一阶常微分方程模型

微分方程模型在自然科学中的应用主要以物理，力学等客观规律为基础建立起来，而在经济学，人口预测等社会科学方面的应用则是在类比，假设等措施下建立起来。

人口模型

人口数量以及和次类似的动植物种群的个体数量都是离散变量，不具有连续可微性。但由于短时间内改变的是少数个体，与整体数量相比，这种变化是很微小的。基于此原因，为了成功应用数学工具，我们通常假定大规模种群的个体数量是时间的连续可微函数。此假设条件在非自然科学的问题中常常用到。

指数增长模型（Malthus 人口模型）

美国人口学家Malthus(1766-1834)于1798年根据百余年人口统计资料提出了著名的人口指数增长模型。

模型假设：在人口的自然增长过程中，单位时间内人口增量与人口总数成正比。

模型建立：设 $N(t)$为 t时刻的人口述，考察时间区间 $t+\Delta t$上的人口变动。

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t$$

令$\Delta t\to 0$ 可以得到微分方程模型

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN, \quad r>0\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$

可以解得此方程的解为

$$N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$$

模型分析和应用：

（1）当$r>0$时，人口将随着时间的增加无限的增长，这是一个不合理的模型，因为一个环境的资源不可能容纳无限增长的人口，从生态环境的角度分析也可以看出其中的不合理性。一般说来，就一个种群的发展规律看，在种群的发展初期种群数的变化是和指数增长模型大致吻合的（甚至可能出现年

增长率递增的现象），但是随着人口数的增加，人口的年增长率将呈现逐年递减的现象。再考虑到环境适应程度的制约，想象人口的增长不可能超过某个度。

（2）对于其中常数增长率r的估计可以使用拟合或者参数估计的方法得到。

（3）在实际情况下，可以使用离散的近似表达式 $N(t)=N_0(1+r)^t$ 作为人口的预测表达式。

（4） 从实际的人口检验情况看，指数增长模型对于时间间隔比较短，并且背景情况改变不大的情况适用。对于长时间的人口数模型不合适。

阻滞增长模型（ **Logistic** 模型）

和指数增长模型相比较，阻滞增长模型考虑到自然资源和环境条件等其他因素对人口的增长的阻滞作用，而且随着人口的增加，这种阻滞作用将越来越大。

模型假设：

（1）人口的增长率*r* 是当前人口数的减函数。 $r = r(N) \quad r(N)' < 0$

（2） $r(N)=r-sN$，其中 r 是人口的固有增长率，而 s 决定了所能容纳的最大人口量 N_m。当 $N=N_m$ 时，人口的增长速度将降为0，从而可以得到 $s=r/N_m$。

这样可以得到

$$r(N)=r(1-N/N_m)。$$

模型建立:

相同的微元法研究可以得到下面的微分方程

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{N_m})N, \quad N(t_0) = N_0$$

利用变量分离的方法得到该方程的解为

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + (\frac{N_m}{N_0} - 1)\, e^{-r(t-t_0)}}$$

模型分析和讨论：

（1） 在微分方程表达式中，rN 体现人口自身的增长趋势，因子$(1-N/N_m)$反映自然环境尚能容纳的比例，人口的变化是这两个因素共同作用的结果。可以发现N越大，两个因素的作用是相反的，并且当N越大，自然环境和资源的阻滞作用越大。

（2） 注意到 $\frac{dN}{dt}>0$ ，并且从最终的人口方程可以看到，$N(t)\le N_m$，以及 $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=N_m$，这说明人口随着时间的增加递增地趋于$N_m$。

（3）$\frac{d^2N}{dt^2}=r(1-2N/N_m)=0$ 表明当 $N=\frac{N_m}{2}$ 时人口的增长速度最快，从而可以得到人口曲线上的一个拐点。

（4） 模型中所涉及到的两个参数 r, N_m 的估计可以通过

$$\frac{dN/dt}{N} = r - sN, \quad s = \frac{r}{N_m}$$

进行线性拟合。其中 $dN/dt \approx \Delta N/\Delta t$ 。而模型的检验也可以通过这两个参数的估计量与一个实际的人口数量之间进行比较加以检验。

（5） 阻滞增长模型不仅能够大体上描述人口及许多物种的变化规律，而且在社会经济领域中有广泛的应用，如耐用消费品的销售量也可以用此模型来描述。

新技术推广模型

一项新技术如何在有关企业中推广,是人们最为关心的问题,也就是说,一旦一家企业采用了一项新技术,那么行业中的其他企业将以怎样的速度采用该技术？哪些因素将影响到技术的推广？下面我们在适当的条件下讨论此问题。

记$p(t)$为t时刻采用该技术的企业数。并设$p(t)$连续可微。假设未采用该技术者之所以决定采用该技术，是因为其已知有的企业采用了该技术并具有成效。即是以“眼见为实”作为决策依据的,亦即“示范效应”在起作用。

假设$t=0$时，有一项新技术被引进到共有N个企业的行业中，其中有一个企业采用该技术。用$p(t+\Delta t)-p(t)$表示t到$t+\Delta t$时间内采用该技术的企业数的增加量，假设该增加量与已采用该技术的企业数$p(t)$成正比，与还未采用该技术的企业数$N-p(t)$成正比，

则有

$$p(t+\Delta t)-p(t)=rp(t)(N-p(t))\Delta t$$

令$\Delta t \to 0$，得

$$\frac{dp}{dt}=rp(N-p)$$

于是得模型

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=rp(N-p) \\ p(0)=1 \end{cases}$$

解得

$$p(t)=\frac{N}{1+(N-1)e^{-rNt}}$$

显然，$p(t)>0$， 且$t\rightarrow+\infty$时，$p(t)\rightarrow N$， 并对任何 t ，$p(t)<N$。还有， 当$p=\frac{N}{2}$时，$\frac{dp}{dt}$最大。

以上模型的建立，是基于示范效应的。但随着通讯能力的提高和大众媒介的普及，广告的作用愈来愈明显。即一个企业采用该技术还可能是因为广告效应的作用，从而在考虑单位时间内使用该技术的企业数的增量时，应把示范效应与广告效应一起考虑。而广告效应只能对没采用该技术的企业起作用。假设其引起的增量与$N - p(t)$ 成正比。

则有如下模型

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = rp(N-p) - r_1(N-p), \quad r, r_1 > 0 \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

解得

$$p(t) = \frac{Nr_1(e^{(r_1+rN)t} - 1)}{rN + r_1 e^{(r_1+rN)t}}$$

哈罗德-多马经济增长模型

计Y，C，I，A分别为总收入，总消费，引致投资和自发支出（自发消费与自发投资之和），则由总供给等于总需求，得

$$Y = C + I + A$$

设消费函数为

$$C = cY, \quad 0 < c < 1$$

引致投资为

$$I = \upsilon \frac{dY}{dt}, \quad \upsilon > 0$$