

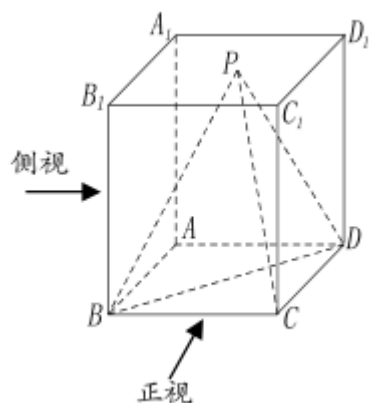
四川省蓬溪县蓬南中学 2022-2023 学年高三 2 月份自测数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，在底面边长为 1，高为 2 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，则三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图的面积之和为（ ）



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2. 若集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = -x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | x \leq 2\}$ C. $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ D. $\emptyset$

3. 设 $a, b \in (1, +\infty)$, 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 O 为坐标原点，角 α 的终边经过点 $P(3, m)$ ($m < 0$) 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}m$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

5. 设双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 的一条渐近线为 $y = -2x$, 且一个焦点与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点相同, 则此双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{5}{4}x^2 - 5y^2 = 1$ B. $5y^2 - \frac{5}{4}x^2 = 1$ C. $\frac{5}{4}y^2 - 5x^2 = 1$ D. $5x^2 - \frac{5}{4}y^2 = 1$

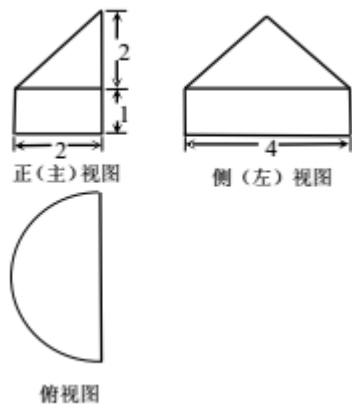
6. 正三棱锥底面边长为 3, 侧棱与底面成 60° 角, 则正三棱锥的外接球的体积为 ()

- A. 4π B. 16π C. $\frac{16\pi}{3}$ D. $\frac{32\pi}{3}$

7. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, S_n 为其前 n 项和, 则 $S_{2019} =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

8. 某几何体的三视图如图所示, 其俯视图是由一个半圆与其直径组成的图形, 则此几何体的体积是 ()

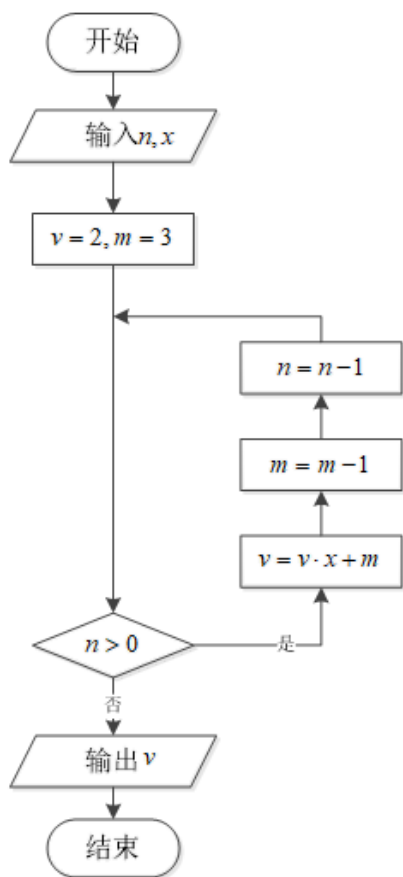


- A. $\frac{20}{3}\pi$ B. 6π C. $\frac{10}{3}\pi$ D. $\frac{16}{3}\pi$

9. 已知点 $(m, 8)$ 在幂函数 $f(x) = (m-1)x^n$ 的图象上, 设 $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$, $b = f(\ln \pi)$, $c = f(n)$, 则 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

10. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例. 若输入 n 、 x 的值分别为 3、1, 则输出 v 的值为 ()

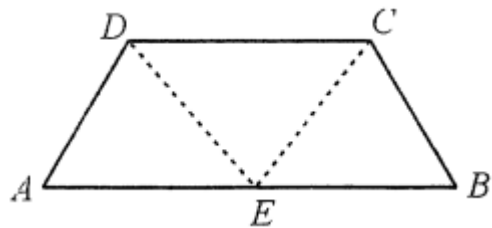


- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $C = \frac{\pi}{3}$, 若 $\vec{m} = (c - \sqrt{6}, a - b)$, $\vec{n} = (a - b, c + \sqrt{6})$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

12. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 2DC = 2AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED 、 EC 向上折起, 使 A 、 B 重合为点 F , 则三棱锥 $F-DCE$ 的外接球的体积是 ()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$
C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

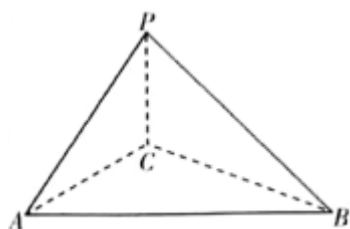
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ 的单调增区间为_____.

14. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点且 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP}$, 在 $\triangle ABC$ 内任取一点, 则此点取自 $\triangle PBC$ 内的概率是_____

15. 某部门全部员工参加一项社会公益活动, 按年龄分为 A, B, C 三组, 其人数之比为 $5:3:2$, 现用分层抽样的方法从总体中抽取一个容量为 20 的样本, 若 C 组中甲、乙二人均被抽到的概率是 $\frac{1}{11}$, 则该部门员工总人数为_____.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 平面 ABC , $AC \perp CB$, 已知 $AC = 2$, $PB = 2\sqrt{6}$, 则当 $PA + AB$ 最大时, 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$, 其中 $m \in R$.

(I) 若 $m > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的最大值.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $P\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上.

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 设直线 $y = kx + m$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点 M 在直线 $x = 1$ 上, 求证: 线段 AB 的中垂线恒过定点.

19. (12 分) 某商场以分期付款销售某种商品, 根据以往资料统计, 顾客购买该商品选择分期付款的期数 X 的分布列为:

X	2	3	4
P	0.4	a	b

其中 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$

(I) 求购买该商品的 3 位顾客中, 恰有 2 位选择分 2 期付款的概率;

(II) 商场销售一件该商品, 若顾客选择分 2 期付款, 则商场获得利润 100 元, 若顾客选择分 3 期付款, 则商场获得利润 150 元, 若顾客选择分 4 期付款, 则商场获得利润 200 元. 商场销售两件该商品所获的利润记为 Y (单位: 元)

(i) 求 Y 的分布列;

(ii) 若 $P(Y \leq 300) \geq 0.8$, 求 Y 的数学期望 $E(Y)$ 的最大值.

20. (12 分) 随着现代社会的发展, 我国对于环境保护越来越重视, 企业的环保意识也越来越强. 现某大型企业为此建立了 5 套环境监测系统, 并制定如下方案: 每年企业的环境监测费用预算定为 1200 万元, 日常全天候开启 3 套环境监测系统, 若至少有 2 套系统监测出排放超标, 则立即检查污染源处理系统; 若有且只有 1 套系统监测出排放超标, 则立即同时启动另外 2 套系统进行 1 小时的监测, 且后启动的这 2 套监测系统中只要有 1 套系统监测出排放超标, 也立即检查污染源处理系统. 设每个时间段 (以 1 小时为计量单位) 被每套系统监测出排放超标的概率均为 p ($0 < p < 1$), 且各个时间段每套系统监测出排放超标情况相互独立.

(1) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 求某个时间段需要检查污染源处理系统的概率;

(2) 若每套环境监测系统运行成本为 300 元/小时 (不启动则不产生运行费用), 除运行费用外, 所有的环境监测系统每年的维修和保养费用需要 100 万元. 现以此方案实施, 问该企业的环境监测费用是否会超过预算 (全年按 9000 小时计算)? 并说明理由.

21. (12 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴

的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = \cos \theta (\rho \cos \theta + 2)$.

(1) 求曲线 C_1 与直线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与直线 C_2 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

22. (10 分) 如图 1, $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是处在同一个平面内的两个全等的直角三角形,

$\angle ACB = \angle ACD = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 2$, 连接是 BD , E 边 BC 上一点, 过 E 作 $EF \parallel BD$, 交 CD

于点 F , 沿 EF 将 $\triangle CEF$ 向上翻折, 得到如图 2 所示的六面体 $P - ABEFD$,

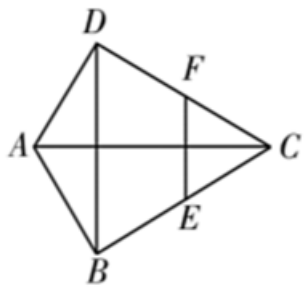


图1

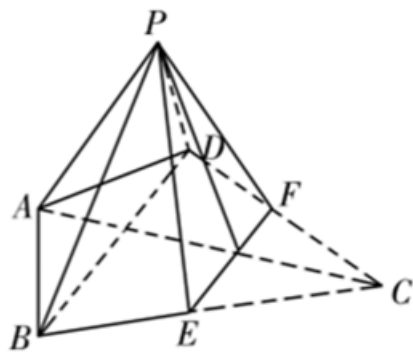


图2

(1) 求证: $BD \perp AP$;

(2) 设 $\vec{BE} = \lambda \vec{EC} (\lambda \in R)$, 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 若平面 PAB 与平面 PDF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 λ 的值;

(3) 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 求六面体 $P-ABEFD$ 的体积的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

根据几何体分析正视图和侧视图的形状, 结合题干中的数据可计算出结果.

【详解】

由三视图的性质和定义知, 三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图都是底边长为 2 高为 1 的三角形, 其面积都是 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$, 正视图与侧视图的面积之和为 $1+1=2$,

故选: A.

【点睛】

本题考查几何体正视图和侧视图的面积和, 解答的关键就是分析出正视图和侧视图的形状, 考查空间想象能力与计算能力, 属于基础题.

2、C

【解析】

试题分析: 化简集合 $A = [-2, 2]$, $B = (-\infty, 0]$, $\therefore A \cap B = [-2, 0]$

故选 C.

考点: 集合的运算.

3、C

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可.

【详解】

$$\because a, b \in (1, +\infty),$$

$$\therefore a > b \Rightarrow \log_a b < 1,$$

$$\log_a b < 1 \Rightarrow a > b,$$

$\therefore a > b$ 是 $\log_a b < 1$ 的充分必要条件,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 根据不等式的解法是解决本题的关键.

4、C

【解析】

根据三角函数的定义, 即可求出 $m = -1$, 得出 $P(3, -1)$, 得出 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$, 再利用二倍角的正弦公式, 即可求出结果.

【详解】

$$\text{根据题意, } \sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 9}} = \frac{\sqrt{10}}{10} m, \text{ 解得 } m = -1,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} = (3, -1),$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查三角函数定义的应用和二倍角的正弦公式, 考查计算能力.

5、C

【解析】

$$\text{求得抛物线的焦点坐标, 可得双曲线方程 } \frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1 \text{ 的渐近线方程为 } y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x, \text{ 由题意可得 } b = -4a, \text{ 又 } c^2 = 1,$$

即 $b - a = 1$, 解得 a, b , 即可得到所求双曲线的方程.

【详解】

$$\text{解: 抛物线 } x^2 = 4y \text{ 的焦点为 } (0, 1)$$

可得双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0, a < 0)$

即为 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$

由题意可得 $\sqrt{\frac{b}{-a}} = 2$ ，即 $b = -4a$

又 $c^2 = 1$ ，即 $b - a = 1$

解得 $a = -\frac{1}{5}$ ， $b = \frac{4}{5}$ 。

即双曲线的方程为 $\frac{5y^2}{4} - 5x^2 = 1$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查了求双曲线的方程，属于中档题。

6、D

【解析】

由侧棱与底面所成角及底面边长求得正棱锥的高，再利用勾股定理求得球半径后可得球体积。

【详解】

如图，正三棱锥 $A-BCD$ 中， M 是底面 $\triangle BCD$ 的中心，则 AM 是正棱锥的高， $\angle ABM$ 是侧棱与底面所成的角，即

$\angle ABM = 60^\circ$ ，由底面边长为 3 得 $BM = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，

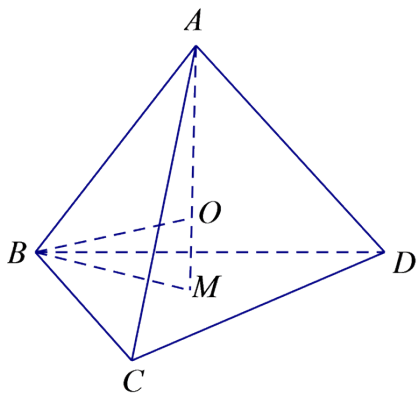
$\therefore AM = BM \tan 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ 。

正三棱锥 $A-BCD$ 外接球球心 O 必在 AM 上，设球半径为 R ，

则由 $BO^2 = OM^2 + BM^2$ 得 $R^2 = (3-R)^2 + (\sqrt{3})^2$ ，解得 $R = 2$ ，

$\therefore V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$ 。

故选：D。



【点睛】

本题考查球体积，考查正三棱锥与外接球的关系。掌握正棱锥性质是解题关键。

7、D

【解析】

用 $n+1$ 去换 $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$ 中的 n ，得 $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$ ，相加即可找到数列 $\{a_n\}$ 的周期，再利用

$$S_{2019} = 336S_6 + a_1 + a_2 + a_3 \text{ 计算.}$$

【详解】

由已知， $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$ ①，所以 $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$ ②，①+②，得 $a_{n+3} = -a_n$ ，

从而 $a_{n+6} = a_n$ ，数列是以 6 为周期的周期数列，且前 6 项分别为 1, 2, 1, -1, -2, -1，所以 $S_6 = 0$ ，

$$S_{2019} = 336(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 2 + 1 = 4.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查周期数列的应用，在求 S_{2019} 时，先算出一个周期的和即 S_6 ，再将 S_{2019} 表示成 $336S_6 + a_1 + a_2 + a_3$ 即可，本题是一道中档题.

8、C

【解析】

由三视图可知，该几何体是下部是半径为 2，高为 1 的圆柱的一半，上部为底面半径为 2，高为 2 的圆锥的一半，所以，

半圆柱的体积为 $V_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \pi \times 1 = 2\pi$ ，上部半圆锥的体积为 $V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\pi \times 2^2 = \frac{4\pi}{3}$ ，所以该几何体的体积为

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}, \text{ 故应选 C.}$$

9、B

【解析】

先利用幂函数的定义求出 m 的值，得到幂函数解析式为 $f(x) = x^3$ ，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，再利用幂函数 $f(x)$ 的单调性，即可得到 a, b, c 的大小关系.

【详解】

由幂函数的定义可知， $m^{-1} = 1$ ， $\therefore m = 2$ ，

$\therefore$ 点 $(2, 8)$ 在幂函数 $f(x) = x^n$ 上，

$\therefore 2^n = 8$ ， $\therefore n = 3$ ，

$\therefore$ 幂函数解析式为 $f(x) = x^3$ ，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ ， $1 < \ln \pi < 3$ ， $n = 3$ ，

$\therefore \frac{m}{n} < \ln \pi < n$ ，

$\therefore a < b < c$ ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了幂函数的性质，以及利用函数的单调性比较函数值大小，属于中档题.

10、B

【解析】

列出循环的每一步，由此可得出输出的 v 值.

【详解】

由题意可得：输入 $n = 3$ ， $x = 1$ ， $v = 2$ ， $m = 3$ ；

第一次循环， $v = 2 \times 1 + 3 = 5$ ， $m = 3 - 1 = 2$ ， $n = 3 - 1 = 2$ ，继续循环；

第二次循环， $v = 5 \times 1 + 2 = 7$ ， $m = 2 - 1 = 1$ ， $n = 2 - 1 = 1$ ，继续循环；

第三次循环， $v = 7 \times 1 + 1 = 8$ ， $m = 1 - 1 = 0$ ， $n = 1 - 1 = 0$ ，跳出循环；

输出 $v = 8$ ．

故选：B.

【点睛】

本题考查根据算法框图计算输出值，一般要列举出算法的每一步，考查计算能力，属于基础题.

11、C

【解析】

由 $\frac{a}{m} // \frac{1}{n}$ ，可得 $(a - b)^2 = (c - \sqrt{6})(c + \sqrt{6})$ ，化简利用余弦定理可得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，解得 ab ．即可得出三角形面积．

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/367002051104006056>