专题05 等边三角形的性质和应用（六大题型）

题型归纳

【题型1 利用等边三角形的性质求边长】

【题型2 利用等边三角形的性质求角度】

【题型3 等边三角形的判定】

【题型4 等边三角形的判定与性质】

【题型5 含30°角的直角三角形的性质】

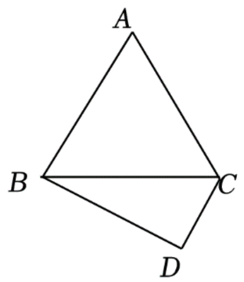
【题型6 反证法】

题型专练

【题型1 利用等边三角形的性质求边长】

（2024•福州模拟）

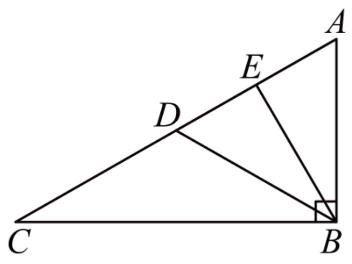
1．如图，在等边$\triangle ABC$中，$AB=4$，$BD\perp AB$，$CD\parallel AB$，则CD的长度为（　　）



A．2　　B．4　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

（2023秋•楚雄州期末）

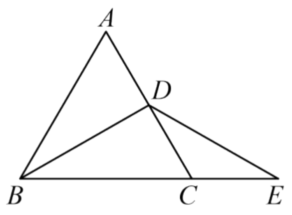
2．如图，BE是等边$\triangle ABD$的中线，作$BC\perp AB$，交AD的延长线于点C．若$CE=6$，则AB长为（　　）



A．4　　B．5　　C．6　　D．8

（2023•绵阳）

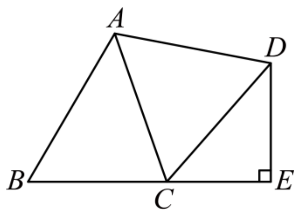
3．如图，在等边$\triangle ABC$中，BD是AC边上的中线，延长BC至点E，使$CE=CD$，若$DE=4\sqrt{3}$，则$AB=$（　　）



A．$4\sqrt{3}$　　　　B．6　　　　C．8　　　　D．$8\sqrt{3}$

（2023春•龙岗区校级期中）

4．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=60^\circ$，以AC为边在$\triangle ABC$外作等边$\triangle ACD$，过点D作$DE\perp BC$，垂足为E，若$AB=5$，$CE=3$，则BE的长为（　　）



A．4　　　　B．$\dfrac{9}{2}$　　　　C．5　　　　D．$3\sqrt{2}$

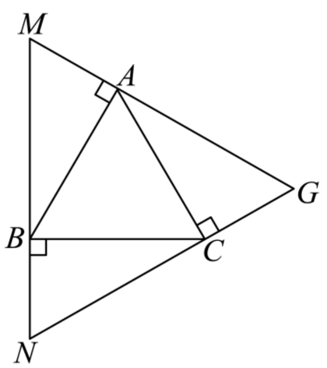
（2023秋•宝山区校级月考）

5．已知等边三角形的边长为1，则它的高等于（　）．

A．$\sqrt{3}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

（2022秋•渑池县期末）

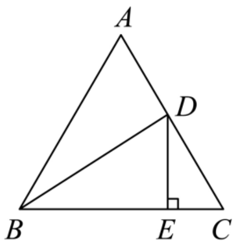
6．如图，过等边三角形$\triangle ABC$的顶点A、B、C依次作AB、BC、AC的垂线MG、MN、NG，三条垂线围成$\triangle MNG$，若$AM=2$，则$\triangle MNG$的周长为（　　）



A．12　　　　B．18　　　　C．20　　　　D．24

（2022秋•海兴县期末）

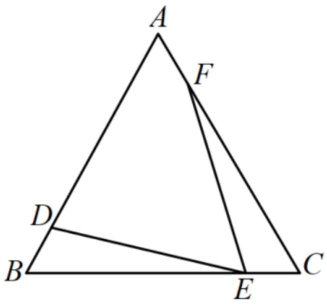
7．如图，在等边$\triangle ABC$中，BD平分$\angle ABC$交AC于点D，过点D作$DE\perp BC$于点E，且$CE=1.5$，则AB的长为（　　）



A．3　　　　B．4.5　　　　C．6　　　　D．7.5

（2023秋•文登区期中）

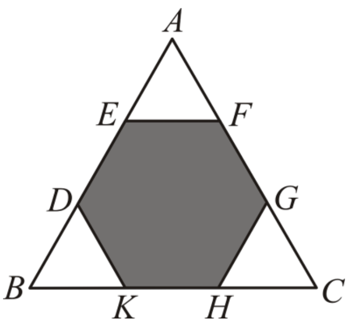
8．如图，在等边$\triangle ABC$中，$AB=5$，点D在AB上，且$BD=1$，点E、F分别是BC,AC上的点，连接DE,EF，如果$\angle DEF=60^{\circ}$，$DE=EF$，那么BE的长是（　　）



A．3　　　　B．3.5　　　　C．4　　　　D．4.5

（2023秋•潮南区校级月考）

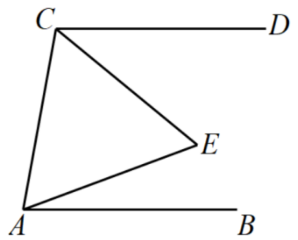
9．如图，木工师傅从边长为30cm的正三角形ABC木板上锯出一正六边形木板，那么正六边形木板的周长为________.



【题型2利用等边三角形的性质求角度】

（2024•长沙县一模）

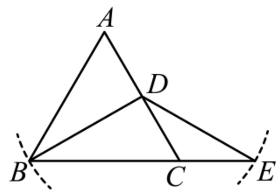
10．如图，$AB//CD$，$\triangle ACE$为等边三角形，$\angle DCE=45^{\circ}$，则$\angle EAB$等于（　　）



A．$40°$　　B．$30°$　　C．$20°$　　D．$15°$

（2024•青山湖区模拟）

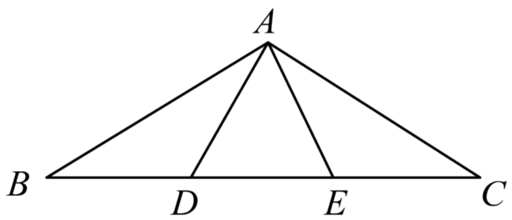
11．如图，BD是等边$\triangle ABC$的边AC上的中线，以点D为圆心，DB长为半径画弧交BC的延长线于点E，则$\angle BDE$等于（　）



A．$120°$　　B．$110°$　　C．$100°$　　D．$140°$

（2023春•龙岗区期中）

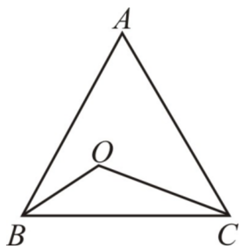
12．如图所示$\triangle ABC$中，$AD=DE=EA=BD=EC$，则$\angle BAC$的大小为（　）



A．$150°$　　B．$135°$　　C．$120°$　　D．$90°$

（2022秋•永善县期末）

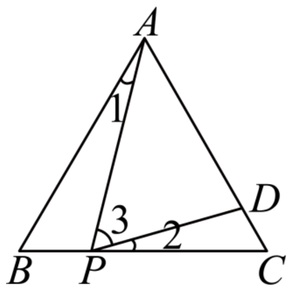
13．如图在等边△ABC中，O为三条高线的交点，连结OB、OC那么∠BOC=(　)



A．$100°$　　B．$90°$　　C．$150°$　　D．$120°$

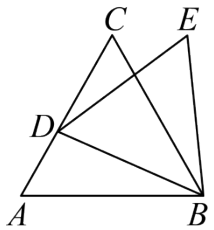
（2022秋•东丽区期末）

14．如图，等边三角形ABC，P为BC上一点，且$\angle 1=\angle 2$，则$\angle 3$的大小为________（度）．



（2023春•永春县期末）

15．如图，$\triangle ABC$与$\triangle BDE$均为等边三角形，点D在AC边上，若$\angle CDE=25°$，则$\angle CBD$的度数为_____ ．



【题型3 等边三角形的判定】

16．以下列各数为边长的三角形是等边三角形的是（　　）.

A．2，2，3．　　B．2，3，3　　C．2，4，5　　D．4，4，4

17．下列对$\triangle ABC$的判断，错误的是（　）

A．若$AB=AC$，$\angle B=60°$，则$\triangle ABC$是等边三角形

B．若$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，则$\triangle ABC$是直角三角形

C．若$\angle A=20°$，$\angle B=80°$，则$\triangle ABC$是等腰三角形

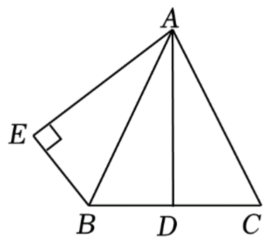
D．若$AB=BC$，$\angle C=40°$，则$\angle B=40°$

18．$\triangle ABC$的三边长分别为a，b，c，若满足$\left(a-b\right)^2+|b-c|+\left(c-a\right)^2=0$，则$\triangle ABC$的形状为( )

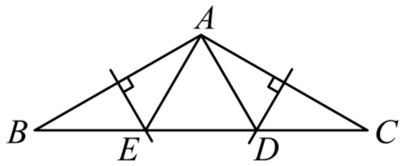
A．等边三角形　　B．等腰直角三角形

C．有$30°$角的直角三角形　　D．钝角三角形

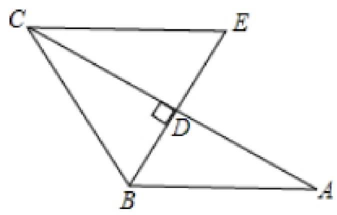
19．已知如图，AB＝AC，点D是BC的中点，AB平分$\angle DAE$，$AE\perp BE$，垂足为E．且$BE\parallel AC$．求证：$\triangle ABC$是等边三角形．



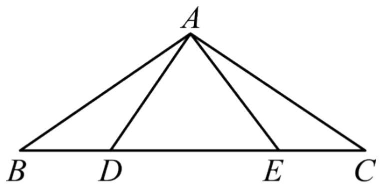
20．已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^{\circ}$，AB、AC边的垂直平分线分别交BC于点E、D，连接AE、AD．求证：$\triangle AED$是等边三角形．



21．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC,\angle ABC=120^{\circ},BE\perp AC$于点D，且$DE=DB$，试判断$\triangle CEB$的形状，并说明理由．



22．如图，$AB=AC$，$\angle BAC=120^{\circ}$，$AD\perp AC$，$AE\perp AB$．

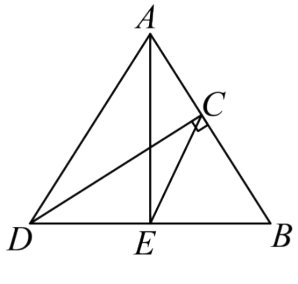


(1)求$\angle C$的度数；

(2)求证：$\triangle ADE$是等边三角形．

【题型4等边三角形的判定与性质】

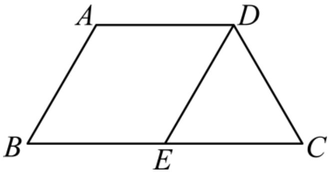
23．如图，在$\triangle ADB$中，$\angle ADB=60^{\circ}$，DC平分$\angle ADB$，交AB于点C，且$DC\perp AB$，过C作$CE\parallel DA$交DB于点E，连接AE．



(1)求证：$\triangle ADB$是等边三角形．

(2)求证：$AE \perp BD$．

24．已知：如图，$\angle B = \angle C$，$AB \parallel DE$，$EC = ED$．



(1)求证：$\triangle DEC$为等边三角形；

(2)求$\angle BED$的度数．

25．如图1，已知等边$\triangle ABC$中，D、E分别是AB、AC上的点，连接DE．

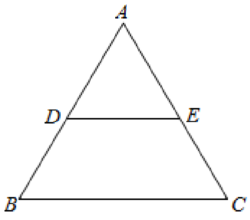


图1

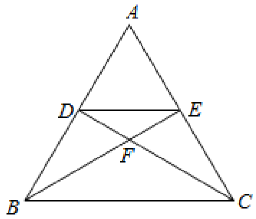
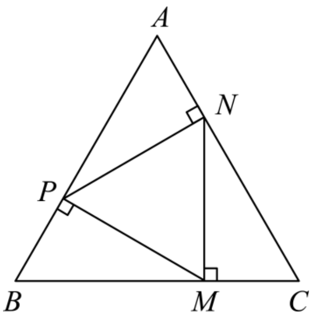


图2

(1)若$DE \parallel BC$，求证：$\triangle ADE$是等边三角形；

(2)如图2，若D、E分别为AB、AC中点，连接CD、BE，CD与BE相交于点F，请直接写出图中所有等腰三角形．（$\triangle ADE$与$\triangle ABC$除外）

26．图，点P，M，N分别在等边△ABC的各边上，且MP⊥AB于点P，MN⊥BC于点M，PN⊥AC于点N．



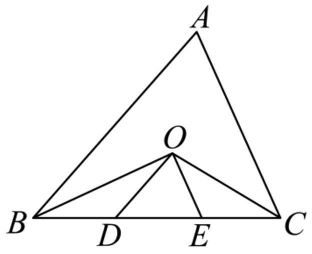
(1)求证：△PMN是等边三角形；

(2)若AB＝12cm，求CM的长．

27．如图，在等边△ABC中，∠ABC与∠ACB的平分线相交于点O，且OD∥AB，OE∥AC

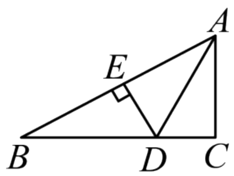
（1）试判定△ODE的形状，并说明你的理由；

（2）若BC=10，求△ODE的周长．



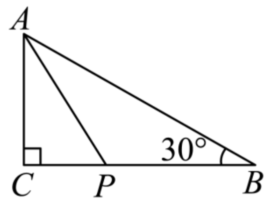
【题型5 含30°角的直角三角形的性质】

28．如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle BAC=2\angle B$，AB的垂直平分线DE，交AB于点E，交BC与点D，若$DE=3$．则BC的长是（　　）



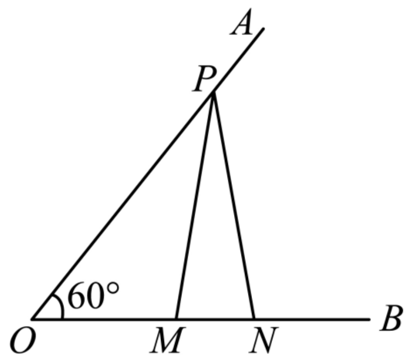
A．6　　B．8　　C．9　　D．12

29．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$\angle B=30°$，点P是BC边上的动点，则AP的长不可能是（　）



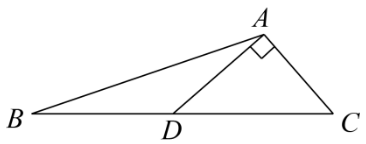
A．6　　B．8　　C．10　　D．13

30．如图，已知$\angle AOB=60°$，点P在边OA上，$OP=8$，点M，N在边OB上，$PM=PN$．若$MN=2$，则OM的长是（　）



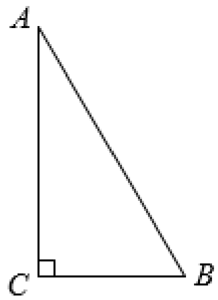
A．2　　B．3　　C．4　　D．5

31．如图，$\triangle ABC$中，AD为中线，$AD\perp AC$，$\angle BAD=30°$，$AB=3$，则AC长（　）



A．2.5　　　B．2　　　C．1.8　　　D．1.5

32．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle ABC=60^{\circ}$，$BC=2\text{cm}$，D为BC的中点，若动点E以每秒1cm的速度从A点出发，沿着$A\to B$的方向运动，点E运动t秒后，$\triangle BDE$是直角三角形，则t的值为（　　）



A．2　　　B．0.5

C．2或3.5　　　D．2或0.5

【题型6 反证法】

33．用反证法证明，"在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$对边是a、b．若$\angle A<\angle B$，则$a<b$．"第一步应假设（　）

A．$a>b$　　　B．$a=b$　　　C．$a\geq b$　　　D．$a\leq b$

34．用反证法证明命题"三角形中至少有一个内角大于或等于60°"时，首先应假设这个三角形中（　　）

A．每一个内角都大于60°　　　B．每一个内角都小于60°

C．有一个内角大于60°　　　D．有一个内角小于60°

35．牛顿曾说过："反证法是数学家最精良的武器之一．"那么我们用反证法证明："在同一平面内，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，$c\perp b$，则$a\parallel c$"时，首先应假设（　）

A．$a\parallel b$　　　B．$c\parallel b$　　　C．a与b相交　　　D．a与c相交

36．用反证法证明"一个三角形中至多有一个钝角"时，应假设（　）

A．一个三角形中至少有一个钝角　　　B．一个三角形中至多有一个钝角

C．一个三角形中至少有两个钝角　　　D．一个三角形中没有钝角

1．A

【分析】此题考查了等边三角形的性质、垂直的定义、平行线的性质、含30°的直角三角形的性质，熟记等边三角形的性质是解题的关键．

根据等边三角形的性质求出$AB=BC=4$，$\angle ABC=60^\circ$，结合垂直的定义、平行线的性质求出$\angle CBD=30^\circ$，$\angle D=90^\circ$，根据含30°的直角三角形的性质求解即可．

【详解】解：在等边$\triangle ABC$中，$AB=4$，

$\therefore AB=BC=4$，$\angle ABC=60^\circ$，

$\because BD\perp AB$，

$\therefore \angle ABD=90^\circ$，

$\therefore \angle CBD=\angle ABD-\angle ABC=30^\circ$，

$\because CD\parallel AB$，

$\therefore \angle D+\angle ABD=180^\circ$，

$\therefore \angle D=90^\circ$，

$\therefore CD=\dfrac{1}{2}BC=2$，

故选：A．

2．A

【分析】本题考查了等边三角形的性质、等角对等边，由等边三角形的性质得出$AD=BD=AB$，$\angle A=\angle ABD=60^\circ$，$DE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BD$，求出$\angle CBD=\angle C=30^\circ$，推出$CD=BD$，进而求出$CD$的长即可得出答案，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键．

【详解】解：$\because \triangle ABD$是等边三角形，

$\therefore AD=BD=AB$，$\angle A=\angle ABD=60^\circ$，

$\because BE$是等边$\triangle ABD$的中线，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BD$，

$\because BC\perp AB$，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\because \angle A=\angle ABD=60^\circ$，

$\therefore \angle CBD=\angle C=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

$\therefore CD=BD$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore CD=BD=\frac{2}{3}CE=4$，

$\therefore AB=4$，

故选：A．

3．C

【分析】此题考查了等边三角形的性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理等，熟练掌握各知识点是解答本题的关键．先由等边三角形的性质，得$BD\perp AC$，$AD=CD=\frac{1}{2}AC$，$\angle ABD=\angle CBD=30^\circ$，再根据$CE=CD$，得$\angle E=\angle CDE$，进而得$\angle CBD=\angle E=30^\circ$，则$BD=DE=4\sqrt{3}$，然后在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，由勾股定理求出$AB$即可．

【详解】解：$\because \triangle ABC$为等边三角形，

$\therefore AC=AC=BC$，$\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，

$\because BD$是AC边上的中线，

$\therefore BD\perp AC$，$AD=CD=\frac{1}{2}AC$，$\angle ABD=\angle CBD=30^\circ$，

$\therefore AB=2AD$，

$\because CE=CD$，

$\therefore \angle E=\angle CDE$，

$\because \angle ACB=\angle E+\angle CDE=2\angle E$，

$\therefore 60^\circ=2\angle E$，

$\therefore \angle E=30^\circ$，

$\angle CBD=\angle E=30^\circ$，

$\therefore BD=DE=4\sqrt{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，由勾股定理得：$AB^2-AD^2=BD^2$，

即$(2AD)^2-AD^2=(4\sqrt{3})^2$，

解得：$AD=4$，

$\therefore AB=2AD=8$．

故选：C．

4．A

【分析】过点 C 作 $CP\perp AB$ 于点 P，证明 $\triangle DCE\cong\triangle CAP\left(\mathrm{AAS}\right)$，再利用直角三角形的特征量解答即可.

本题考查了三角形全等的判定和性质，直角三角形的特征量，熟练掌握三角形全等判定和性质是解题的关键.

【详解】解：$\because\angle ABC=60^\circ$，

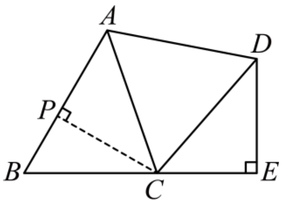
$\therefore\angle CAB+\angle ACB=120^\circ$.

$\because$等边 $\triangle ACD$，

$\therefore AC=CD$，$\angle ACD=60^\circ$.

$\therefore\angle ACB+\angle DCE=120^\circ$.

$\therefore\angle CAB=\angle DCE$.



过点 C 作 $CP\perp AB$ 于点 P，

$\therefore\angle APC=90^\circ$.

$\because DE\perp BC$，

$\therefore\angle DEC=90^\circ$.

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle CAP$ 中，

$$\begin{cases}\angle DEC=\angle CPA\\ \angle DCE=\angle CAP\\ DC=CA\end{cases},$$

$\therefore\triangle DCE\cong\triangle CAP\left(\mathrm{AAS}\right)$.

$\therefore CE=AP=3$.

$\because AB=5$，

$\therefore BP=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPC$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore\angle BCP=30^\circ$，

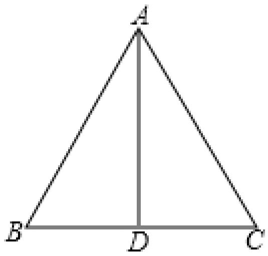
$\therefore BC=2BP=4$.

故选：A.

5．B

【分析】根据等腰三角形三线合一的性质求得 BD 的长，再进一步根据勾股定理求解．

【详解】∵AB=AC，AD⊥BC，



∴BD=$\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$．

在直角三角形 ABD 中，根据勾股定理，得

AD=$\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选 B．

【点睛】此题考查等边三角形的性质和勾股定理，解题关键在于画出图形．

6．B

【分析】本题主要考查了等边三角形的判定和性质，三角形全等的判定和性质，含 30 度的直角三角形的性质，先证明$\triangle MNG$是等边三角形．得出$MG=MN=NG$．根据直角三角形的性质求出$MB=2MA=4$，证明$\triangle ABM\cong\triangle CAG(\text{AAS})$，得出$GA=MB=4$，求出$MG=GA+AM=6$，最后求出结果即可．

【详解】解：∵$AB\perp MG$，

∴$\angle BAG=90^{\circ}$，

∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$\angle BAC=60^{\circ}$，

∴$\angle CAG=\angle BAG-\angle BAC=30^{\circ}$，

∴$\angle G=60^{\circ}$，

同理：$\angle M=\angle N=60^{\circ}$，

∴$\triangle MNG$是等边三角形．

∴$MG=MN=NG$．

在$\text{Rt}\triangle ABM$ 中，$\angle M=60^{\circ}$，

∴$\angle MBA=30^{\circ}$，

∴$MB=2MA=4$，

$\because AC \perp NG$，

$\therefore \angle ACG = 90°$，

在$\triangle ABM$与$\triangle CAG$中，

$$\begin{cases} \angle M = \angle G = 60° \\ \angle BAM = \angle ACG = 90° \\ AB = CA \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CAG(\text{AAS})$

$\therefore GA = MB = 4$，

$\therefore MG = GA + AM = 6$，

$\therefore \triangle MNG$的周长为$MG + MN + NG = 3MG = 18$．

故选：B．

7．C

【分析】此题考查了等边三角形的性质以及含$30°$角的直角三角形的性质．此题难度不大，注意掌握数形结合思想的应用．

由在等边三角形ABC中，$DE \perp BC$，可求得$\angle CDE = 30°$，则可求得CD的长，又由BD平分$\angle ABC$交AC于点D，由三线合一的知识，即可求得答案．

【详解】解：$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle C = 60°$，$AB = BC = AC$，

$\because DE \perp BC$，

$\therefore \angle CDE = 30°$，

$\because EC = 1.5$，

$\therefore CD = 2EC = 3$，

$\because BD$平分$\angle ABC$交AC于点D，

$\therefore AD = CD = 3$，

$\therefore AB = AC = AD + CD = 6$．

故选：C．

8．C

【分析】根据等边三角形的性质得到$\angle B = \angle C = 60°$，$BC = AB = 5$，再根据三角形外角性质推出推出$\angle FEC = \angle BDE$，由此证明$\triangle BDE \cong \triangle CEF(\text{AAS})$，得到$CE = BD = 1$，即可求出$BE$