S(A)$，

因此 $S\left(T_2(A)\right)\le S(A)$，从而对于任意给定的数列 P_0，

由 $P_{k+1}=T_2\left(T_1\left(P_k\right)\right)(k=0,1,2,\cdots)$，$S\left(P_{k+1}\right)\le S\left(T_1\left(P_k\right)\right)$，由(i)知 $S\left(T_1\left(P_k\right)\right)=S\left(P_k\right)$，

所以 $S\left(P_{k+1}\right)\le S\left(P_k\right)$.

【典例 4-2】(2024·江西赣州·一模)设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\left(N\ge 2\right)$.如果对小于 $n(2\le n\le N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k>a_n$.则称 n 是数列 A 的一个“D 时刻”.记 $D\left(A\right)$ 是数列 A 的所有“D 时刻”组成的集合，$D\left(A\right)$ 的元素个数记为 $\operatorname{card}\left(D,A\right)$.

(1)对数列 $A:-1,1,-2,2,-3,3$，写出 $D\left(A\right)$ 的所有元素；

(2)数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_6$ 满足 $\left\{a_1,a_2,\cdots,a_6\right\}=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$，若 $\operatorname{card}\left(D,A\right)=4$.求数列 A 的种数.

(3)证明：若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\ge -1\left(n=2,3,4,\cdots,N\right)$，则 $\operatorname{card}\left(D,A\right)\ge a_1-a_N$.

【解析】(1)由题设知当 $n=3$ 时，$a_1>a_3,a_2>a_3$，故 $n=3$ 是数列 A 的一个“D 时刻”,

同理当 $n=5$ 时，都有 $a_i>a_5\left(i=1,2,3,4\right)$，即 $n=5$ 也是数列 A 的一个“D 时刻”,

综上，$D\left(A\right)=\left\{3,5\right\}$.

(2)解法一：

由 $\operatorname{card}\left(D,A\right)=4$，易知 $a_1=5$ 或 $a_1=6$

①当 $a_1=5$ 时，$4,3,2,1$ 必须从左往右排列，6 可以是 $a_i\left(i=2,3,4,5,6\right)$ 中任一个，共有 5 种情况

②当 $a_1=6$ 时，若 $D\left(A\right)$ 中的四个元素是由集合 A 中的元素 $4,3,2,1$ 或 $5,3,2,1$ 或 $5,4,2,1$ 或 $5,4,3,1$ 引起的

【变式 4-1】若由 $4,3,2,1$ 引起，即 4，3，2，1 从左往右排列，则 5 必须排在 4 的后面，共 4 种；

【变式 4-2】若由 $5,3,2,1$ 引起，即 5，3，2，1 从左往右排列，则 4 必须排在 3 的后面，共 3 种

【变式 4-3】若由 $5,4,2,1$ 引起，即 $5,4,2,1$ 从左往右排列，则 3 必须排在 2 的后面，共 2 种；

【变式 4-4】若由 $5,4,3,1$ 引起，即 $5,4,3,1$ 从左往右排列，则 2 必须排在 1 的后面，共 1 种

综上，符合 $\operatorname{card}\left(D,A\right)=4$ 的数列 A 有 15 种

解法二：

因为数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_6\in\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$，

由题意可知 $D\left(A\right)$ 中的四个元素为 $2,3,4,5,6$ 中的四个，共有 5 种情况：

①当 $D\left(A\right)=\left\{3,4,5,6\right\}$ 时，数列 $A=\left\{5,6,4,3,2,1\right\}$ 共有 1 种情况；

②当 $D\left(A\right)=\left\{2,4,5,6\right\}$ 时，数列 $A=\left\{6,4,5,3,2,1\right\},\left\{5,4,6,3,2,1\right\}$ 共有 2 种情况；

③当 $D\left(A\right)=\left\{2,3,5,6\right\}$ 时，数列 $A=\left\{6,5,3,4,2,1\right\},\left\{6,4,3,5,2,1\right\},\left\{5,4,3,6,2,1\right\}$ 共有 3 种情况；

④当 $D\left(A\right)=\left\{2,3,4,6\right\}$ 时，

数列 $A=\{6,5,4,2,3,1\},\{6,5,3,2,4,1\},\{6,4,3,2,5,1\},\{5,4,3,2,6,1\}$ 共有 4 种情况；

⑤当 $D(A)=\{2,3,4,5\}$ 时，

数列 $A=\{6,5,4,3,1,2\},\{6,5,4,2,1,3\},\{6,5,3,2,1,4\},\{6,4,3,2,1,5\}$， $\{5,4,3,2,1,6\}$ 共有 5 种情况；

综上，符合 $\operatorname{card}(D,A)=4$ 的数列 A 有 15 种.

(3)①若 $\operatorname{card}(D,A)=0$， 由 $a_1 \le a_N$，

所以 $a_1-a_N \le 0$， 即 $\operatorname{card}(D,A) \ge a_1-a_N$ 成立；

②若 $\operatorname{card}(D,A)=m(m \ge 1)$，

不妨设 $D(A)=\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m\},(i_1<i_2<i_3<\cdots<i_m)$ 且 $2 \le i_j \le N(j=1,2,\cdots,m)$

从而 $a_{i_1}-a_1 \ge a_{i_1}-a_{i_1-1} \ge -1; a_{i_2}-a_{i_1} \ge a_{i_2}-a_{i_2-1} \ge -1;\cdots; a_{i_m}-a_{i_{m-1}} \ge a_{i_m}-a_{i_m-1} \ge -1$

由累加法知： $a_{i_m}-a_1 \ge -m$

又 $a_N-a_1 \ge a_{i_m}-a_1 \ge -m$， 即 $m \ge a_1-a_N$；

综上， $\operatorname{card}(D,A) \ge a_1-a_N$， 证毕.

【变式 4-5】(2024·高三·山东·开学考试)在无穷数列$\{a_n\}$中，令$T_n=a_1a_2\text{L}\ a_n$，若$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n\in\{a_n\}$，则称$\{a_n\}$对前n项之积是封闭的.

(1)试判断：任意一个无穷等差数列$\{a_n\}$对前n项之积是否是封闭的？

(2)设$\{a_n\}$是无穷等比数列，其首项$a_1=2$，公比为q．若$\{a_n\}$对前n项之积是封闭的，求出q的两个值；

(3)证明：对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n\cdot c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前$n$项之积都是封闭的.

【解析】(1)不是的，理由如下：

如等差数列$\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$， $T_2=a_1a_2=\frac{1}{2}\notin\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$

所以不是任意一个无穷等差数列对前n项之积是封闭的.

(2)$\{a_n\}$是等比数列，其首项$a_1=2$， 公比q，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2q^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=2^n q^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

由已知得，对任意正整数n， 总存在正整数m， 使得$T_n=a_m$成立，

即对任意正整数n， 总存在正整数m，

使得 $2^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}=2q^{m-1}$ 成立，

即对任意正整数n， 总存在正整数m， 使得 $q^{\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)}=2^{1-n}$ 成立，

①当$m=\frac{(n+1)n}{2}\geq 1$时，得$\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)=1-n$，所以$q=2$；

②当$m=\frac{(n-1)n}{2}+(2-n)=\frac{n^2-3n+4}{2}\geq 1$时，得$\left[\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)\right]+(1-n)=0$，

且$q=\frac{1}{2}$，

综上，$q=2$或$\frac{1}{2}$.

(3)对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，$a_n=a_1q^{n-1}=a_1^n\cdot\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，

令$b_n=a_1^n$，$c_n=\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，则$a_n=b_n\cdot c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

下面证明：$\{b_n\}$是对前n项之积是封闭的.

因为$b_n=a_1^n$，所以$T_n=a_1^{1+2+\cdots+n}=a_1^{\frac{n(n+1)}{2}}$，

取正整数$m=\frac{n(n+1)}{2}$得，$T_n=b_m$，

所以$\{b_n\}$对前n项之积是封闭的，

同理证明：$\{c_n\}$也对前n项之积是封闭的，

所以对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，

使得$a_n=b_n\cdot c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前$n$项之积都是封闭的.

【变式4-6】(2024·福建泉州·模拟预测)(a,b)表示正整数a，b的最大公约数，若$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\left(k,m\in\mathrm{N}^*\right)$，且$\forall x\in\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，$(x,m)=1$，则将$k$的最大值记为$\varphi(m)$，例如：$\varphi(1)=1$，$\varphi(5)=4$.

(1)求$\varphi(2)$，$\varphi(3)$，$\varphi(6)$；

(2)已知$(m,n)=1$时，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

(i)求$\varphi(6^n)$；

(ii)设$b_n=\frac{1}{3\varphi(6^n)-1}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\frac{6}{25}$.

【解析】(1)依题可得$\varphi(m)$表示所有不超过正整数m，且与m互质的正整数的个数，

因为与2互质的数为1，所以$\varphi(2)=1$；

因为与3互质的数为1，2，所以$\varphi(3)=2$；

因为与6互质的数为1，5，所以$\varphi(6)=2$.

(2)(i)因为$\left[1,2^n\right]$中与2^n互质的正整数只有奇数，

所以$\left[1,2^n\right]$中与2^n互质的正整数个数为2^{n-1}，所以$\varphi\left(2^n\right)=2^{n-1}$，

又因为$[3k-2,3k]\left(k=1,2,\cdots,3^{n-1}\right)$中与$3^n$互质的正整数只有$3k-2$与$3k-1$两个，

所以$\left[1,3^n\right]$中与3^n互质的正整数个数为$2\times 3^{n-1}$，

所以$\varphi\left(3^n\right)=2\times 3^{n-1}$，所以$\varphi\left(6^n\right)=\varphi\left(2^n\right)\varphi\left(3^n\right)=2\cdot 6^{n-1}$，

(ii)解法一：因为$b_n=\dfrac{1}{3\varphi\left(6^n\right)-1}$，

所以$b_n=\dfrac{1}{6^n-1}$，所以$b_n\le\dfrac{1}{5\cdot 6^{n-1}}$，

令$c_n=\dfrac{1}{5\cdot 6^{n-1}}$，因为$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{\dfrac{1}{5\cdot 6^n}}{\dfrac{1}{5\cdot 6^{n-1}}}=\dfrac{1}{6}$，

所以数列$\{c_n\}$是以$\dfrac{1}{5}$为首项，$\dfrac{1}{6}$为公比的等比数列，

所以数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{\dfrac{1}{5}\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{6}{25}\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right]$，

所以$T_n<\dfrac{6}{25}\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right]$，

又因为$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n>0$，所以$T_n<\dfrac{6}{25}$，

解法二：因为$b_n=\dfrac{1}{3\varphi\left(6^n\right)-1}$，所以$b_n=\dfrac{1}{6^n-1}$，

又因为$b_n=\dfrac{1}{6^n-1}=\dfrac{6^{n+1}-1}{\left(6^n-1\right)\left(6^{n+1}-1\right)}$，

所以$b_n<\dfrac{6^{n+1}}{\left(6^n-1\right)\left(6^{n+1}-1\right)}=\dfrac{\dfrac{6}{5}\left[\left(6^{n+1}-1\right)-\left(6^n-1\right)\right]}{\left(6^n-1\right)\left(6^{n+1}-1\right)}=\dfrac{6}{5}\left[\dfrac{1}{6^n-1}-\dfrac{1}{6^{n+1}-1}\right]$，

所以$T_n<\dfrac{6}{5}\left[\dfrac{1}{6^1-1}-\dfrac{1}{6^2-1}+\dfrac{1}{6^2-1}-\dfrac{1}{6^3-1}+\dfrac{1}{6^3-1}-\dfrac{1}{6^4-1}+\cdots+\dfrac{1}{6^n-1}-\dfrac{1}{6^{n+1}-1}\right]$，

所以$T_n<\dfrac{6}{5}\left[\dfrac{1}{6^1-1}-\dfrac{1}{6^{n+1}-1}\right]$，所以$T_n<\dfrac{6}{25}-\dfrac{6}{5}\left[\dfrac{1}{6^{n+1}-1}\right]$

因为$\dfrac{1}{6^{n+1}-1}>0$，所以$T_n<\dfrac{6}{25}$，

题型五：数列定义新情景

【典例 5-1】(2024·海南·模拟预测)若有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ (n 是正整数)，满足 $a_i=a_{n-i+1}$ ($i\in\mathrm{N}$，且 $1\le i\le n$)，就称该数列为"S 数列".

(1)已知数列 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的S 数列，且 b_1,b_2,b_3,b_4 成等比数列，$b_1=2,b_3=8$，试写出 $\{b_n\}$ 的每一项；

(2)已知 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k+1(k\ge1)$ 的S 数列，且 $c_{k+1},c_{k+2},\cdots,c_{2k+1}$ 构成首项为 100，公差为 -4 的等差数列，数列 $\{c_n\}$ 的前 $2k+1$ 项和为 S_{2k+1}，则当 k 为何值时，S_{2k+1} 取到最大值？最大值为多少？

(3)对于给定的正整数 $m>1$，试写出所有项数不超过 $2m$ 的S 数列，使得 $1,2,2^2,\cdots,2^{m-1}$ 成为数列中的连续项；当 $m>1500$ 时，试求这些S 数列的前 2024 项和 S_{2024}.

【解析】(1)设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

则 $b_3=b_1q^2=2q^2=8,q^2=4$，解得 $q=\pm2$，

当 $q=2$ 时，数列 $\{b_n\}$ 为 $2,4,8,16,8,4,2$；

当 $q=-2$ 时，数列 $\{b_n\}$ 为 $2,-4,8,-16,8,-4,2$；

综上，数列 $\{b_n\}$ 为 $2,4,8,16,8,4,2$ 或 $2,-4,8,-16,8,-4,2$.

(2)解法一：因为 $c_{k+1},c_{k+2},\cdots,c_{2k+1}$ 构成首项为 100，公差为 -4 的等差数列，

所以 $S_{2k+1}=c_1+c_2+\cdots\cdots c_k+c_{k+1}+c_{k+2}\cdots\cdots+c_{2k+1}$

$=2\left(c_{k+1}+c_{k+2}\cdots\cdots+c_{2k+1}\right)-c_{k+1}$

$=2\times\left[100(k+1)+\dfrac{(k+1)\cdot k}{2}\cdot(-4)\right]-100=-4k^2+196k+100$

$=-4\left(k-\dfrac{49}{2}\right)^2+2501$，

又 $k\in\mathrm{N}^*,k\ge1$，所以当 $k=24$ 或 $k=25$ 时，S_{2k+1} 取得最大值 2500.

解法二：当该S 数列恰为 $4,8,\cdots,96,100,96,\cdots,8,4$ 或 $0,4,8,\cdots,96,100,96,\cdots,8,4,0$ 时取得最大值，

此时 $k=24$ 或 $k=25$，

所以当 $k=24$ 或 25 时，$S_{2k+1}=\dfrac{(4+96)\times24}{2}\times2+100=2500$.

(3)依题意，所有可能的"S 数列"是：

①$1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

② $,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

③$2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$

④$2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$

对于①，当 $m\ge2024$ 时，$S_{2024}=1+2+2^2+\cdots+2^{2023}=\dfrac{1-2^{2024}}{1-2}=2^{2024}-1$；

当$1500<m\le 2023$时，

$S_{2024}=\left(1+2+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}\right)+\left(2^{m-2}+\cdots+2^{2m-2025}\right)$

$=\dfrac{1-2^{m}}{1-2}+\dfrac{2^{2m-2025}\cdot\left(1-2^{2024-m}\right)}{1-2}=2^{m}+2^{m-1}-2^{2m-2025}-1$；

对于②，当$m\ge 2024$时，$S_{2024}=2^{2024}-1$；

当$1500<m\le 2023$时，$S_{2024}=\left(1+2+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}\right)+\left(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{2m-2024}\right)$

$=\dfrac{1-2^{m}}{1-2}+\dfrac{2^{2m-2024}\cdot\left(1-2^{2024-m}\right)}{1-2}=2^{m+1}-2^{2m-2024}-1$；

对于③，当$m\ge 2024$时，$S_{2024}=2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{m-2024}$

$=\dfrac{2^{m-2024}\cdot\left(1-2^{2024}\right)}{1-2}=2^{m}-2^{m-2024}$；

当$1500<m\le 2023$时，$S_{2024}=\left(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2+1\right)+\left(2+\cdots+2^{2024-m}\right)$

$=\dfrac{1-2^{m}}{1-2}+\dfrac{2\cdot\left(1-2^{2024-m}\right)}{1-2}=2^{m}+2^{2025-m}-3$；

对于④，当$m\ge 2024$时，$S_{2024}=2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{m-2024}$

$=\dfrac{2^{m-2024}\cdot\left(1-2^{2024}\right)}{1-2}=2^{m}-2^{m-2024}$；

当$1500<m\le 2023$时，$S_{2024}=\left(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2+1\right)+\left(1+2+\cdots+2^{2023-m}\right)$

$=\dfrac{1-2^{m}}{1-2}+\dfrac{1-2^{2024-m}}{1-2}=2^{m}+2^{2024-m}-2$；

【典例 5-2】(2024·高三·全国·专题练习)将平面直角坐标系中的一列点$A_1\left(1,a_1\right)$、$A_2\left(2,a_2\right)$、$\cdots$、$A_n\left(n,a_n\right)$、$\cdots$，记为$\left\{A_n\right\}$，设$f\left(n\right)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\vec{j}$，其中$\vec{j}$为与$y$轴方向相同的单位向量.若对任意的正整数$n$，都有$f\left(n+1\right)>f\left(n\right)$，则称$\left\{A_n\right\}$为$T$点列.

(1)判断$A_1\left(1,1\right)$、$A_2\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$、$A_3\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$A_n\left(n,\dfrac{1}{n}\right)$、$\cdots$是否为$T$点列，并说明理由；

(2)若$\left\{A_n\right\}$为T点列，且$a_2>a_1$.任取其中连续三点A_k、A_{k+1}、A_{k+2}，证明$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角三角形；

(3)若$\left\{A_n\right\}$为T点列，对于正整数k、l、$m\left(k<l<m\right)$，比较$\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot\vec{j}$与$\overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot\vec{j}$的大小，并说明理由.

【解析】(1)$\left\{A_n\right\}$为T点列，理由如下：

由题意可知，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n})$，$\vec{j}=\left(0,1\right)$，所以$f\left(n\right)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\vec{j}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$，

$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{2}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}>0$，即$f\left(n+1\right)>f\left(n\right)$，$n\in\mathbf{N}^{*}$，

所以 $A_1(1,1)$、$A_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$、$A_3\left(3,\frac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$A_n\left(n,\frac{1}{n}\right)$、$\cdots$ 为 T 点列；

(2)由题意可知，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,a_{n+1}-a_n)$，$\vec{j}=(0,1)$，所以 $f(n)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\vec{j}=a_{n+1}-a_n$，

因为 $\{A_n\}$ 为 T 点列，所以 $f(n+1)-f(n)=a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)>0$，$n\in\mathrm{N}^*$，

又因为 $a_2>a_1$，所以 $a_2-a_1>0$.

所以对 $\{A_n\}$ 中连续三点 A_k、A_{k+1}、A_{k+2}，都有 $a_{k+2}-a_{k+1}>a_{k+1}-a_k$，$a_{k+2}>a_{k+1}>a_k$.

因为 $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=(1,a_{k+1}-a_k)$，$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=(1,a_{k+2}-a_{k+1})$，

因为 $a_{k+2}-a_{k+1}>a_{k+1}-a_k$，故 $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ 与 $\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ 不共线，即 A_k、A_{k+1}、A_{k+2} 不共线，

因为 $\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=-1+(a_k-a_{k+1})(a_{k+2}-a_{k+1})<0$，

所以，$\cos\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\dfrac{\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}}{\left|\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}\right|}<0$，则 $\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 为钝角，

所以 $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 为钝角三角形；

(3)由 $k<l<m$，$m\geqslant 3$.

因为 $\{A_n\}$ 为 T 点列，由(2)知 $a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，$n\in\mathrm{N}^*$，

所以 $a_{m+k}-a_{m+k-1}>a_{m+k-1}-a_{m+k-2}$，$a_{m+k-1}-a_{m+k-2}>a_{m+k-2}-a_{m+k-3}$，$\cdots$，

$a_{m+1}-a_m>a_m-a_{m-1}$，

两边分别相加可得 $a_{m+k}-a_m>a_{m+k-1}-a_{m-1}$，

所以 $a_{m+k-1}-a_{m-1}>a_{m+k-2}-a_{m-2}>\cdots>a_l-a_{l-k}$，

所以 $a_{m+k}-a_m>a_l-a_{l-k}$，所以 $a_{m+k}-a_l>a_m-a_{l-k}$，

又 $\overrightarrow{A_lA_{m+k}}=(m+k-l,a_{m+k}-a_l)$，$\overrightarrow{A_{l-k}A_m}=(m-l+k,a_m-a_{l-k})$，

所以 $\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot\vec{j}=a_{m+k}-a_l$，$\overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot\vec{j}=a_m-a_{l-k}$，

所以 $\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot\vec{j}>\overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot\vec{j}$.

【变式 5-1】(2024·辽宁葫芦岛·一模)大数据环境下数据量积累巨大并且结构复杂，要想分析出海量数据所蕴含的价值，数据筛选在整个数据处理流程中处于至关重要的地位，合适的算法就会起到事半功倍的效果．现有一个“数据漏斗”软件，其功能为；通过操作 $L(M,N)$ 删去一个无穷非减正整数数列中除以 M 余数为 N 的项，并将剩下的项按原来的位置排好形成一个新的无穷非减正整数数列．设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=3^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^+$，通过“数据漏斗”软件对数列 $\{a_n\}$ 进行 $L(3,1)$ 操作后得到 $\{b_n\}$，设 $\{a_n+b_n\}$ 前 n 项和为 S_n.

(1)求 S_n；

(2)是否存在不同的实数 $p,q,r\in\mathbf{N}^+$，使得 S_p，S_q，S_r 成等差数列？若存在，求出所有的 (p,q,r)；若不存在，说明理由；

(3)若 $e_n=\dfrac{nS_n}{2(3^n-1)}$，$n\in\mathbf{N}^+$，对数列 $\{e_n\}$ 进行 $L(3,0)$ 操作得到 $\{k_n\}$，将数列 $\{k_n\}$ 中下标除以 4 余数为 0，1 的项删掉，剩下的项按从小到大排列后得到 $\{p_n\}$，再将 $\{p_n\}$ 的每一项都加上自身项数，最终得到 $\{c_n\}$，证明：每个大于 1 的奇平方数都是 $\{c_n\}$ 中相邻两项的和.

【解析】(1)由 $a_n=3^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^+$ 知：当 $n=1$ 时，$a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时 $\dfrac{a_n}{3}\in\mathbf{N}^+$，故 $b_n=3^n$，$n\in\mathbf{N}^+$，

则 $S_n=4\sum\limits_{i=1}^{n}3^{n-1}=4\times\dfrac{1-3^n}{1-3}=2\left(3^n-1\right)$，$n\in\mathbf{N}^+$；

(2)假设存在，由 S_n 单调递增，不妨设 $p<q<r$，$2S_q=S_p+S_r$，p，q，$r\in\mathbf{N}^+$，

化简得 $3^{p-q}+3^{r-q}=2$，$\because$ $p-q<0$，$\therefore$ $0<3^{p-q}<1$，

$\therefore$ $1<3^{r-q}<2$，$\therefore$ $0<r-q<\log_3^2<1$，

与“$q<r$，且 q，$r\in\mathbf{N}^+$”矛盾，故不存在；

(3)由题意，$e_n=\dfrac{nS_n}{2(3^n-1)}=\dfrac{n\times 2(3^n-1)}{2(3^n-1)}=n$，则 $e_{3n}=3n$，$e_{3n-2}=3n-2$，$e_{3n-1}=3n-1$，

所以保留 e_{3n-2}，e_{3n-1}，则 $k_{2n-1}=3n-2$，$k_{2n}=3n-1$，$n\in\mathbf{N}^+$，

又 $k_{4n+1}=6n+1$，$k_{4n+2}=6n+2$，$k_{4n+3}=6n+4$，$k_{4n+4}=6n+5$，$n\in\mathbf{N}^+$，

将 k_{4n}，k_{4n+1} 删去，得到 $\{p_n\}$，则 $p_{2n+1}=6n+2$，$p_{2n+2}=6n+4$，

$c_{2n+1}=(6n+2)+(2n+1)=8n+3$，$c_{2n+2}=(6n+4)+(2n+2)=8n+6$，$n\in\mathbf{N}^+$，

即：$c_{2n-1}=8n-5$，$c_{2n}=8n-2$，$n\in\mathbf{N}^+$，

即：$c_n=\begin{cases}4n-1,n=2k-1\\4n-2,n=2k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^+$，

记 $r_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，下面证明：$(2k+1)^2=c_{r_k}+c_{r_k-1}$，

由 $r_{4m}=8m^2+2m$，$r_{4m+1}=8m^2+6m+1$，$r_{4m+2}=8m^2+10m+3$，$r_{4m+3}=8m^2+14m+6$，

$k=4m$ 时，$r_{4m}=8m^2+2m$，$r_{4m}+1=8m^2+2m+1$，

$c_{r_{4m}}+c_{r_{4m}-1}=\left[4\left(8m^2+2m\right)-2\right]+\left[4\left(8m^2+2m+1\right)-1\right]$

$=64m^2+16m+1=(2\times 4m+1)^2$；

$k=4m+1$ 时，$r_{4m-1}=8m^2+6m+1$，$r_{4m}+1=8m^2+6m+2$，

$c_{r_{4m-1}}+c_{r_{4m+1}-1}=\left[4\left(8m^2+6m+1\right)-1\right]+\left[4\left(8m^2+6m+2\right)-2\right]$

$=64m^2+48m+9=\left[2\left(4m+1\right)+1\right]^2$；

$k=4m+2$ 时，$k_{4m+2}=8m^2+10m+3$，$k_{4m+2}+1=8m^2+10m+4$，

$c_{k_{4m-2}}+c_{k_{4m-2}+1}=\left[4\left(8m^2+10m+3\right)-1\right]+\left[4\left(8m^2+10m+4\right)-2\right]$

$=64m^2+80m+25=\left[2\left(4m+2\right)+1\right]^2$；

$k=4m+3$时，$r_{4m+3}=8m^2+14m+6$，$r_{4m+3}+1=8m^2+14m+7$，

$c_{r_{4m+3}}+c_{r_{4m+3}+1}=\left[4\left(8m^2+14m+6\right)-2\right]+\left[4\left(8m^2+14m+7\right)-1\right]$

$=64m^2+112m+49=\left[2\left(4m+3\right)+1\right]^2$，

综上，对任意的$k\in\mathbf{N}^+$，都有$\left(2k+1\right)^2=c_{r_k}+c_{r_k+1}$，原命题得证．

题型六：差分数列、对称数列

【典例6-1】(2024·全国·模拟预测)给定数列$\left\{a_n\right\}$，称$\{a_n-a_{n-1}\}$为$\left\{a_n\right\}$的差数列(或一阶差数列)，称数列$\{a_n-a_{n-1}\}$的差数列为$\left\{a_n\right\}$的二阶差数列……

(1)求$\{2^n\}$的二阶差数列；

(2)用含m的式子表示$\{2^n\}$的m阶差数列，并求其前n项和．

【解析】(1)由差数列的定义，数列$\{2^n\}$的一阶差数列为$\{2^n-2^{n-1}\}=\{2^{n-1}\}$

数列$\{2^n\}$的二阶差数列为$\{2^{n-1}\}$的一阶差数列，即$\{2^{n-1}-2^{n-2}\}=\{2^{n-2}\}$

故数列$\{2^n\}$的二阶差数列为$\{2^{n-2}\}$．

(2)通过找规律得，$\{2^n\}$的m阶差数列为$\{2^{n-m}\}$，下面运用数学归纳法进行证明：

①当$m=1$时，显然成立；$m=2$时，由(1)得结论也成立．

②假设该结论对$m=k(k\geq 3)$时成立，尝试证明其对$m=k+1$时也成立．

由差数列的定义，$\{2^n\}$的$k+1$阶差数列即$\{2^n\}$的k阶差数列的一阶差数列，即

$\{2^{n-k}-2^{n-k-1}\}=\{2^{n-k-1}\}=\{2^{n-(k+1)}\}$

故该结论对$m=k+1$时也成立，证毕．

故$\{2^n\}$的m阶差数列为$\{2^{n-m}\}$．该数列是以2^{1-m}为首项，2为公比的等比数列，

故其前n项和为$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2^{1-m}(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1-m}-2^{1-m}$

故$\{2^n\}$的m阶差数列为$\{2^{n-m}\}$，其前n项和为$S_n=2^{n+1-m}-2^{1-m}$．

【典例6-2】(2024·海南省直辖县级单位·一模)若有穷数列a_1，a_2，…，a_n(n是正整数)，满足$a_i=a_{n-i+1}$($i\in\mathrm{N}^*$，且$1\leq i\leq n$)，就称该数列为“S数列”.

(1)已知数列$\left\{b_n\right\}$是项数为7的S数列，且b_1，b_2，b_3，b_4成等比数列，$b_1=2$，$b_3=8$，试写出$\left\{b_n\right\}$的每一项；

(2)已知$\left\{c_n\right\}$是项数为$2k+1$($k\geq 1$)的S数列，且c_{k+1}，c_{k+2}，…，c_{2k+1}构成首项为100，公差为-4的等差数列，数列$\left\{c_n\right\}$的前$2k+1$项和为S_{2k+1}，则当k为何值时，S_{2k+1}取到最大值？最大值为多少？

(3)对于给定的正整数$m>1$，试写出所有项数不超过$2m$的S数列，使得$1,2,2^2\cdots 2^{m-1}$成为数列中的连续项；